Leçon 89 - Groupe symétrique

1er avril 2026

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Transpositions quelconques

On commence par une proposition :

Proposition - Décomposition

Un p-cycle est un produit (i.e. une composée) de $p-1$ transpositions :

$$(a_1 a_2 \dots a_p) = (a_1 a_2)(a_2 a_3)\dots(a_{p-1} a_p)$$

Transpositions quelconques

On commence par une proposition :

Proposition - Décomposition

Un p-cycle est un produit (i.e. une composée) de $p-1$ transpositions :

$$(a_1 a_2 \dots a_p) = (a_1 a_2)(a_2 a_3)\dots(a_{p-1} a_p)$$

Démonstration

Décomposition d'une permutation

On en déduit, associé avec la partie précédente

Théorème - Engendrement par transpositions

Toute permutation se décompose en produit de transpositions.
Autrement écrit, si on note T_n l'ensemble des transpositions de S_n,

alors $< T_n > = S_n$

Décomposition d'une permutation

On en déduit, associé avec la partie précédente

Théorème - Engendrement par transpositions

Toute permutation se décompose en produit de transpositions.
Autrement écrit, si on note T_n l'ensemble des transpositions de S_n,

alors $< T_n >= S_n$

Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Décomposition d'une permutation

On en déduit, associé avec la partie précédente

Théorème - Engendrement par transpositions

Toute permutation se décompose en produit de transpositions.
Autrement écrit, si on note T_n l'ensemble des transpositions de S_n,

alors $< T_n >= S_n$

Exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

<u>Exercice</u>

Déterminer la permutation $(a_1\, a_p) \circ (a_1\, a_{p-1}) \circ \cdots \circ (a_1\, a_2)$ où les a_i sont des entiers tous distincts compris entre 1 et n, ainsi que la permutation $(a_1\, a_2 \ldots a_q) \circ (a_q\, a_{q+1} \ldots a_p)$ où $1 < q < p$.

Exercices

Exercice

Soit $\tau = (a\,b) \in S_n$ et $\sigma = (a\,a_1\,a_2\,\ldots a_p) \in S_n$ un cycle de longueur $p+1$. Donner la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de $\tau\sigma$. Comparer le nombre d'orbites de σ et celui de $\tau\sigma$.

Exercices

<u>Exercice</u>

Soit $\tau = (a\,b) \in S_n$ et $\sigma = (a\,a_1\,a_2\,\dots a_p) \in S_n$ un cycle de longueur $p+1$. Donner la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de $\tau\sigma$. Comparer le nombre d'orbites de σ et celui de $\tau\sigma$.

<u>Exercice</u>

Pour $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$, calculer $\tau_{1i} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1i}$ et montrer que les transpositions de la forme τ_{1i} engendrent le groupe symétrique S_n (c'est-à-dire que toute permutation se décompose comme produit de transpositions de la forme τ_{1i}).

Transposition $\tau_{i,i+1}$

Analyse Un deuxième algorithme ?

Transposition $\tau_{i,i+1}$

Analyse Un deuxième algorithme ?

Exercice

Appliquer la méthode présentée pour exprimer à nouveau $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ en produit de transpositions.

Décomposition avec des transposition $(i\; i+1)$

Proposition - Décomposition par transposition simple

Toute permutation est le produit de transpositions de la forme $\tau_{i,i+1}$.
Autrement écrit :
Pour tout $\sigma \in S_n$, il existe $r \in \mathbb{N}$, $i_1, i_2, \dots i_r \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $\sigma = \tau_{i_1,i_1+1} \circ \dots \circ \tau_{i_r,i_r+1}$.

Décomposition avec des transposition $(i\ i+1)$

Proposition - Décomposition par transposition simple

Toute permutation est le produit de transpositions de la forme $\tau_{i,i+1}$.
Autrement écrit :
Pour tout $\sigma \in S_n$, il existe $r \in \mathbb{N}$, $i_1, i_2, \dots i_r \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que $\sigma = \tau_{i_1,i_1+1} \circ \dots \circ \tau_{i_r,i_r+1}$.

<u>Exercice</u>

A démontrer

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

1. Problèmes

2. Définitions

3. Décomposition d'une permutation

3.1. Partie génératrice d'un groupe

3.2. Décomposition en produit de cycles

3.3.Décomposition en produit de transpositions

4. Signature d'une permutation

4.1. Motivation : nombre d'inversions

4.2. Propriété caractéristique

4.3. Autres façons d'obtenir la signature de σ

Parité

Heuristique. Parité de changements

Il arrive, très souvent, qu'on s'intéresse au nombre de changement d'ordre dans une permutation.
On avait un ensemble bien ordonné $(1\,2\,\ldots\,n)$ et en bout de course, il se trouve tout mélangé.
Combien de changement a-t-il fallut faire ? Ce nombre ne peut pas être fixe, car deux transpositions identiques conduisent à la situation initiale. Donc le seul nombre auquel on peut avoir accès est la parité de ce nombre de changements.

Définition de signature (1)

Définition - Une première définition

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$,
on appelle signature de σ, le nombre

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \operatorname{signe}\big(\sigma(i) - \sigma(j)\big)$$

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Définition de signature (1)

Définition - Une première définition

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$,
on appelle signature de σ, le nombre

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \text{signe}\big(\sigma(i) - \sigma(j)\big)$$

Exemple Signature de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Sans la fonction signe. Simplification

Analyse Calcul pour savoir si $i < j$.

Sans la fonction signe. Simplification

Analyse Calcul pour savoir si $i < j$.

Proposition - Formule (sans la fonction signe)

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$.

Alors $$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{\{i,j\} \in \binom{\mathbb{N}_n}{2}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Sans la fonction signe. Simplification

Analyse Calcul pour savoir si $i < j$.

Proposition - Formule (sans la fonction signe)

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}_n$.

Alors $\epsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \prod_{\{i,j\}\in \binom{\mathbb{N}_n}{2}} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$

Démonstration

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

1. Problèmes
2. Définitions
3. Décomposition d'une permutation
3.1. Partie génératrice d'un groupe
3.2. Décomposition en produit de cycles
3.3.Décomposition en produit de transpositions
4. Signature d'une permutation
4.1. Motivation : nombre d'inversions
4.2. Propriété caractéristique
4.3. Autres façons d'obtenir la signature de σ

Caractérisation

Théorème - Signature

ϵ est une application de S_n dans $\{-1, 1\}$ telle que

- $\epsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ ;
- $\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.

Elle est la seule application à vérifier ces propriétés.

Caractérisation

Théorème - Signature

ϵ est une application de S_n dans $\{-1, 1\}$ telle que

- $\epsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ ;
- $\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.

Elle est la seule application à vérifier ces propriétés.

Corollaire - Morphisme de groupes

ϵ est donc un morphisme de groupes, du groupe $(S_n, \circ)$ dans le groupe $(\{-1, 1\}, \times)$.

Caractérisation

Théorème - Signature

ϵ est une application de S_n dans $\{-1, 1\}$ telle que

- $\epsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ ;
- $\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.

Elle est la seule application à vérifier ces propriétés.

Corollaire - Morphisme de groupes

ϵ est donc un morphisme de groupes, du groupe $(S_n, \circ)$ dans le groupe $(\{-1, 1\}, \times)$.

Démonstration du corollaire

Caractérisation

Théorème - Signature

ϵ est une application de S_n dans $\{-1, 1\}$ telle que

- $\epsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ ;
- $\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.

Elle est la seule application à vérifier ces propriétés.

Caractérisation

Théorème - Signature

ϵ est une application de S_n dans $\{-1,1\}$ telle que

- $\epsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ ;
- $\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ'.

Elle est la seule application à vérifier ces propriétés.

Démonstration

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

Avec les transpositions

On exploite le morphisme de groupe :

Corollaire - Calcul de $\epsilon(\sigma)$

Soit $\sigma \in S_n$, $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ une décomposition en transpositions. Alors $\epsilon(\sigma) = (-1)^k$ (en particulier la parité de k est déterminée par σ).

Avec les transpositions

On exploite le morphisme de groupe :

Corollaire - Calcul de $\epsilon(\sigma)$

Soit $\sigma \in S_n$, $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ une décomposition en transpositions. Alors $\epsilon(\sigma) = (-1)^k$ (en particulier la parité de k est déterminée par σ).

Exemple $\epsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}\right)$

Avec les orbites

Cela découle de la démonstration.

Corollaire - Signature et décomposition de cycles

Soient $c_1, \dots, c_p$ des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1, \dots, \ell_p$. Alors la permutation $\sigma = c_1 c_2 \dots c_p$ a pour signature

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-p} = (-1)^{\sum_{i=1}^{p}(\ell_i - 1)}.$$

Avec les orbites

Cela découle de la démonstration.

Corollaire - Signature et décomposition de cycles

Soient $c_1, \dots, c_p$ des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1, \dots, \ell_p$. Alors la permutation $\sigma = c_1 c_2 \dots c_p$ a pour signature

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-p} = (-1)^{\sum_{i=1}^{p}(\ell_i - 1)}.$$

Démonstration

Avec les orbites

Cela découle de la démonstration.

Corollaire - Signature et décomposition de cycles

Soient $c_1, \ldots, c_p$ des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1, \ldots, \ell_p$. Alors la permutation $\sigma = c_1 c_2 \ldots c_p$ a pour signature
$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-p} = (-1)^{\sum_{i=1}^{p}(\ell_i - 1)}.$$

Démonstration

Attention - Le nombre de cycle p

Il faut compter les points fixes parmi les cycles (au nombre de p) qui décompose σ dans la formule $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-p}$

Avec les orbites

Cela découle de la démonstration.

Corollaire - Signature et décomposition de cycles

Soient $c_1, \dots, c_p$ des cycles à supports disjoints de longueurs respectives $\ell_1, \dots, \ell_p$. Alors la permutation $\sigma = c_1 c_2 \dots c_p$ a pour signature

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-p} = (-1)^{\sum_{i=1}^{p}(\ell_i - 1)}.$$

Démonstration

Attention - Le nombre de cycle p

Il faut compter les points fixes parmi les cycles (au nombre de p) qui décompose σ dans la formule $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-p}$

Exemple $\epsilon\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}\right)$, avec les orbites

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

$\Rightarrow$ Séparation en deux parties, selon la signature

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

- Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

- Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints
  Comment l'obtenir ? L'algorithme des orbites.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

- Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints
  Comment l'obtenir ? L'algorithme des orbites.
- Toute permutation est un produit de transpositions

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

- Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints
  Comment l'obtenir ? L'algorithme des orbites.
- Toute permutation est un produit de transpositions
  Comment l'obtenir ? Décomposition des orbites, ou avec la vision graphe

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

- Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints
  Comment l'obtenir ? L'algorithme des orbites.
- Toute permutation est un produit de transpositions
  Comment l'obtenir ? Décomposition des orbites, ou avec la vision graphe
- Toute permutation est un produit de transpositions $\tau_{i,i+1}$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

$\Rightarrow$ Séparation en deux parties, selon la signature

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

- Définition de la signature. Séparation en deux sous-groupes (alternés et l'autre)

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

- Définition de la signature. Séparation en deux sous-groupes (alternés et l'autre)
- Premier moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

⇒ Séparation en deux parties, selon la signature

- Définition de la signature. Séparation en deux sous-groupes (alternés et l'autre)
- Premier moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.
- Deuxième moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = (-1)^p$, si σ se décompose en p transpositions.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

$\Rightarrow$ Séparation en deux parties, selon la signature

- Définition de la signature. Séparation en deux sous-groupes (alternés et l'autre)
- Premier moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.
- Deuxième moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = (-1)^p$, si σ se décompose en p transpositions.
- Troisième moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$, si σ se décompose produit de k cycles disjoints.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

$\Rightarrow$ Séparation en deux parties, selon la signature

- Définition de la signature. Séparation en deux sous-groupes (alternés et l'autre)
- Premier moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.
- Deuxième moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = (-1)^p$, si σ se décompose en p transpositions.
- Troisième moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$, si σ se décompose produit de k cycles disjoints.
- Quatrième moyen de calcul : $\epsilon(\sigma) = (-1)^N$, si le graphe de σ présente N croisements.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Décomposition en produit de cycles/de transpositions

$\Rightarrow$ Séparation en deux parties, selon la signature

Pour le prochain cours

- Lecture du cours chap. 34 : Déterminant
- Exercice n° 692, 701