Leçon 80 - Espace vectoriel de dimension finie

13 mars 2026

⇒ Impact d'un changement de bases

⇒ Théorème du rang

⇒ Impact d'un changement de bases

⇒ Théorème du rang

Matrice d'une application linéaire

Définition - Matrice d'un morphisme u

E et F sont deux $\mathbb{K}$ev, de dimension resp. n et p).
$\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \cdots, f_p)$ bases de E et de F resp..
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\forall j \in [\![1,n]\!], u(e_j) \in F$ et donc on peut écrire $u(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$.
On appelle **matrice de** u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, la matrice :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \mathscr{M}(u,\mathscr{B},\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p; 1\leqslant j\leqslant n}$$

a_{ij} désigne la i-ième coordonnée de $u(e_j)$ dans $\mathscr{C}$.
C'est la matrice dans $\mathscr{C}$ de la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Réciproquement, application canoniquement associée à une matrice

Définition - Application canoniquement associée à A

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que la matrice de u dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ soit A. On dit alors que u est canoniquement associée à A.
u peut alors être identifiée à l'application

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M}_{n,1} & \to \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto AX \end{array}$$

Noyau, image d'une matrice

Remarque Convention d'usage

Noyau, image d'une matrice

Remarque Convention d'usage

Proposition - Noyau, image

Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et u l'application linéaire canoniquement associée.
On rappelle que :

$$\mathrm{Ker}\ A = \{X \in \mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,|\, AX = 0_{\mathbb{K}^p}\}$$

$$\mathrm{Im}\ A = \{Y \in \mathbb{K}^p \equiv \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \,|\, \exists X \in \mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), Y = AX\}.$$

Par les identifications précédentes $\mathrm{Ker}\ A = \mathrm{Ker}\ u$ et $\mathrm{Im}\ A = \mathrm{Im}\ u$.

⇒ Impact d'un changement de bases

⇒ Théorème du rang

Matrice de passage

Définition - Matrice de passage (changement de base vectoriel)

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n,
$\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ (ancienne) et $\mathscr{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ (nouvelle), deux bases de E.
On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, notée $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ (ou $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$), la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(e'_1, \cdots, e'_n)$$

Inverse d'une matrice de changement de base

Théorème - Inverse d'une matrice de passage

On a $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)$.
Une matrice de passage est donc inversible (car Id_E est bijectif) et $(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Inverse d'une matrice de changement de base

Théorème - Inverse d'une matrice de passage

On a $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)$.
Une matrice de passage est donc inversible (car Id_E est bijectif) et $(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Pas de démonstration supplémentaire.

Inverse d'une matrice de changement de base

Théorème - Inverse d'une matrice de passage

On a $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)$.
Une matrice de passage est donc inversible (car Id_E est bijectif) et $(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Pas de démonstration supplémentaire.

Théorème - Calcul matriciel du changement de base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Si X est la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}$ de $x \in E$ et X' la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}'$ de x, alors $X = PX'$, c'est-à-dire

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(x)$$

Retenir...

Savoir-faire. Petite aide mnémnotechnique

Se souvenir que la formule donne facilement les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base, ce qui est rarement ce dont on a besoin ! Pour avoir les coordonnées dans la nouvelle base en fonction des anciennes, il faut calculer P^{-1}.

Retenir...

Savoir-faire. Petite aide mnémnotechnique

Se souvenir que la formule donne facilement les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base, ce qui est rarement ce dont on a besoin ! Pour avoir les coordonnées dans la nouvelle base en fonction des anciennes, il faut calculer P^{-1}.

Démonstration

Matrices équivalentes

Théorème - Changement de base d'une application de $\mathscr{L}(E,F)$

Soient E,F deux $\mathbb{K}$-e.v., de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ pour E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ pour F. On pose $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$.
Alors, si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, $A' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$ on a

$$A' = Q^{-1}AP$$

Matrices équivalentes

Théorème - Changement de base d'une application de $\mathscr{L}(E,F)$

Soient E,F deux $\mathbb{K}$-e.v., de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ pour E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ pour F. On pose $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$.
Alors, si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, $A' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$ on a

$$A' = Q^{-1}AP$$

Démonstration à bien savoir faire, pour retrouver rapidement le résultat :

Démonstration

Matrices équivalentes

Remarque Rappel (? ?)

Matrices équivalentes

Remarque Rappel (? ?)

Proposition - Nouvelle interprétation de l'équivalence matricielle

$A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si
elles représentent la même applications linéaire dans des bases différentes (a priori au départ et à l'arrivée)

Matrices équivalentes

Remarque Rappel (? ?)

Proposition - Nouvelle interprétation de l'équivalence matricielle

$A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si

elles représentent la même applications linéaire dans des bases différentes (a priori au départ et à l'arrivée)

Démonstration

Matrices semblables

Dans le cas particulier où $E = F$ on peut prendre $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ et $\mathscr{B}' = \mathscr{C}'$ d'où $Q = P$ et on a le théorème suivant :

Matrices semblables

Dans le cas particulier où $E = F$ on peut prendre $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ et $\mathscr{B}' = \mathscr{C}'$ d'où $Q = P$ et on a le théorème suivant :

Théorème -

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors, si $u \in \mathscr{L}(E)$, $A = Mat_{\mathscr{B}}(u)$, $A' = Mat_{\mathscr{B}'}(u)$ on a

$$A' = P^{-1}AP$$

Exercice

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^2$. On considère les deux vecteurs $f_1 = (1,2)$ et $f_2 = (1,3)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (f_1, f_2)$ est une base de E.
2. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de E. Ecrire la matrice de passage $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.
3. Soit $x = (4,1) \in E$. Déterminer matriciellement les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$.
4. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u((x,y)) = (2x + y, x - y)$. Ecrire les matrices de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Matrices semblables

Définition - Matrices semblables

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Matrices semblables

Définition - Matrices semblables

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque Relation d'équivalence

Application

On a alors, par récurrence,

Proposition - Calcul de puissance

Si A et B son semblables, précisément : $B = P^{-1}AP$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = P^{-1}A^kP$ (car $PP^{-1} = I_n$).

Application

On a alors, par récurrence,

Proposition - Calcul de puissance

Si A et B son semblables, précisément : $B = P^{-1}AP$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = P^{-1}A^kP$ (car $PP^{-1} = I_n$).

Théorème - Ré-interprétation de la similitude

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors les matrices A et B sont semblables si et seulement si
il existe $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, bases de E, $u \in \mathscr{L}(E)$ tq $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ et $B = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(u)$.
Autrement dit, A et B sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Truc et Astuce

Truc & Astuce. Etant donnée A et B, trouver $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et u

Il n'y a pas unicité du triplet $(\mathscr{B}, \mathscr{B}', u)$. Il faut donc choisir un représentant. En revanche, on connait A et B puis donc P.

Truc et Astuce

Truc & Astuce. Etant donnée A et B, trouver $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et u

Classiquement, on considère (dans l'ordre) :

1. $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (équivalent à $\mathbb{K}^n$)
2. $\mathscr{B} = (X_1, \dots X_n)$, la base canonique de E
3. $u : X \mapsto A \times X$. Par construction $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$.
   En fait, comme $\mathscr{B}$ est la base canonique,
   $$AX_j = C_j(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,j} X_i$$
4. $\mathscr{B}' = P(\mathscr{B}) = (Y_1, Y_2, \dots Y_n) = (PX_1, PX_2, \dots PX_n)$, c'est bien une base car P est inversible.
   $u(Y_j) = u(PX_j) = APX_j = P^{-1}BX_j = P^{-1}C_j(B)$, car $\mathscr{B}$ b. cano.
   Donc
   $$u(Y_j) = P^{-1} \sum_{i=1}^{n} [B]_{i,j} X_i = \sum_{i=1}^{n} [B]_{i,j} P^{-1} X_i = \sum_{i=1}^{n} [B]_{i,j} Y_i$$
   Ainsi $\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(u) = B$

Transposé ?

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à ${}^tA$.

Trace de matrice semblable

Proposition - Matrices semblables et trace

Deux matrices semblables ont même trace.

Trace de matrice semblable

Proposition - Matrices semblables et trace

Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration

Trace de matrice semblable

Proposition - Matrices semblables et trace

Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration

Définition - Trace d'un endomorphisme

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle trace de u le scalaire

$$\operatorname{tr} u = \operatorname{tr}(u) = \operatorname{Tr} M_{\mathscr{B}}(u).$$

Trace de matrice semblable

Proposition - Matrices semblables et trace

Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration

Définition - Trace d'un endomorphisme

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle trace de u le scalaire

$$\operatorname{tr} u = \operatorname{tr}(u) = \operatorname{Tr} M_{\mathscr{B}}(u).$$

Remarque Une démonstration ?

Propriété de la trace d'un endomorphisme

Corollaire - Propriétés simples de tr

L'application trace sur $\mathscr{L}(E)$ est linéaire et

$$\forall u, v \in \mathscr{L}(E), \mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u).$$

Propriété de la trace d'un endomorphisme

Corollaire - Propriétés simples de tr

L'application trace sur $\mathscr{L}(E)$ est linéaire et

$$\forall u, v \in \mathscr{L}(E), \mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u).$$

Proposition - Rang=trace d'un projecteur

Soit $p \in L(E)$ un projecteur. Alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Propriété de la trace d'un endomorphisme

Corollaire - Propriétés simples de tr

L'application trace sur $\mathscr{L}(E)$ est linéaire et

$$\forall u, v \in \mathscr{L}(E), \mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u).$$

Proposition - Rang=trace d'un projecteur

Soit $p \in L(E)$ un projecteur. Alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Démonstration

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Impact d'un changement de bases

Conclusion

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

- Même u : deux bases de E, deux bases de F :

Conclusion

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

- Même u : deux bases de E, deux bases de F :
- $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}(u) = P(\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1,id) \times \mathscr{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}(u) \times P(\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1,id)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

- Même u : deux bases de E, deux bases de F :
- $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}(u) = P(\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1,id) \times \mathscr{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}(u) \times P(\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1,id)$
- Matrices équivalentes, puis cas particulier des matrices semblables

Conclusion

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

- Même u : deux bases de E, deux bases de F :
- $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}(u) = P(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1, id) \times \mathscr{M}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}(u) \times P(\mathscr{B}_2, \mathscr{B}_1, id)$
- Matrices équivalentes, puis cas particulier des matrices semblables
- Définition d'une trace d'un endomorphisme et propriétés. Cas d'un projecteur.

Conclusion

Objectifs

⇒ Impact d'un changement de bases

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
  4. Théorème du rang
- Exercice n° 540 & 551