CPGE MPSI Le 29.04.17
2016-2017

Devoir Surveillé n°9
CORRECTION

Exercice

A. Première critère nécessaire. Premier exemple.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = \dfrac{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n \times u_{n+1}}{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n} = u_{n+1}$ ($P_n \neq 0$).
   Si (P_n) converge, notons ℓ sa limite (non nulle !), alors $\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)$ converge également vers $\frac{\ell}{\ell} = 1$. Donc
   $$\boxed{\text{il est nécessaire que la suite } (u_n) \text{ converge vers } 1}$$
   . /1

   Vu dans des copies...
   « $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = \dfrac{\prod_{p=1}^{n+1} u_p}{\prod_{p=1}^{n} u_p} = u_{n+1}$.
   Si (u_n) converge vers 1, alors $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} \leqslant 1 \Rightarrow (P_n)$ converge vers une limite finie non nulle.
   Et donc $\prod_{n \geqslant 0} u_n$ converge »
   « On a $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = u_{n+1}$, donc si (u_n) converge vers 1, alors $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ également.
   Donc $P_{n+1} \sim P_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, donc $\lim(P_{n+1} - P_n) = 0$ ainsi $P_n \to \ell$.
   Donc si (u_n) converge vers 1, $\prod_{n \geqslant 0} u_n$ converge »

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = \displaystyle\prod_{p=1}^{n+1}\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \times \prod_{p=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{n+2}{n+1} P_n$ (/1).
   Donc $\dfrac{P_{n+1}}{n+2} = \dfrac{P_n}{n+1}$, et donc la suite $\left(\frac{P_n}{n+1}\right)$ est constante.
   Cette constante vaut $\dfrac{P_1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$, on a donc /1
   $$\boxed{\forall\, n \geqslant 1,\ P_n = n+1}$$
   Ainsi le produit infini (P_n) est divergent.
   On a ici l'exemple d'un produit infini divergent alors que le terme général tend vers 1.
   A la question précédente, nous avions démontré qu'il s'agissait d'une condition nécessaire /1
   $$\boxed{\text{et donc ici d'une condition non suffisante.}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
   $$r_{n+1} = P_{n+1} \times \sin\frac{a}{2^{n+1}} = \left(\prod_{p=1}^{n} \cos\frac{a}{2^p}\right) \times \cos\frac{a}{2^{n+1}} \sin\frac{a}{2^{n+1}}$$
   Or $\cos A \sin A = \frac{1}{2}\sin(2A)$; donc
   $$r_{n+1} = P_n \times \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2a}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}P_n \times \sin\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2}r_n$$
   /2
   $$\boxed{\text{Donc la suite } (r_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}}$$
   Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} r_1$.
   Or $r_1 = P_1 \sin\frac{a}{2} = \cos\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2}$.
   Et donc pour tout $n \geqslant 1$, $P_n = \dfrac{\frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{\sin a}{2}}{\sin\frac{a}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sin a}{2^n \frac{a}{2^n}}$. /2
   Donc
   $$\boxed{\text{le produit infini } (P_n) \text{ converge et } \prod_{n=1}^{+\infty} \cos\frac{a}{2^n} = \frac{\sin a}{a}.}$$

Vu dans des copies...

« (...) $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = \cos(\frac{a}{2^{n+1}}) \times \sin(\frac{a}{2^{n+1}}) \times \dfrac{1}{\sin(\frac{a}{2^n})}$.
Or $\frac{a}{2^n} \to 0$ donc $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} \sim 1 \times \dfrac{a}{2^{n+1}} \times \dfrac{2^n}{a} = \dfrac{1}{2}$.
Donc (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ »

B. Utilisation des séries pour étudier le comportement des produits

1. Soit (u_n) une suite qui converge vers 1 et (p_n) le produit associé à cette suite (u_n).
   (a) On a donc : $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N(\epsilon),\ |u_n - 1| < \epsilon$.
   Et donc avec $\epsilon = 1$, on a :
   $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n_0,\ |u_n - 1| < 1 \Rightarrow -1 < u_n - 1 < 1 \Rightarrow 0 < u_n < 2$.
   Donc
   $$\boxed{\text{il existe un entier } n_0 \text{ tel que : } \forall\, n \geqslant n_0,\ u_n > 0}$$
   /0,5

   (b) On a pour $n \geqslant n_0$: $\prod\limits_{k=0}^{n} u_k = \prod\limits_{k=0}^{n_0-1} u_k \times \prod\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.
   Notons $\overline{P} = \prod\limits_{k=0}^{n_0-1} u_k$, on a donc pour tout $n \geqslant n_0$: $\prod\limits_{k=n}^{n} u_k = P \times \prod\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.
   Par conséquent :
   $$\boxed{\text{les produits infinis } \textstyle\prod_{k=n_0}^{n} u_k \text{ et } \prod_{k=0}^{n} u_k \text{ sont de même nature.}}$$
   /0,5

2. On suppose maintenant que (v_n) est une suite de réels strictement positifs.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\ln\left(\prod_{n=0}^{n_0} v_n\right) = \sum_{n=0}^{n_0} \ln(v_n)$$
   Ces deux *suites* ont le même comportement, ce qui implique exactement que :
   $\left(\ln\left(\prod\limits_{k=0}^{n} v_k\right)\right)_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(v_n)$ converge.
   Enfin, puisque la fonction ln (ou exp, selon le point de vue) est continue , on a donc : /2
   $$\boxed{\text{le produit } \prod_{n\geqslant 0} v_n \text{ converge si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant 0} \ln(v_n) \text{ converge}}$$
   On a alors en passant à la limite dans la première relation : $\ln\left(\prod\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(v_n)$.
   Finalement (composition avec exp) :
   $$\boxed{\prod_{n=0}^{+\infty} v_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(v_n)\right)}$$

   Vu dans des copies...

   « On a $\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_n) = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \cdots + \ln(u_n) + \cdots = \ln(u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n \times \ldots) = \ln(\prod_{n\geqslant 0} u_n)$.
   Si $\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_n)$ converge alors $\ln(\prod_{n\geqslant 0} u_n)$ converge(...) »

   (b) D'après la question précédente :
   Le produit $\prod\limits_{n\geqslant 0} (1 + w_n)$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(1 + w_n)$ converge.
   Or nécessairement $(1 + w_n)$ tend vers 1, donc (u_n) vers 0 et donc $\ln(1 + w_n) \sim w_n$.
   Par ailleurs il s'agit de séries à termes positifs.
   donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(1 + w_n)$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge . /2
   Ainsi :
   $$\boxed{\text{le produit } \prod_{n\geqslant 0} (1 + w_n) \text{ converge si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant 0} w_n \text{ converge.}}$$

(c) On a le même raisonnement que précédemment mais avec des séries à termes négatifs. Prenons l'opposé du produit pour le rendre positif...

Le produit $\prod\limits_{n\geqslant 0}(1-w_n)$ converge si et seulement si le produit $\prod\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{1-w_n}\right)$ converge.

Le produit $\prod\limits_{n\geqslant 0}(1-w_n)$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\ln\frac{1}{1-w_n}\right)$ converge.

Or (w_n) converge vers 0 et donc $\ln\frac{1}{1-w_n} = -\ln(1-w_n) \sim w_n$.

Par ailleurs il s'agit de séries à termes positifs(/1).

donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}\ln\frac{1}{1-w_n}$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge.

Ainsi par série d'équivalences : *$/2$*

$$\boxed{\text{le produit } \prod_{n\geqslant 0}(1-w_n) \text{ converge si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant 0} w_n \text{ converge.}}$$

3. Déterminer la nature des produits infinis suivants :

(a) La série $\sum\frac{1}{4n^2}$ converge (série de Riemann) donc d'après le critère (c) ($\frac{1}{4n^2}\in]0,1[$) :

$$\boxed{\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\text{ converge}}$$

$/1$

Vu dans des copies...

« Soit $u_n=\dfrac{1}{4n^2}$, alors $u_n\sim_n \dfrac{1}{n^2}$.
Or d'après le critère de Riemann, la série $\sum\frac{1}{n^2}$ converge donc on peut en déduire que $\sum u_n$ converge également (séries à termes positifs). »

(b) $\ln(e^{1/n^\alpha}) = \frac{1}{n^\alpha} > 0$(/1), donc d'après le critère (a) : *$/1$*

$$\boxed{\prod_{n\geqslant 1}\left(e^{1/n^\alpha}\right)\text{ converge ssi } \alpha>1 \text{ (Riemann),}}$$

et de même d'après le critère (b), *$/1$*

$$\boxed{\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\text{ converge ssi } \alpha>1}$$

(c) $\ln(\sqrt[n]{n}) = \dfrac{\ln n}{n}$ et $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

Or ces séries sont à termes positifs et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge, alors $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n}$ diverge.

Par conséquent d'après (a) : *$/1{,}5$*

$$\boxed{\text{le produit } \prod_{n\geqslant 1}\sqrt[n]{n}\text{ diverge.}}$$

Vu dans des copies...

« si $u_n=n^{1/n}$, alors $\ln u_n = \dfrac{lnn}{n}$.
De plus $\dfrac{lnn}{n}\times\sqrt{n} = \dfrac{lnn}{n^{3/2}} \to 0$, donc $\dfrac{lnn}{n} = o(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$. Or d'après le critère de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
Ce sont des séries à termes positifs, elles ont le même comportement, donc $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln n}{n} = \sum_{n\geqslant 1}\ln(u_n)$ diverge.
Cela impose la divergence du produit d'après la question B.2.a) »

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \geqslant \mathbb{N}$, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-x/n} > 0$.

Par ailleurs, $\ln\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-x/n}\right) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) + \ln(e^{-x/n}) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-x^2}{2n^2}$.

Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{-x^2}{2n^2}$ converge (c'est l'opposé d'une série de Riemann). Donc /1,5

$$\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{x}{n}\right)e^{-x/n} \text{ est convergent pour } x \in]0,+\infty[}$$

Vu dans des copies...

« si $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)e^{-x/n}$ alors $\ln(u_n) = \ln(1+\dfrac{x}{n}) - \dfrac{x}{n}$.
Or $\ln(1+\dfrac{x}{n}) - \dfrac{x}{n} \sim \dfrac{x}{n} - \dfrac{x}{n} \sim 0$
Donc $\sum_{n\geqslant 1}\ln(u_n)$ diverge. Cela impose la divergence du produit d'après la question B.2.a) »

C. Un peu d'histoire.

1. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ converge ssi le produit infini $\prod_{n\geqslant 1}(1+\frac{1}{n})$ converge.

   Or $\prod\limits_{n=1}^{N}(1+\frac{1}{n}) = \prod\limits_{n=1}^{N}\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{\prod\limits_{n=1}^{N} n+1}{\prod\limits_{n=1}^{N} n} = \dfrac{(N+1)!}{N!} = N+1.$ /1,5

$$\boxed{\text{Le produit est donc divergent, il en est de même de la série harmonique } \textstyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}.}$$

Vu dans des copies...

« $\varphi_1(x) = \frac{1}{x} - (\ln(x) - \ln(x+1))$ et $\varphi_2(x) = \frac{1}{x} - (\ln(x-1) - \ln(x))$ (...) »

2. Il s'agit de la somme d'une série géométrique de raison $\frac{1}{p} < 1$; elle est convergente. Et /1

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{p^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}}$$

3. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{p_n}$ a le même comportement que le produit $\prod\limits_{n\geqslant 1}\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right)$
   d'après le critère de convergence B.2.(c). car $\frac{1}{p_n} \in]0,1[$
   Pour étudier la convergence du produit, nous allons étudier l'inverse du produit.

$$\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)} = \prod_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right) = \prod_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(p_n)^k}\right) = S_N$$

   où S_N est la somme des inverses de tous les entiers divisibles par les puissances des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots p_N$.
   En particulier, tous les nombres entiers de 1 à p_N sont divisible par des puissances des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots p_N$. Donc $S_N \geqslant \sum\limits_{n=1}^{p_N}\dfrac{1}{n}$.
   Or la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge donc $(S_N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Ainsi les produits $\prod\limits_{n=1}^{N}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right)$ et $\prod\limits_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ sont divergents. Et donc /2,5

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{p_n} \text{ diverge}}$$

Problème (Mines PSI - 2010)

I. Formule de condensation.

1. D'après la formule de développement par rapport à la i-ème ligne du déterminant, on a

$$\det(M) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}M_{i,k}M^{i\wedge k}$$

où $\gamma_{i,k}$ est un cofacteur et vaut donc $M^{i\wedge k} = \det[M]_i^k$. On a ainsi 1 /

$$\boxed{(-1)^{i+1}\det(M) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}M_{i,k}\det[M]_i^k}$$

2. Considérons la matrice M' obtenue à partir de M en remplaçant la ligne i par la ligne j. Comme $j \neq i$, cette matrice est non inversible : $L_i(M') = L_j(M')$, donc M' a deux lignes égales.
Et donc le déterminant de M' est nul. En outre, $\forall k,\ [M']_i^k = [M]_i^k$ (puisque l'on supprime l'unique ligne qui diffère). La formule de la question précédente donne alors /2

$$\boxed{\det(M') = 0 = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}M'_{i,k}\det[M']_i^k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}M_{j,k}\det[M]_i^k}$$

3. On a

$$\forall i,j,\ (M\times com(M)^T)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}M_{i,k}(com(M))_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}M_{i,k}\det[M]_j^k$$

La question 1 montre que ce coefficient vaut $\det(M)$ si $i=j$
et la question 2 montre qu'il est nul si $j \neq k$. On a ainsi /2

$$\boxed{M\times com(M)^T = \det(M)I_n}$$

4. Pour le calcul de $\det(M^*)$, plusieurs méthode :
— On peut développer par rapport à la première ligne, on trouve alors les deux termes $\det[M]_1^1$ et $\det[M]_1^n$ chacun multiplié par des matrices par blocs donc dont le déterminant est relativement simple à calculer ;
— On peut opérer un développement par rapport à la seconde colonne et on recommence avec le nouveau déterminant etc (il faudrait faire une récurrence). On a alors

$$\det(M^*) = \begin{vmatrix} \det[M]_1^1 & (-1)^{n+1}\det[M]_n^1 \\ (-1)^{n+1}\det[M]_1^n & \det[M]_n^n \end{vmatrix}$$

— Ou encore, dans une idée comparable, on applique la formule directement :

$$\det M^* = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}[M^*]_{\sigma(i)}^i$$

Or pour $i\in\{2,3,\dots n-1\}$, $[M^*]_{\sigma(i)}^i = 0$ dès que $\sigma(i)\neq i$ et $[M^*]_{\sigma(i)}^i = 1$ si $\sigma(i) = i$. Donc, les seuls permutations σ qui n'annule pas nécessairement le produit sont celles qui vérifient $\sigma(i) = i$ si $i\in\{2,3,\dots n-1\}$, il s'agit donc de $\sigma_1 = \mathrm{id}$ et $\sigma_2 = (1,n)$ /2

$$\det M^* = \epsilon(\mathrm{id})\det[M]_1^1\det[M]_n^n + \epsilon((1,n))\det[M]_n^1\det[M]_1^n$$

$$\boxed{\det(M^*) = \det[M]_1^1\det[M]_n^n - \det[M]_1^n\det[M]_n^1}$$

5. Le calcul donne

$$M\times M^* = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}M_{1,k}\det[M]_1^k & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}M_{1,k}\det[M]_n^k \\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}M_{2,k}\det[M]_1^k & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}M_{2,k}\det[M]_n^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}M_{n-1,k}\det[M]_1^k & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}M_{n-1,k}\det[M]_n^k \\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}M_{n,k}\det[M]_1^k & m_{n,2} & \dots & m_{n,n-1} & \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}M_{n,k}\det[M]_n^k \end{pmatrix}$$

Avec les questions 1 et 2, ceci se simplifie en

$$\boxed{M^*M = \begin{pmatrix} \det(M) & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & 0 \\ 0 & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & m_{n,2} & \dots & m_{n,n-1} & \det(M) \end{pmatrix}}$$ /1

6. On calcule $\det(MM^*)$ en développant par rapport à la dernière colonne puis par rapport à la première (ou bien deux fois par blocs). Ceci donne

$$\det(MM^*) = \det(M)^2 \det[M]_{1,n}^{1,n}$$

Comme $\det(M)\det(M^*) = \det(MM^*)$, on peut simplifier par $\det(M) \neq 0$ (M est inversible) dans la formule précédente et, avec la question 4, on obtient /2

$$\boxed{\det[M]_1^1 \det[M]_n^n - \det[M]_1^n \det[M]_n^1 = \det(M)\det[M]_{1,n}^{1,n}}$$

7. Si M n'est pas inversible, on considère $M_x = M - xI_n$.
   $\det(M_x)$ est un polynôme en x de degré n, il admet au plus n racines dans $\mathbb{R}$.
   On note S_M, l'ensemble des racines de $\det(M_x)$.
   Ainsi $0 \in S_M$, car M n'est pas inversible et S_M est fini.
   Pour tout $x \notin S_M$, M_x est inversible donc on peut appliquer la formule (1) à M_x :

$$\det[M_x]_1^1 \det[M_x]_n^n - \det[M_x]_1^n \det[M_x]_n^1 = \det(M_x)\det[M_x]_{1,n}^{1,n}$$

   Il s'agit d'une égalité de fonction polynomiale sur un ensemble infini : $\mathbb{R} \setminus S_x$.
   L'égalité est donc plus générale est reste vraie polynomialement.
   Cela signifie qu'il y a égalité des constants ($x = 0$) et on trouve donc /3

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } M,\ \det[M]_1^1 \det[M]_n^n - \det[M]_1^n \det[M]_n^1 = \det(M)\det[M]_{1,n}^{1,n}}$$

II. Algorithme de Lewis Carroll.

1. On a

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} -8 \end{pmatrix}$$

/2

$$\boxed{\text{Le déterminant de la matrice vaut donc } -8.}$$

2. Le calcul des $B^{(k)}$ est immédiat (on déduit cette matrice de $A^{(k-1)}$).
   Le calcul de chaque coefficient de $A^{(k)}$ entraîne le calcul d'un déterminant.
   Cette matrice a $(n-k)^2$ coefficients. Le calcul de $A^{(n-1)}$ implique donc le calcul d'un nombre de déterminants de taille 2 égal à /2

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}$$

3. La question est un peu ambigüe : un même déterminant de taille deux peut intervenir le calcul de deux cofacteurs différents et l'énoncé ne dit pas s'il faut alors le compter une fois ou plusieurs fois (et donc si on a le droit, ou pas, de stocker les déterminants de taille deux que l'on calcule au fur et à mesure).
   De manière naïve (sans stockage), on a (puisqu'il y a n cofacteurs de taille $n-1$)

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ v_n = n v_{n-1}}$$

Et ainsi, par telescopage :

$$\frac{v_n}{v_2} = \prod_{k=3}^{n} \frac{v_k}{v_{k+1}} = \prod_{k=3}^{n} k = \frac{n!}{2}$$

et ainsi $v_n = \frac{n!}{2}$ car $v_2 = 1$). /2

$$\boxed{\text{Dans ce cas, } u_n = o(v_n) \text{ (rappelons que } u_n \sim \frac{n^3}{3} \text{ et } v_n = \frac{1}{2}n!)}$$

4. D'après la formule de condensation appliquée, on a

$$M_{r+1,s+1}\begin{vmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} & M_{r,s+2} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \\ M_{r+2,s+1} & M_{r+2,s+2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} \\ M_{r+2,s} & M_{r+2,s+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} M_{r,s+1} & M_{r,s+2} \\ M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \end{vmatrix}$$

En revenant aux définitions de $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ ceci s'écrit /2

$$\boxed{A^{(2)}_{r,s} = \begin{vmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} & M_{r,s+2} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \end{vmatrix}}$$

5. Pour $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n$ et $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n$, notons $\{M\}^{j_1,j_2,\ldots,j_r}_{i_1,i_2,\ldots,i_r}$ la matrice de taille r obtenue à partir de M en ne sélectionnant que les éléments de M sur les lignes i_k et les colonnes j_k.
On démontre par récurrence forte les propositions (pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$) :

$$\mathscr{P}_k : \ll\ \forall r, s \in \{1, \ldots, n-k\},\ A^{(k)}_{r,s} = \det(\{M\}^{s,s+1,\ldots,s+k}_{r,r+1,\ldots,r+k})\ \gg$$

— Le résultat est vrai au rang 1 par définition de $A^{(1)}$. Donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
(On vient également (question précédente) de le prouver au rang 2.)
— Soit $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ tel que la propriété soit vrai jusqu'au rang $k-1$.
En appliquant la formule de condensation à la matrice $\{M\}^{s,s+1,\ldots,s+k}_{r,r+1,\ldots,r+k}$, on obtient

$$\det(\{M\}^{s,s+1,\ldots,s+k}_{r,r+1,\ldots,r+k}))\det(\{M\}^{s+1,\ldots,s+k-1}_{r+1,\ldots,r+k-1}) = \det(\{M\}^{s+1,\ldots,s+k}_{r+1,\ldots,r+k})\det(\{M\}^{s,s+1,\ldots,s+k-1}_{r,r+1,\ldots,r+k-1})$$

$$-\det(\{M\}^{s+1,\ldots,s+k}_{r,r+1,\ldots,r+k-1})\det(\{M\}^{s,s+1,\ldots,s+k-1}_{r+1,\ldots,r+k})$$

Avec l'hypothèse de récurrence et la définition de $A^{(k)}$ et $B^{(k)}$, on obtient le résultat au rang k.

On a donc démontré /2,5

$$\boxed{\forall\, k \in \{1, \ldots n-1\}, \forall\, r, s \in \{1, \ldots, n-k\},\ A^{(k)}_{r,s} = \det(\{M\}^{s,s+1,\ldots,s+k}_{r,r+1,\ldots,r+k})}$$

Le résultat au rang $n-1$ donne alors exactement /0,5

$$\boxed{A^{(n-1)}_{1,1} = \det(M)}$$

III. Le λ-déterminant.

1. Montrons le résultat par récurrence sur la taille de la matrice M :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{Q}_n : \ll\ \forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det{}_\lambda(M_{t,j}) = t\det{}_\lambda(M)\ \gg$$

— Le résultat est vrai aux rangs 1 et 2 (vérification immédiate).
— Supposons que $\mathcal{Q}_{n-1}$ est vrai ($n \geqslant 2$).
Soit M une matrice de taille n, on veut écrire

$$\det{}_\lambda(M_{t,j})\det{}_\lambda[M_{t,j}]^{1,n}_{1,n} = \det{}_\lambda[M_{t,j}]^1_1\det{}_\lambda[M_{t,j}]^n_n + \lambda\det{}_\lambda[M_{t,j}]^1_n\det{}_\lambda[M_{t,j}]^n_1$$

• Si $j \notin \{1, n\}$, on a $[M_{t,j}]^{1,n}_{1,n} = ([M]^{1,n}_{1,n})_{t,j-1}$:
multiplier la colonne j par t puis enlever les lignes et colonnes 1 et n revient à d'abord enlever les lignes et colonnes puis à multiplier la colonne $j-1$ -les colonnes ont changé

de numéro- par t.
Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$\det{}_\lambda[M_{t,j}]_{1,n}^{1,n} = t \det{}_\lambda[M]_{1,n}^{1,n}$$

On procède de même avec les λ-déterminants du membre de droite (il y a décalage d'indice de colonne si on enlève la colonne n mais on a vu que cela n'a pas d'incidence sur le calcul) et on divise par $t \neq 0$ pour obtenir le résultat.
• Si $j = n$ ou $j = 1$ alors $\det{}_\lambda[M_{t,n}]_{1,n}^{1,n} = \det{}_\lambda[M]_{1,n}^{1,n}$. On adapte alors le raisonnement (plus simple car il n'y a pas à diviser par t) pour obtenir encore la formule.

$$\boxed{\text{On a donc démontré que } \det{}_\lambda(M_{t,j}) = t \det{}_\lambda(M)}$$

2. On montre par récurrence sur n que (les x_i vérifiant les hypothèses de l'énoncé) */2*

$$\det{}_\lambda V(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j + \lambda x_i)$$

— C'est vrai au rang 2 ($\det{}_\lambda V(x_1,x_2) = x_2 + \lambda x_1$) et au rang 3 puisqu'un calcul donne

$$x_2 \det{}_\lambda V(x_1,x_2,x_3) = x_2(x_2+\lambda x_1)(x_3+\lambda x_1)(x_3+\lambda x_2)$$

et que l'on peut diviser par $x_2 \neq 0$. */1*

— Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n-1 \geqslant 3$. On a

$$[V(x_1,\ldots,x_n)]_{1,n}^{1,n} = \Phi(V(x_2,\ldots,x_{n-1}))$$

où $\Phi(M)$ s'obtient à partir de M en multipliant la colonne j par x_{j+1} pour $j = 1,\ldots,n-2$. D'après la question précédente itérée, on a

$$\det{}_\lambda \Phi(M) = x_2 \ldots x_{n-1} \det(M)$$

L'hypothèse de récurrence donne alors

$$\det{}_\lambda[V(x_1,\ldots,x_n)]_{1,n}^{1,n} = x_2\ldots x_{n-1} \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n-1} (x_j+\lambda x_i)$$

De façon similaire, on a

$$\det{}_\lambda[V(x_1,\ldots,x_n)]_1^1 = x_2\ldots x_n \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n} (x_j+\lambda x_i)$$

$$\det{}_\lambda[V(x_1,\ldots,x_n)]_n^n = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} (x_j+\lambda x_i)$$

$$\det{}_\lambda[V(x_1,\ldots,x_n)]_1^n = x_1\ldots x_{n-1} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} (x_j+\lambda x_i)$$

$$\det{}_\lambda[V(x_1,\ldots,x_n)]_n^1 = \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n} (x_j+\lambda x_i)$$

En remplaçant dans la "définition" de $\det{}_\lambda V(x_1,\ldots,x_n)$, on obtient la bonne formule. */2*
Ainsi

$$\boxed{\det{}_\lambda V(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j+\lambda x_i)}$$

Remarques !

On voit sur l'exemple du calcul de Vandermonde que $\det = \det_{-1}$ *puisqu'on retrouve la formule classique de Vandermonde pour* $\lambda = -1$.
En fait, ce (-1) *est le nombre qu'on retrouve pour l'alternance des colonnes.*