

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

4.4. Formes linéaires et hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

4.4. Formes linéaires et hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Définition - Rang d'une application linéaire

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels (de dimensions quelconques) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de rang fini si $\text{Im } u$ est de dimension finie et on appelle alors rang de u la dimension de $\text{Im } u$:

$$\text{rg } u = \dim \text{Im } u$$

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Rang(s)

Définition - Rang d'une application linéaire

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels (de dimensions quelconques) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de rang fini si $\text{Im } u$ est de dimension finie et on appelle alors rang de u la dimension de $\text{Im } u$:

$$\text{rg } u = \dim \text{Im } u$$

Rappels :

Définition - Rang d'une famille de vecteurs

Soit (x_1, \dots, x_p) une famille finie de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle rang de la famille (x_1, \dots, x_p) la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$:

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$$

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Définition - Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ On appelle rang de A (noté $\text{rg}A$) la dimension de $\text{Im } A$.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Théorème du rang

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Théorème - Théorème du rang

Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie, F un \mathbb{K} -e.v. (de dimension quelconque) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$$

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

4.4. Formes linéaires et hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

On obtient ainsi la caractérisation des automorphismes en dimension finie :

Théorème - Cas des endomorphismes

E un \mathbb{K} -espace vectoriel de **dimension finie** n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On a équivalence de

- (i) $\operatorname{rg} u = n$
- (ii) u est injective
- (iii) u est surjective
- (iv) u est bijective (donc un automorphisme, soit $u \in GL(E)$)
- (v) il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = Id_E$ (u admet un inverse à gauche)
- (vi) il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ w = Id_E$ (u admet un inverse à droite)

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

4. Théorème du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application du théorème du rang : critères de bijection

4.4. Formes linéaires et hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Définition - Forme linéaire coordonnée

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E .

On note e_i^* l'unique forme linéaire sur E vérifiant

$$\forall j \in I, e_i^*(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} .$$

On l'appelle forme linéaire coordonnée d'indice i relative à la base \mathcal{B}

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Base duale

Autre nom :

Proposition - Base duale

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E .

Alors $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i \in I}$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$, appelée base duale de \mathcal{B}

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Base duale

Autre nom :

Proposition - Base duale

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E .

Alors $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{i \in I}$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$, appelée base duale de \mathcal{B}

On aurait pu exploiter les dimensions, mais pédagogiquement, on montre plus :

Démonstration

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Proposition - Noyau de forme linéaire et hyperplan

Soit H un sous-espace vectoriel de E . On a équivalence des propriétés :

- (1) il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$
- (2) il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \text{Ker } \varphi$

Si ces propriétés sont vérifiées on dit que H est un hyperplan (vectoriel) de E .

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Hyperplan et noyau d'une forme linéaire

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Proposition - Noyau de forme linéaire et hyperplan

Soit H un sous-espace vectoriel de E . On a équivalence des propriétés :

- (1) il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$
- (2) il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \text{Ker } \varphi$

Si ces propriétés sont vérifiées on dit que H est un hyperplan (vectoriel) de E .

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

D'après la démonstration.

Corollaire - Choix d'un supplémentaire

Si H est un hyperplan de E et si $a \notin H$, alors $E = H \oplus \text{Vect}(a)$.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

D'après la démonstration.

Corollaire - Choix d'un supplémentaire

Si H est un hyperplan de E et si $a \notin H$, alors $E = H \oplus \text{Vect}(a)$.

Corollaire - Version forme linéaire

Soit $\varphi \in E^*$. Alors pour tout $x \notin \text{Ker } \varphi$, $E = \text{Ker } \varphi \oplus \text{Vect}(x)$.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

D'après la démonstration.

Corollaire - Choix d'un supplémentaire

Si H est un hyperplan de E et si $a \notin H$, alors $E = H \oplus \text{Vect}(a)$.

Corollaire - Version forme linéaire

Soit $\varphi \in E^*$. Alors pour tout $x \notin \text{Ker } \varphi$, $E = \text{Ker } \varphi \oplus \text{Vect}(x)$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Proposition - Proportionnalité des formes linéaires

Deux formes linéaires φ et ψ sont proportionnelles si et seulement elles ont le même noyau, c'est-à-dire que pour $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$,

$$\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid \varphi = \lambda \psi$$

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Proposition - Proportionnalité des formes linéaires

Deux formes linéaires φ et ψ sont proportionnelles si et seulement elles ont le même noyau, c'est-à-dire que pour $\phi, \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$,

$$\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid \varphi = \lambda \psi$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Définition - Equation d'un (hyper)plan

Soient H un hyperplan et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ tels que $H = \text{Ker } \varphi$.
Alors l'équation $\varphi(x) = 0$ s'appelle une équation de H .

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Définition - Equation d'un (hyper)plan

Soient H un hyperplan et $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ tels que $H = \text{Ker } \varphi$.
Alors l'équation $\varphi(x) = 0$ s'appelle une équation de H .

Remarque Infinité d'équations

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Proposition - Cas de la dimension finie

Les hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie n sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

Dans une base (e_1, \dots, e_n) donnée, ce sont les ensembles d'équation

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, (x_1, \dots, x_n) étant les coordonnées de $x \in E$ dans la base (e_1, \dots, e_n) .

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Proposition - Cas de la dimension finie

Les hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie n sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$.

Dans une base (e_1, \dots, e_n) donnée, ce sont les ensembles d'équation

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, (x_1, \dots, x_n) étant les coordonnées de $x \in E$ dans la base (e_1, \dots, e_n) .

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Heuristique. Une équation : un degré perdu

On commence dans un espace vectoriel de dimension n .

A chaque équation, la dimension diminue de une unité.

Les seules exceptions : si une nouvelle équation est une combinaison linéaire des précédentes.

Réciproquement, un sous-espace vectoriel de dimension r dans E de dimension n est le noyau de $n - r$ forme linéaires, ou autrement écrit est obtenu à partir de $n - r$ équations.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Proposition - Réduction des dimensions

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et H_1, \dots, H_m des hyperplans de E . Alors

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^m H_i \right) \geq \dim E - m.$$

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Proposition - Réduction des dimensions

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et H_1, \dots, H_m des hyperplans de E . Alors

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^m H_i \right) \geq \dim E - m.$$

On commence par un lemme

Lemme -

Soit φ une forme linéaire définie sur E et F , un sev de E de dimension finie.

Alors $F \cap \text{Ker } \varphi$ est de dimension finie et

$$p - 1 \leq \dim(F \cap \text{Ker } \varphi) \leq p.$$

Précisément : $\dim(F \cap \text{Ker } \varphi) = p$ ssi $F \subset \text{Ker } \varphi$.

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Proposition - Réduction des dimensions

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et H_1, \dots, H_m des hyperplans de E . Alors

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^m H_i \right) \geq \dim E - m.$$

On commence par un lemme

Lemme -

Soit φ une forme linéaire définie sur E et F , un sev de E de dimension finie.

Alors $F \cap \text{Ker } \varphi$ est de dimension finie et

$$p - 1 \leq \dim(F \cap \text{Ker } \varphi) \leq p.$$

Précisément : $\dim(F \cap \text{Ker } \varphi) = p$ ssi $F \subset \text{Ker } \varphi$.

Démonstrations

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Écriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Proposition - Expression exacte

Soient E de dimension n , F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). Alors il existe m hyperplans H_1, H_2, \dots, H_m de E tels que $F = \bigcap_{i=1}^m H_i$.

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Proposition - Expression exacte

Soient E de dimension n , F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). Alors il existe m hyperplans H_1, H_2, \dots, H_m de E tels que $F = \bigcap_{i=1}^m H_i$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Autre point de vue

Heuristique. Autre approche

On peut exploiter la force brute des espaces vectoriels et être plus efficace dans la démonstration.

Le coût : on perd le côté algorithmique de la démonstration.

En revanche, il est bon d'avoir les deux points de vue. . .

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

**4.4. Formes linéaires et
hyperplans**

Autre point de vue

Heuristique. Autre approche

On peut exploiter la force brute des espaces vectoriels et être plus efficace dans la démonstration.

Le coût : on perd le côté algorithmique de la démonstration.

En revanche, il est bon d'avoir les deux points de vue...

Proposition - Réduction des dimensions

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et H_1, H_2, \dots, H_m des hyperplans de E . Alors

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^m H_i \right) \geq \dim E - m$$

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Autre point de vue

Heuristique. Autre approche

On peut exploiter la force brute des espaces vectoriels et être plus efficace dans la démonstration.

Le coût : on perd le côté algorithmique de la démonstration.

En revanche, il est bon d'avoir les deux points de vue...

Proposition - Réduction des dimensions

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et H_1, H_2, \dots, H_m des hyperplans de E . Alors

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^m H_i \right) \geq \dim E - m$$

Démonstration

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Visions

Corollaire - Interprétation géométrique

Dans \mathbb{R}^2 :

- ▶ les hyperplans vectoriels sont les droites vectorielles
- ▶ l'intersection de deux droites est de dimension ≥ 0
- ▶ le s.e.v. $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, de dimension $0 = 2 - 2$, s'écrit comme intersection de deux droites.

Dans \mathbb{R}^3 :

- ▶ les hyperplans vectoriels sont les plans vectoriels
- ▶ l'intersection de deux plans est de dimension ≥ 1
- ▶ les droites, de dimension $1 = 3 - 2$, s'écrivent comme intersection de deux plans
- ▶ le s.e.v. $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, de dimension $0 = 3 - 3$, s'écrit comme intersection de trois plans.

Dans les deux cas, on retrouve bien les équations usuelles de droites vectorielles dans \mathbb{R}^2 , de plans vectoriels ou de droites vectorielles dans \mathbb{R}^3

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Objectifs

- ⇒ Théorème du rang
- ⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

- ▶ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{rg}(u) + \dim \text{Ker } u = \dim E$.

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

- ▶ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{rg}(u) + \dim \text{Ker } u = \dim E$.
- ▶ Si E ou F est de dimension finie, alors $\text{rg}(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$.
 - $\text{rg } u = \dim E \iff u$ injective
 - $\text{rg } u = \dim F \iff u$ surjective

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

- ▶ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{rg}(u) + \dim \text{Ker } u = \dim E$.
- ▶ Si E ou F est de dimension finie, alors $\text{rg}(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$.
 - $\text{rg } u = \dim E \iff u$ injective
 - $\text{rg } u = \dim F \iff u$ surjective
- ▶ Si $\dim E = \dim F$, alors u bijective $\iff u$ surjective $\iff u$ injective $\iff \text{rg } u = \dim E$

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

- ▶ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{rg}(u) + \dim \text{Ker } u = \dim E$.
- ▶ Si E ou F est de dimension finie, alors $\text{rg}(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$.
 - $\text{rg } u = \dim E \iff u$ injective
 - $\text{rg } u = \dim F \iff u$ surjective
- ▶ Si $\dim E = \dim F$, alors u bijective $\iff u$ surjective $\iff u$ injective $\iff \text{rg } u = \dim E$
- ▶ Si v est un isomorphisme, v conserve le rang (à droite ou à gauche).

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

Objectifs

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
 - 5. Rang (et noyau) d'une matrice
- ▶ Exercice n° 542

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

- ▶ Base de E^* duale de $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, base de E :
famille (e_1^*, \dots, e_n^*) telle que : $\forall i, j \in \mathbb{N}_n, e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
5. Rang (et noyau) d'une matrice
- ▶ Exercice n° 542

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

- ▶ Base de E^* duale de $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, base de E :
famille (e_1^*, \dots, e_n^*) telle que : $\forall i, j \in \mathbb{N}_n, e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.
- ▶ $H = \text{Ker } \varphi$ avec $\varphi \in E^* \iff \exists D$ sev de E de dimension 1 tel
que $E = D \oplus H$.
 φ est l'équation de l'hyperplan H

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de
dimension finie
5. Rang (et noyau) d'une matrice
- ▶ Exercice n° 542

Conclusion

Objectifs

⇒ Théorème du rang

⇒ Hyperplan et noyau de formes linéaires

- ▶ Base de E^* duale de $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, base de E :
famille (e_1^*, \dots, e_n^*) telle que : $\forall i, j \in \mathbb{N}_n, e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.
- ▶ $H = \text{Ker } \varphi$ avec $\varphi \in E^* \iff \exists D$ sev de E de dimension 1 tel que $E = D \oplus H$.
 φ est l'équation de l'hyperplan H
- ▶ Si H_1, \dots, H_p sont des hyperplans de E , alors
$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^p H_i\right) \geq \dim E - p$$

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
5. Rang (et noyau) d'une matrice
- ▶ Exercice n° 542

⇒ Th. du rang

⇒ Hyperplan et
noyau de formes
linéaires

1. Problèmes

2. Bases et
dimension

3. Ecriture matricielle

4. Théorème du rang
et conséquences

4.1. Théorème du rang

4.2. Application

4.4. Formes linéaires et
hyperplans