

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

4.2. Application

4.3. Itération

4.3. Itération

Définition - Rang d'une application linéaire

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels (de dimensions quelconques) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de rang fini si $\text{Im } u$ est de dimension finie et on appelle alors rang de u la dimension de $\text{Im } u$:

$$\text{rg } u = \dim \text{Im } u$$

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

Rang(s)

⇒ Théorème du rang

Définition - Rang d'une application linéaire

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels (de dimensions quelconques) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de rang fini si $\text{Im } u$ est de dimension finie et on appelle alors rang de u la dimension de $\text{Im } u$:

$$\text{rg } u = \dim \text{Im } u$$

Rappels :

Définition - Rang d'une famille de vecteurs

Soit (x_1, \dots, x_p) une famille finie de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle rang de la famille (x_1, \dots, x_p) la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$:

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$$

- 1. Problèmes
- 2. Bases et dimension
- 3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
- 4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Définition - Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ On appelle rang de A (noté $\text{rg}A$) la dimension de $\text{Im } A$.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Proposition - Isomorphisme canonique (de projection)

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E alors l'application

$$\begin{aligned}\bar{u}: S &\rightarrow \text{Im } u \\ x &\mapsto u(x)\end{aligned}$$

est un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Proposition - Isomorphisme canonique (de projection)

Soient E et F deux \mathbb{K} -e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E alors l'application

$$\begin{aligned}\bar{u}: S &\rightarrow \text{Im } u \\ x &\mapsto u(x)\end{aligned}$$

est un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$

Démonstration

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Théorème - Théorème du rang

Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, F un \mathbb{K} -e.v. (de dimension quelconque) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$$

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Théorème - Théorème du rang

Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, F un \mathbb{K} -e.v. (de dimension quelconque) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$$

Démonstration

- 1. Problèmes
- 2. Bases et dimension
- 3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
- 4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

4.2. Application

4.3. Itération

4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Proposition - Critère de surjection/injection

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ▶ Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg} u \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si u est injective.
- ▶ Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg} u \leq \dim F$ avec égalité si et seulement si u est surjective.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Écriture d'une
application linéaire en
dimension finie

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Proposition - Critère de surjection/injection

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ▶ Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg} u \leq \dim E$ avec égalité si et seulement si u est injective.
- ▶ Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg} u \leq \dim F$ avec égalité si et seulement si u est surjective.

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Écriture d'une
application linéaire en
dimension finie

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.3. Itération

Si E et F sont de dimensions finies on a donc
 $\operatorname{rg} u \leq \min(\dim E, \dim F)$

Théorème - Equivalences des caractères de u (cas dimension finie)

E, F deux K -espaces vectoriels de **dimensions finies égales** ($\dim F = \dim E$). Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence de

- (i) $\operatorname{rg} u = \dim E$
- (ii) u est injective
- (iii) u est surjective
- (iv) u est bijective (donc un isomorphisme)

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.3. Itération

Si E et F sont de dimensions finies on a donc
 $\operatorname{rg} u \leq \min(\dim E, \dim F)$

Théorème - Equivalences des caractères de u (cas dimension finie)

E, F deux K -espaces vectoriels de **dimensions finies égales** ($\dim F = \dim E$). Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence de

- (i) $\operatorname{rg} u = \dim E$
- (ii) u est injective
- (iii) u est surjective
- (iv) u est bijective (donc un isomorphisme)

Démonstration

⇒ Théorème du rang

- 1. Problèmes
- 2. Bases et dimension
- 3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
- 4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

Equivalence des caractéristique en dimension finie

Si E et F sont de dimensions finies on a donc
 $\text{rg } u \leq \min(\dim E, \dim F)$

Théorème - Equivalences des caractères de u (cas dimension finie)

E, F deux K -espaces vectoriels de **dimensions finies égales** ($\dim F = \dim E$). Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a équivalence de

- (i) $\text{rg } u = \dim E$
- (ii) u est injective
- (iii) u est surjective
- (iv) u est bijective (donc un isomorphisme)

Démonstration

Remarque Dans la pratique : u endomorphisme

⇒ Théorème du rang

- 1. Problèmes
- 2. Bases et dimension
- 3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
- 4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Proposition - Conservation du rang

E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies,
 $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

- ▶ si u est un isomorphisme, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg} v$
- ▶ si v est un isomorphisme, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg} u$

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Écriture d'une
application linéaire en
dimension finie

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Proposition - Conservation du rang

E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies,
 $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

- ▶ si u est un isomorphisme, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg} v$
- ▶ si v est un isomorphisme, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg} u$

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Écriture d'une
application linéaire en
dimension finie

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

4.2. Application

4.3. Itération

4.3. Itération

Majoration du rang d'une composition

⇒ Théorème du rang

Majoration de $\text{rg}(v \circ u)$ en toute généralité

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ avec E et F de dimension finies.

Alors $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}u, \text{rg}v)$.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

Majoration du rang d'une composition

⇒ Théorème du rang

Majoration de $\text{rg}(v \circ u)$ en toute généralité

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ avec E et F de dimension finies.

Alors $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}u, \text{rg}v)$.

Démonstration

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Savoir-faire. Exploiter le rang d'endomorphisme restreint ou composé

Pour les inégalités sur les rangs, ou les inclusions $\text{Im } u / \text{Ker } u$ on exploite :

- ▶ la composition (cf. démonstration précédente)
- ▶ la restriction à A , sev de $E : u|_A$.

On a $u|_A : A \rightarrow F$, $x \mapsto u(x)$ linéaire et

$\text{Ker } u|_A = \text{Ker } u \cap A$ et $\text{rg } u|_A = \dim A - \dim \text{Ker } u \cap A$.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Savoir-faire. Exploiter le rang d'endomorphisme restreint ou composé

Pour les inégalités sur les rangs, ou les inclusions $\text{Im } u / \text{Ker } u$ on exploite :

- ▶ la composition (cf. démonstration précédente)
- ▶ la restriction à A , sev de $E : u|_A$.

On a $u|_A : A \rightarrow F$, $x \mapsto u(x)$ linéaire et

$$\text{Ker } u|_A = \text{Ker } u \cap A \text{ et } \text{rg } u|_A = \dim A - \dim \text{Ker } u \cap A.$$

L'exercice suivant est un classique. La fin est importante.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

On obtient ainsi la caractérisation des automorphismes en dimension finie :

Théorème - Cas des endomorphismes

E un \mathbb{K} -espace vectoriel de **dimension finie** n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On a équivalence de

- (i) $\text{rg } u = n$
- (ii) u est injective
- (iii) u est surjective
- (iv) u est bijective (donc un automorphisme, soit $u \in GL(E)$)
- (v) il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = Id_E$ (u admet un inverse à gauche)
- (vi) il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ w = Id_E$ (u admet un inverse à droite)

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture d'une
application linéaire en
dimension finie

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Exercice

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie. On note pour tout $r \in \mathbb{N}$, $I_r = \text{Im } u^r$, $i_r = \dim I_r$, $K_r = \text{Ker } u^r$ et $k_r = \dim K_r$.

1. Montrer que $K_r \subset K_{r+1}$ et $I_{r+1} \subset I_r$. Qu'en déduire pour les suite (i_r) et (k_r) ?
2. Montrer que $K_r = K_{r+1}$ ssi $I_r = I_{r+1}$
3. On note $s = \min\{r \mid K_r = K_{r+1}\}$. Montrer que s existe et que pour tout $r \geq s$, $K_r = K_s$.
Montrer que dans ce cas $E = I_s \oplus K_s$.
4. Montrer que pour tout $r \leq s + 1$, $k_{r+1} - k_r \leq k_r - k_{r-1}$.
On pourra considérer H tel que $K_{r+1} = H \oplus K_r$ et $u|_H : H \rightarrow K_r$ bijective

1. Problèmes

2. Bases et
dimension3. Écriture d'une
application linéaire en
dimension finie4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.3. Itération

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

- ▶ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{rg}(u) + \dim \text{Ker } u = \dim E$.

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

- ▶ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{rg}(u) + \dim \text{Ker } u = \dim E$.
- ▶ Si E ou F est de dimension finie, alors $\text{rg}(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$.
 - $\text{rg } u = \dim E \iff u$ injective
 - $\text{rg } u = \dim F \iff u$ surjective

⇒ Théorème du rang

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération

⇒ Théorème du rang

Objectifs

⇒ Théorème du rang

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
 - 5. Forme linéaire.
- ▶ Exercice n° 540 & 551
- ▶ TD de jeudi :
 - 8h-10h : 536, 539, 549, 545, 546
 - 10h-12h : 538, 541, 543, 552, 547

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
4. Théorème du rang et conséquences
 - 4.1. Théorème du rang
 - 4.2. Application
 - 4.3. Itération