

⇒ Exercices et
élargissement



Leçon 87 - Dénombrement

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et
combinaisons
4. Exercices
d'applications
 - 4.1. Tableau des
dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

⇒ Exercices et élargissement

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

⇒ Exercices et élargissement

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

⇒ Exercices et élargissement

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

⇒ Exercices et élargissement

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Résumé

⇒ Exercices et
élargissement

Savoir-faire. Questions à se poser

On considère un ensemble E de cardinal n . On effectue alors un tirage de p éléments (avec des hypothèses évolutives)

	Ordre ?	Répétition ?	Nombre de cas	Ex. classique
Nombres de permutations (Arrangement total)	OUI	NON	$n!$	Nbre de bijections
Nbres de p -liste sans répétition (Arrangements simples)	OUI	NON	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	Nbre d'applications injectives
Nombres de p -liste (Arrangements avec répétition)	OUI	OUI	n^p	Nbre d'applications
Nombre de sous ensembles (Combinaisons simples)	NON	NON	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	Pioche d'une poignée

Il faut savoir remplir ce tableau de **façon intuitive** (et non uniquement grâce à la mémoire).

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Exercice d'application

⇒ Exercices et
élargissement

Exercice

On considère une urne de 10 boules, 6 rouges et 4 bleues.

Combien existe-t-il de façons différentes de tirer 4 boules dans l'urne dont au moins deux serait rouges.

1. si le tirage se fait simultanément ?
2. si le tirage se fait une à une et avec remise ?
3. si le tirage se fait une à une et sans remise ?

La méthode est toujours la même. A chaque fois on prendra un paramètre ou **un conditionnement** : on supposera que le nombre de boules bleues tirées vaut k avec k variant de 0 à 2.

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Exercice d'application

⇒ Exercices et
élargissement

Exercice

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

⇒ Exercices et élargissement

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

⇒ Exercices et élargissement

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Analyse Anagramme de mots avec lettres dédoublées

⇒ Exercices et
élargissement

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

4. Exercices
d'applications

4.1. Tableau des
dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

Permutation avec répétitions

Analyse Anagramme de mots avec lettres dédoublées

Savoir-faire. Permutations avec répétition

Le nombre de permutations de n éléments avec k sous groupes tq :

- ▶ le premier sous groupe est composé de n_1 éléments identiques (ou indiscernables)
- ▶ le deuxième sous groupe est composé de n_2 éléments identiques (ou indiscernables)
- ▶ ...,
- ▶ le k^{e} sous groupe est composé de n_k éléments identiques (ou indiscernables)

vérifiant donc $\sum_{i=1}^k n_i = n$,

est égal à :
$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

⇒ Exercices et
élargissement

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

4. Exercices
d'applications

4.1. Tableau des
dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

Coefficient multinomial

⇒ Exercices et
élargissement

Remarque Coefficient multinomial

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

4. Exercices
d'applications

4.1. Tableau des
dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

Coefficient multinomial

⇒ Exercices et
élargissement

Remarque Coefficient multinomial

Remarque Autre expression

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

4. Exercices
d'applications

4.1. Tableau des
dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

Coefficient multinomial

⇒ Exercices et
élargissement

Remarque Coefficient multinomial

Remarque Autre expression

Exemple A écrire

Les $\frac{5!}{2!1!2!} = 30$ permutations des 5 éléments a, a, b, c et c sont :

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

⇒ Exercices et
élargissement

Exercice

Combien existe-t-il d'anagramme du mot "abracadabra" ?

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

4. Exercices
d'applications

4.1. Tableau des
dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

⇒ Exercices et
élargissement

Exercice

Combien existe-t-il d'anagramme du mot "abracadabra" ?

Exercice

Dans un anneau, avec a , b , c et d qui commutent, exprimer

$$(a + b + c + d)^{10}$$

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

⇒ Exercices et élargissement

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et combinaisons

4. Exercices d'applications

4.1. Tableau des dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

⇒ Exercices et
élargissement

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

4. Exercices
d'applications

4.1. Tableau des
dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

Formule de Vandermonde

⇒ Exercices et
élargissement

On commence par une première formule (importante) qui conduit vers une méthode plus générale.

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

4. Exercices
d'applications

4.1. Tableau des
dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

Formule de Vandermonde

⇒ Exercices et
élargissement

On commence par une première formule (importante) qui conduit vers une méthode plus générale.

Analyse - Calcul de deux façons du développement $(1 + X)^{n+m}$.

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

4. Exercices
d'applications

4.1. Tableau des
dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

Formule de Vandermonde

⇒ Exercices et
élargissement

On commence par une première formule (importante) qui conduit vers une méthode plus générale.

Analyse - Calcul de deux façons du développement $(1 + X)^{n+m}$.

Proposition - Formule de Vandermonde

Soient $n, m, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq \min(n, m)$.

Montrer que $\sum_{i=0}^p \binom{n}{i} \binom{m}{p-i} = \binom{n+m}{p}$ (Formule de Vandermonde)

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Formule de Vandermonde

⇒ Exercices et
élargissement

On commence par une première formule (importante) qui conduit vers une méthode plus générale.

Analyse - Calcul de deux façons du développement $(1 + X)^{n+m}$.

Proposition - Formule de Vandermonde

Soient $n, m, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leq \min(n, m)$.

Montrer que $\sum_{i=0}^p \binom{n}{i} \binom{m}{p-i} = \binom{n+m}{p}$ (Formule de Vandermonde)

Exercice Démontrer la formule de Vandermonde avec le principe de décomposition

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Série génératrice. Heuristique

⇒ Exercices et
élargissement

Heuristique. Fonction ou série génératrice

Voici une méthode qui fonctionne particulièrement bien en dénombrement.

On considère un problème de dénombrement, dont l'hypothèse dépend d'une variable entière n .

On note a_n , le dénombrement recherché et on crée la fonction :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Alors, la plupart des hypothèses se transpose en une propriété calculatoire de f .

Puis, on cherche alors la fonction f . Et enfin, il ne reste plus qu'à trouver ses coefficients (identification)

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Série génératrice. Définition

⇒ Exercices et
élargissement

On peut même, sans soucis de convergence, étudier des séries génératrices, sorte de polynôme de degré infini. L'ensemble des séries génératrices contient les polynômes, mais aussi les fractions rationnelles.

Définition - Série génératrice

On considère $u = (u_n)$, une suite à valeurs dans un corps \mathbb{K} .

On lui associe la série génératrice $S(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n X^n$.

On note $\mathbb{K}[[X]]$, l'ensemble des séries génératrices.

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Série génératrice. Définition

⇒ Exercices et
élargissement

On peut même, sans soucis de convergence, étudier des séries génératrices, sorte de polynôme de degré infini. L'ensemble des séries génératrices contient les polynômes, mais aussi les fractions rationnelles.

Définition - Série génératrice

On considère $u = (u_n)$, une suite à valeurs dans un corps \mathbb{K} .

On lui associe la série génératrice $S(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n X^n$.

On note $\mathbb{K}[[X]]$, l'ensemble des séries génératrices.

Remarque Inclusion algébrique

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Série génératrice. Définition

⇒ Exercices et
élargissement

On peut même, sans soucis de convergence, étudier des séries génératrices, sorte de polynôme de degré infini. L'ensemble des séries génératrices contient les polynômes, mais aussi les fractions rationnelles.

Définition - Série génératrice

On considère $u = (u_n)$, une suite à valeurs dans un corps \mathbb{K} .

On lui associe la série génératrice $S(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n X^n$.

On note $\mathbb{K}[[X]]$, l'ensemble des séries génératrices.

Remarque Inclusion algébrique

Exercice Série géométrique

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Règles opératoires

On a les règles opératoires suivantes qui permettent de passer de propriétés sur (u_n) à des propriétés sur S .

⇒ Exercices et
élargissement

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et
combinaisons
4. Exercices
d'applications
 - 4.1. Tableau des
dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices**

Règles opératoires

Proposition - Règles opératoires sur les séries génératrices

On généralise les opérations sur les polynômes aux opérations équivalentes sur les séries.

On a alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$\blacktriangleright S(u + v) = S(u) + S(v)$$

$$\blacktriangleright S(\lambda u) = \lambda S(u)$$

$$\blacktriangleright X^k S(u) = S(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, u) \text{ (règle de décalage)}$$

$$\text{ou } S(u) = (u_0 - u_1 X - \dots - u_{k-1} X^{k-1}) + X^k S((u_{n+k}))$$

$$\blacktriangleright S'(u) = S((nu_n)_{n \geq 1}) = \text{(règle de dérivation)}$$

$$\blacktriangleright S(u) \times S(v) = S\left(\left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}\right)_{n \geq 0}\right) \text{ (règle de produit de Cauchy)}$$

Si $u_0 \neq 0$, on peut même définir l'inverse de $S(u)$... (comme pour des DL)

⇒ Exercices et
élargissement

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

4. Exercices
d'applications

4.1. Tableau des
dénombrlements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

Démonstration

⇒ Exercices et
élargissement

Heuristique - Comme pour les polynômes. . .

On a montré comme pour les polynômes, en exploitant la dérivation formelle, qu'il y a une unique façon d'écrire une série formelle.

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices**

⇒ Exercices et
élargissement1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons4. Exercices
d'applications4.1. Tableau des
dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

Identification

Heuristique - Comme pour les polynômes...

On a montré comme pour les polynômes, en exploitant la dérivation formelle, qu'il y a une unique façon d'écrire une série formelle.

On peut identifier

Proposition - Identification

Si $S(u) = S(v)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$.

Application

⇒ Exercices et
élargissement

Application Suite de Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci vérifiant $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et $F_0 = F_1 = 1$.

On note $F(X) = S(F_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} F_n X^n$.

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et
combinaisons
4. Exercices
d'applications
 - 4.1. Tableau des
dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Dérangement

⇒ Exercices et
élargissement

Définition - Dérangement sur n

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangement de l'ensemble \mathbb{N}_n , une permutation (bijection) de \mathbb{N}_n sans points fixes.

On note D_n le nombre de dérangement de \mathbb{N}_n .

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Dérangement

⇒ Exercices et
élargissement

Définition - Dérangement sur n

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangement de l'ensemble \mathbb{N}_n , une permutation (bijection) de \mathbb{N}_n sans points fixes.

On note D_n le nombre de dérangement de \mathbb{N}_n .

Le but : trouver D_n !

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Dérangement

⇒ Exercices et
élargissement

Définition - Dérangement sur n

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangement de l'ensemble \mathbb{N}_n , une permutation (bijection) de \mathbb{N}_n sans points fixes.

On note D_n le nombre de dérangement de \mathbb{N}_n .

Le but : trouver D_n !

Proposition - Relation (inversée)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$ avec la convention que $D_0 = 1$.

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Dérangement

⇒ Exercices et
élargissement

Définition - Dérangement sur n

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangement de l'ensemble \mathbb{N}_n , une permutation (bijection) de \mathbb{N}_n sans points fixes.

On note D_n le nombre de dérangement de \mathbb{N}_n .

Le but : trouver D_n !

Proposition - Relation (inversée)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$ avec la convention que $D_0 = 1$.

Démonstration

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Stratégie : inversion !

⇒ Exercices et
élargissement

Cela ne répond pas à la question. . .

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

4. Exercices
d'applications

4.1. Tableau des
dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

Stratégie : inversion !

Cela ne répond pas à la question. . .

Analyse Stratégie !

⇒ Exercices et
élargissement

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles

2. Ensembles finis

3. Listes et
combinaisons

4. Exercices
d'applications

4.1. Tableau des
dénombrements classiques

4.2. Coefficient multinomial

4.3. Séries génératrices

Stratégie : inversion !

⇒ Exercices et
élargissement

Cela ne répond pas à la question. . .

Analyse Stratégie !

Exercice

Quelle est la limite du taux moyen de dérangement $\frac{D_n}{n!}$?

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et
combinaisons
4. Exercices
d'applications
 - 4.1. Tableau des
dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

⇒ Exercices et
élargissement

Exercice Déterminer, avec les séries génératrices,

$$\text{Card}\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3 \mid n_1 + n_2 + n_3 = 8\}.$$

On pourra noter $u_k = \text{Card}\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3 \mid n_1 + n_2 + n_3 = k\}$,

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et
combinaisons
4. Exercices
d'applications
 - 4.1. Tableau des
dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Application au p -partage

Définition - p -partage de n

On appelle p -partage de n , un p -uplet d'entier naturel (n_1, n_2, \dots, n_p) tel que $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$.

On note $E_p(n) = \text{Card}\{(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^p n_i = n\}$.

⇒ Exercices et
élargissement

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Application au p -partage

⇒ Exercices et
élargissement

Définition - p -partage de n

On appelle p -partage de n , un p -uplet d'entier naturel (n_1, n_2, \dots, n_p) tel que $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$.

On note $E_p(n) = \text{Card}\{(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^p n_i = n\}$.

Exemple 3-partage de 5.

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Application au p -partage

⇒ Exercices et
élargissement

Définition - p -partage de n

On appelle p -partage de n , un p -uplet d'entier naturel (n_1, n_2, \dots, n_p) tel que $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$.

On note $E_p(n) = \text{Card}\{(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^p n_i = n\}$.

Exemple 3-partage de 5.

Proposition - Dénombrement des p -partage de n

Le nombre de p partage de n est $E_p(n) = \binom{p+n-1}{n}$

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Application au p -partage⇒ Exercices et
élargissementDéfinition - p -partage de n

On appelle p -partage de n , un p -uplet d'entier naturel (n_1, n_2, \dots, n_p) tel que $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$.

On note $E_p(n) = \text{Card}\{(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^p n_i = n\}$.

Exemple 3-partage de 5.

Proposition - Dénombrement des p -partage de n

Le nombre de p partage de n est $E_p(n) = \binom{p+n-1}{n}$

Exemple 3-partage de 5.

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Application au p -partage⇒ Exercices et
élargissementDéfinition - p -partage de n

On appelle p -partage de n , un p -uplet d'entier naturel (n_1, n_2, \dots, n_p) tel que $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$.

On note $E_p(n) = \text{Card}\{(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^p n_i = n\}$.

Exemple 3-partage de 5.

Proposition - Dénombrement des p -partage de n

Le nombre de p partage de n est $E_p(n) = \binom{p+n-1}{n}$

Exemple 3-partage de 5.

Démonstration

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Conclusion

Objectifs

⇒ Exercices et élargissement

⇒ Exercices et
élargissement

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et
combinaisons
4. Exercices
d'applications
 - 4.1. Tableau des
dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Conclusion

⇒ Exercices et
élargissement

Objectifs

⇒ Exercices et élargissement

- ▶ Formule de Vandermonde (HP)

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Conclusion

⇒ Exercices et
élargissement

Objectifs

⇒ Exercices et élargissement

- ▶ Formule de Vandermonde (HP)
- ▶ Coefficient multinomial (HP)

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Conclusion

⇒ Exercices et
élargissement

Objectifs

⇒ Exercices et élargissement

- ▶ Formule de Vandermonde (HP)
- ▶ Coefficient multinomial (HP)
- ▶ Série génératrice (HP1)

1. Problème. Expérience, modélisation et ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et combinaisons
4. Exercices d'applications
 - 4.1. Tableau des dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices

Conclusion

⇒ Exercices et
élargissement

Objectifs

⇒ Exercices et élargissement

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 32 : Groupes symétriques
- ▶ Exercice n° 678 & 679

1. Problème.
Expérience,
modélisation et
ensembles
2. Ensembles finis
3. Listes et
combinaisons
4. Exercices
d'applications
 - 4.1. Tableau des
dénombrements classiques
 - 4.2. Coefficient multinomial
 - 4.3. Séries génératrices