Leçon 86 - Dénombrement

26 mars 2026

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

Vocabulaire

Dans cette partie, nous appliquons essentiellement le troisième principe (celui du produit, ou de décomposition) pour dénombrer quelques situations fréquentes. On commence par les définir, puis on se concentre sur chacune.

Vocabulaire

Définition - Liste, permutation, combinaison

Soit E un ensemble. On appelle

- p-liste (ou p-uplet) d'éléments de E tout élément de E^p ;
- permutation de E (E fini) toute bijection de E sur E ;
- combinaison à p éléments de E (E fini) toute partie (ensemble) à p éléments de E.

Vocabulaire

Définition - Liste, permutation, combinaison

Soit E un ensemble. On appelle

- p-liste (ou p-uplet) d'éléments de E tout élément de E^p ;
- permutation de E (E fini) toute bijection de E sur E ;
- combinaison à p éléments de E (E fini) toute partie (ensemble) à p éléments de E.

Exemple de 2-listes sans répétition

Vocabulaire

Définition - Liste, permutation, combinaison

Soit E un ensemble. On appelle

- p-liste (ou p-uplet) d'éléments de E tout élément de E^p ;
- permutation de E (E fini) toute bijection de E sur E ;
- combinaison à p éléments de E (E fini) toute partie (ensemble) à p éléments de E.

Exemple de 2-listes sans répétition
Exemple de combinaison à 2 éléments à partir de $\mathbb{N}_4$.

Vocabulaire

Définition - Liste, permutation, combinaison

Soit E un ensemble. On appelle

- p-liste (ou p-uplet) d'éléments de E tout élément de E^p ;
- permutation de E (E fini) toute bijection de E sur E ;
- combinaison à p éléments de E (E fini) toute partie (ensemble) à p éléments de E.

Exemple de 2-listes sans répétition
Exemple de combinaison à 2 éléments à partir de $\mathbb{N}_4$.
Remarque Vocabulaire

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

Dénombrement des p-listes avec répétition

Comme une p-liste (avec répétition possible) est un élément du produit cartésien E^p, on peut affirmer (même si cela est la répétition de 2.4.) :

Dénombrement des p-listes avec répétition

Théorème - nombre de p-liste (répétition possible)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Le nombre de p-listes d'éléments de E est $n \times n \times \cdots \times n = n^p$.
Le nombre de p-listes, élément de $E_1 \times E_2 \times \cdots E_p$ est $\mathrm{Card} E_1 \times \cdots \times \mathrm{Card} E_p$

Dénombrement des p-listes avec répétition

Théorème - nombre de p-liste (répétition possible)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Le nombre de p-listes d'éléments de E est $n \times n \times \cdots \times n = n^p$.
Le nombre de p-listes, élément de $E_1 \times E_2 \times \cdots E_p$ est $\mathrm{Card} E_1 \times \cdots \times \mathrm{Card} E_p$

Exemple Trajets !

Exercices

Exercice

Combien de mots différents de 7 lettres alternant consonnes et voyelles peut-on former

1. si la première lettre est une consonne ?
2. si la première lettre est une voyelle ?

Exercices

Exercice

Combien de mots différents de 7 lettres alternant consonnes et voyelles peut-on former

1. si la première lettre est une consonne ?
2. si la première lettre est une voyelle ?

Exercice

Un piano à queue à 88 touches. De combien de manières différentes peut-on jouer une mélodie de 7 sons consécutifs ?

n^p ou p^n ?

Attention. p^n ou n^p ?

Ce cours est composé de nombreux résultats à connaître.
L'expérience montre que lorsque l'élève n'a pas bien compris les résultats, mais juste appris les formules en temps voulu, il ne les connaît plus plus tard dans l'année, et en particulier au moment du concours.
Autrement dit : *si vous avez un doute sur la formule, REFLECHISSEZ !*

Application : nombre d'applications

Théorème - nombre d'applications

Soient E, F deux ensembles finis avec $\mathrm{Card}E = n, \mathrm{Card}F = p$.
Alors $\mathscr{F}(E,F)$ est fini et $\mathrm{Card}\mathscr{F}(E,F) = (\mathrm{Card}F)^{\mathrm{Card}E} = p^n$.
Et $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\mathrm{Card}\mathscr{P}(E) = 2^{\mathrm{Card}E} = 2^n$.

Application : nombre d'applications

Théorème - nombre d'applications

Soient E, F deux ensembles finis avec $\mathrm{Card}E = n, \mathrm{Card}F = p$.
Alors $\mathscr{F}(E,F)$ est fini et $\mathrm{Card}\mathscr{F}(E,F) = (\mathrm{Card}F)^{\mathrm{Card}E} = p^n$.
Et $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\mathrm{Card}\mathscr{P}(E) = 2^{\mathrm{Card}E} = 2^n$.

Démonstration

Application : nombre d'applications

Théorème - nombre d'applications

Soient E, F deux ensembles finis avec $\mathrm{Card} E = n, \mathrm{Card} F = p$.
Alors $\mathscr{F}(E,F)$ est fini et $\mathrm{Card}\mathscr{F}(E,F) = (\mathrm{Card} F)^{\mathrm{Card} E} = p^n$.
Et $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\mathrm{Card}\mathscr{P}(E) = 2^{\mathrm{Card} E} = 2^n$.

Démonstration

Exercice

Soit E un ensemble de n éléments.

Démontrer que le nombre de sous-ensembles de E est 2^n.

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

Permutation

Analyse Représentation d'une permutation

Permutation

Analyse Représentation d'une permutation

Proposition - Permutation (autre point de vue)

Soit E un ensemble à n éléments.
Toute n-liste (ordonnée) des n éléments distincts de E représente une permutation de E.

Permutation

Analyse Représentation d'une permutation

Proposition - Permutation (autre point de vue)

Soit E un ensemble à n éléments.
Toute n-liste (ordonnée) des n éléments distincts de E représente une permutation de E.

Remarque Mot clés

Permutation

Analyse Représentation d'une permutation

Proposition - Permutation (autre point de vue)

Soit E un ensemble à n éléments.
Toute n-liste (ordonnée) des n éléments distincts de E représente une permutation de E.

Remarque Mot clés
Exemple Permutations de $\{a, b, c, d\}$

Nombre de permutations

Proposition - Nombre de permutations

Soit E un ensemble de n éléments.
Alors le nombre de permutations de E est $n!$.

Nombre de permutations

Proposition - Nombre de permutations

Soit E un ensemble de n éléments.
Alors le nombre de permutations de E est $n!$.

Démonstration

Nombre de permutations

Proposition - Nombre de permutations

Soit E un ensemble de n éléments.
Alors le nombre de permutations de E est $n!$.

Démonstration

Exemple Simple

Nombre de permutations

Proposition - Nombre de permutations

Soit E un ensemble de n éléments.
Alors le nombre de permutations de E est $n!$.

Démonstration

Exemple Simple

<u>Exercice</u>

Combien existe-t-il d'anagrammes du mot “compris" ?

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

Nombre de p-liste sans répétition

Théorème - Nombre de p-liste (sans répétition)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leqslant n, \ 0 \text{ sinon.}$$

Par convention $0! = 1$.

Nombre de p-liste sans répétition

Théorème - Nombre de p-liste (sans répétition)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leqslant n, \ 0 \text{ sinon.}$$

Par convention $0! = 1$.

Démonstration

Nombre de p-liste sans répétition

Théorème - Nombre de p-liste (sans répétition)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leqslant n, 0 \text{ sinon.}$$

Par convention $0! = 1$.

Démonstration

Remarque Explication de la démonstration

Exercice

<u>Exercice</u>

Un piano à queue à 88 touches. De combien de manières différentes peut-on jouer une mélodie de 7 sons consécutifs sans jouer deux fois la même note ?

Exercice

<u>Exercice</u>

Un piano à queue à 88 touches. De combien de manières différentes peut-on jouer une mélodie de 7 sons consécutifs sans jouer deux fois la même note ?

Corollaire - Nombre d'applications injectives

Soient E et F deux ensembles finis, $\mathrm{Card}(E) = p$, $\mathrm{Card}(F) = n$, alors : le nombre d'applications injectives de E dans F est $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$, 0 sinon ;

Exercice

Exercice

Un piano à queue à 88 touches. De combien de manières différentes peut-on jouer une mélodie de 7 sons consécutifs sans jouer deux fois la même note ?

Corollaire - Nombre d'applications injectives

Soient E et F deux ensembles finis, $\mathrm{Card}(E) = p$, $\mathrm{Card}(F) = n$, alors : le nombre d'applications injectives de E dans F est $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$, 0 sinon ;

Démonstration

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

Nombre de combinaison

Théorème - Nombre de combinaison et coefficient binomial

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Pour $p \leqslant n$, on note $\binom{E}{p}$ l'ensemble des parties à p éléments de E. On a

$$\mathrm{Card}\binom{E}{p} = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Ce nombre est appelé nombre de combinaisons de p éléments parmi n et se lit « p parmi n ».

Nombre de combinaison

Théorème - Nombre de combinaison et coefficient binomial

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Pour $p \leqslant n$, on note $\binom{E}{p}$ l'ensemble des parties à p éléments de E. On a

$$\operatorname{Card}\binom{E}{p} = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Ce nombre est appelé nombre de combinaisons de p éléments parmi n et se lit « p parmi n ».

Remarque Autre notation

Nombre de combinaison

Théorème - Nombre de combinaison et coefficient binomial

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Pour $p \leqslant n$, on note $\binom{E}{p}$ l'ensemble des parties à p éléments de E. On a

$$\mathrm{Card}\binom{E}{p} = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Ce nombre est appelé nombre de combinaisons de p éléments parmi n et se lit « p parmi n ».

Remarque Autre notation

Démonstration

Applications

Remarque Ensemble non ordonné

Applications

Remarque Ensemble non ordonné

Exercice

Quel est le nombre de main avec 3 as, si l'on distribue un jeu de 32 cartes ?

Principe de décomposition

Savoir-faire. Dénombrement et principe de décomposition

Il s'agit décrire *exactement* (c'est à dire tous les éléments, sans les compter plusieurs fois) l'ensemble des situations possibles.
On peut écrire : « Une situation . . .est parfaitement définie par :

1. le choix de . . .
   (combien d'éléments de disponible ? combien d'éléments choisis ? Remise ou non ? Liste ou un ensemble ?),
   soit n_1 possibilités
   Puis
2. le choix de . . .. . ., soit n_2 possibilités
   Puis . . .

k. le choix de . . .. . ., soit n_k possibilités

Il y a donc $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ situations possibles. »

Remarque sur le coefficient binomial

<u>Exercice</u>

De combien de manières peut-on choisir parmi 30 personnes une équipe de 6 personnes en fixant parmi elles un capitaine ?

Remarque sur le coefficient binomial

Exercice

De combien de manières peut-on choisir parmi 30 personnes une équipe de 6 personnes en fixant parmi elles un capitaine ?

Savoir-faire. Nature du coefficient binomial

Puisque le coefficient binomial exprime le nombre de quelque chose, il s'agit toujours d'un nombre entier, ainsi les calculs fractionnaires *se simplifieront toujours*.

Il faut donc toujours commencer par simplifier les calculs avant d'effectuer les premières multiplications

Remarque sur le coefficient binomial

<u>Exercice</u>

De combien de manières peut-on choisir parmi 30 personnes une équipe de 6 personnes en fixant parmi elles un capitaine ?

Savoir-faire. Nature du coefficient binomial

Puisque le coefficient binomial exprime le nombre de quelque chose, il s'agit toujours d'un nombre entier, ainsi les calculs fractionnaires *se simplifieront <u>toujours</u>*.
Il faut donc toujours commencer par simplifier les calculs avant d'effectuer les premières multiplications

Exemple Calculer $\binom{9}{5}$

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒Nombre de sous-ensembles à cardinal fixé. Nombre de combinaison

Rappels

Proposition - Propriétés

On a vu : $\binom{n}{0} = 1\,;\ \binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Pour $p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Par convention, si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$ (conforme au triangle de Pascal (sauf en $\binom{0}{0}$))

Rappels

Proposition - Propriétés

On a vu : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Pour $p \leqslant n$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p} + \dbinom{n-1}{p-1}$.

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Par convention, si $p > n$, $\dbinom{n}{p} = 0$ (conforme au triangle de Pascal (sauf en $\binom{0}{0}$))

Remarque - Binôme de Newton

Rappels

Proposition - Propriétés

On a vu : $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Pour $p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Par convention, si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$ (conforme au triangle de Pascal (sauf en $\binom{0}{0}$))

Remarque - Binôme de Newton

Remarque - Nombre de chemins

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison (sous-ensemble à cardinal fixé)

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

- Nombre de permutation de E_n : $n!$

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

- Nombre de permutation de E_n : $n!$
- Nombre de p-liste (avec répétition) à partir de E_n : n^p

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

- Nombre de permutation de E_n : $n!$
- Nombre de p-liste (avec répétition) à partir de E_n : n^p
  On en déduit le nombre d'applications. . .

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

- Nombre de permutation de E_n : $n!$
- Nombre de p-liste (avec répétition) à partir de E_n : n^p
  On en déduit le nombre d'applications...
- Nombre de p-liste sans répétition à partir de E_n : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

- Nombre de permutation de E_n : $n!$
- Nombre de p-liste (avec répétition) à partir de E_n : n^p
  On en déduit le nombre d'applications...
- Nombre de p-liste sans répétition à partir de E_n : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
  On en déduit le nombre d'applications injectives...

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

- Nombre de permutation de E_n : $n!$
- Nombre de p-liste (avec répétition) à partir de E_n : n^p
  On en déduit le nombre d'applications...
- Nombre de p-liste sans répétition à partir de E_n : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
  On en déduit le nombre d'applications injectives...

⇒ Nombre de combinaison (sous-ensemble à cardinal fixé)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

- Nombre de permutation de E_n : $n!$
- Nombre de p-liste (avec répétition) à partir de E_n : n^p
  On en déduit le nombre d'applications...
- Nombre de p-liste sans répétition à partir de E_n : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
  On en déduit le nombre d'applications injectives...

$\Rightarrow$ Nombre de combinaison (sous-ensemble à cardinal fixé)

- Nombre de sous-ensemble (sans répétition !) à partir de E_n est $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison (sous-ensemble à cardinal fixé)

- Nombre de sous-ensemble (sans répétition !) à partir de E_n est $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
  Reprise du cours de début d'année :
  Propriété du coefficient binomial (Newton. . .)

Conclusion

Objectifs

⇒ Nombre de liste (avec ou sans répétition). Nombre de permutation

⇒ Nombre de combinaison (sous-ensemble à cardinal fixé)

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 32 : Dénombrement
  4. Exercices d'applications
- Exercice n° 659, 664 & 675