Leçon 77 - Espace vectoriel de dimension finie

11 mars 2026

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

1. Problèmes

2. Bases et dimension
    - 2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
    - 2.2. Critère pour être une base
    - 2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Problèmes introductifs

Problème - Combinaison linéaire

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Problèmes introductifs

Problème - Combinaison linéaire

Problème - Combinaison linéaire unique

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Problèmes introductifs

Problème - Combinaison linéaire

Problème - Combinaison linéaire unique

Problème - Coordonnées et projections

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Problèmes introductifs

Problème - $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E et F de dimension finie

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Problèmes introductifs

Problème - $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E et F de dimension finie

Problème - Changement de bases

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Base de E ? Famille libre et génératrice de E

Définition - Base d'un espace vectoriel

On dit qu'une famille de vecteurs de E est une base de E si elle est une famille libre et génératrice de E.

Base de E ? Famille libre et génératrice de E

Définition - Base d'un espace vectoriel

On dit qu'une famille de vecteurs de E est une base de E si elle est une famille libre et génératrice de E.

Attention. Non unicité

On dit bien UNE base et non LA base de E...

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Base de E ? Famille libre et génératrice de E

1. Problèmes
2. Bases et dimension
2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
2.2. Critère pour être une base
2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Définition - Base d'un espace vectoriel

On dit qu'une famille de vecteurs de E est une base de E si elle est une famille libre et génératrice de E.

Attention. Non unicité

On dit bien UNE base et non LA base de E...

Exemple Nombreux exemples.

- une base de $\mathbb{R}^2$ est
- une base du $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$ est
- une base de $\{y \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid y'' + y' - 2y = 0\}$ est

Bases canoniques

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Proposition - Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}_n[X]$

On définit la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$ par

$$e_1 = (1,0,\dots,0); e_2 = (0,1,0,\dots,0); \dots; e_n = (0,\dots,0,1).$$

Alors cette famille est une base du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.

La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})_{i\in\mathbb{N}_n, j\in\mathbb{N}_p}$.

La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \dots, X^n) = (X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, celle de $\mathbb{K}[X]$ est $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Bases canoniques

Proposition - Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}_n[X]$

On définit la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$ par

$$e_1=(1,0,\dots,0);e_2=(0,1,0,\dots,0);\dots;e_n=(0,\dots,0,1).$$

Alors cette famille est une base du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})_{i\in\mathbb{N}_n,j\in\mathbb{N}_p}$.
La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $(1,X,X^2,\dots,X^n)=(X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, celle de $\mathbb{K}[X]$ est $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Exercice

Déterminer une base du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}^n$.

Bases canoniques

Proposition - Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}_n[X]$

On définit la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$ par

$$e_1=(1,0,\dots,0);e_2=(0,1,0,\dots,0);\dots;e_n=(0,\dots,0,1).$$

Alors cette famille est une base du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.

La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})_{i\in\mathbb{N}_n,j\in\mathbb{N}_p}$.

La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $(1,X,X^2,\dots,X^n)=(X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, celle de $\mathbb{K}[X]$ est $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Exercice

Déterminer une base du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}^n$.

Remarque. Démonstration de la base canonique

Caractérisation

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Théorème - Caractérisation de la base

Une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ telle que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$,

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ s'appellent les coordonnées (ou composantes) de x dans la base $\mathscr{B}$.

Heuristique

Heuristique. La fonction Φ

D'après ce théorème, si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \mathbb{K}^n \longrightarrow E, \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

est une application bijective : $\forall\ x \in E, \exists\ !(\lambda_i)_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$.

Les coordonnées de x sont alors les antécédents de x par $\Phi_{\mathscr{B}}$.

Pour la démonstration qui va suivre, on va montrer :

- $\Phi_{\mathscr{B}}$ est injective si et seulement si $\mathscr{B}$ est libre.
- $\Phi_{\mathscr{B}}$ est surjective si et seulement si $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Heuristique

Heuristique. La fonction Φ

D'après ce théorème, si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \mathbb{K}^n \longrightarrow E, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

est une application bijective : $\forall\ x \in E$, $\exists\ !(\lambda_i)_i$ tel que
$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$.
Les coordonnées de x sont alors les antécédents de x par $\Phi_{\mathscr{B}}$.
Pour la démonstration qui va suivre, on va montrer :

- $\Phi_{\mathscr{B}}$ est injective si et seulement si $\mathscr{B}$ est libre.
- $\Phi_{\mathscr{B}}$ est surjective si et seulement si $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Quelques remarques

Attention - Ne pas oublier

On dit qu'« *une famille est génératrice (ou une base)**DE E*** », si on oublie l'objet indirect (« de ... ») cela ne veut rien dire.
En revanche, une famille est libre, indépendamment de l'espace vectoriel considéré (mais pas du corps). On peut donc se contenter de « *une famille est libre* ».

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Quelques remarques

Attention - Ne pas oublier

On dit qu'« *une famille est génératrice (ou une base)**DE E*** », si on oublie l'objet indirect (« de ... ») cela ne veut rien dire.
En revanche, une famille est libre, indépendamment de l'espace vectoriel considéré (mais pas du corps). On peut donc se contenter de « *une famille est libre* ».

Remarque. Base infinie

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Quelques remarques

Attention - Ne pas oublier

On dit qu'« *une famille est génératrice (ou une base)**DE E*** », si on oublie l'objet indirect (« de ... ») cela ne veut rien dire.
En revanche, une famille est libre, indépendamment de l'espace vectoriel considéré (mais pas du corps). On peut donc se contenter de « *une famille est libre* ».

Remarque. Base infinie
Application Exemples classiques
• les coordonnées de $a+ib$ dans la base $(1,i)$ du $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$ sont

• les coordonnées de $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sont

1. Problèmes
2. Bases et dimension
2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
2.2. Critère pour être une base
2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Quelques remarques

Attention - Ne pas oublier

On dit qu'« *une famille est génératrice (ou une base)**DE E*** », si on oublie l'objet indirect (« de ... ») cela ne veut rien dire.
En revanche, une famille est libre, indépendamment de l'espace vectoriel considéré (mais pas du corps). On peut donc se contenter de « *une famille est libre* ».

Remarque. Base infinie
Application Exemples classiques
• les coordonnées de $a+ib$ dans la base $(1,i)$ du $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$ sont (a,b)
• les coordonnées de $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ sont $(x_1,x_2,\dots,x_n)$

1. Problèmes
2. Bases et dimension
2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
2.2. Critère pour être une base
2.3. Dimension d'un espace vectoriel

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Réduction des hypothèses

Proposition - Base

Soit $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots e_p)$ une famille d'éléments de E.
On a les équivalences :

(i) $\mathscr{F}$ est une base de E.

(ii) $\mathscr{F}$ est une famille libre maximale (dans E).

(iii) $\mathscr{F}$ est une famille génératrice minimale de E.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Deux lemmes

On commence par démontrer deux lemmes :

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Deux lemmes

On commence par démontrer deux lemmes :

Lemme - Complétion libre

Soient $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E et $x \in E$.

$x \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ ssi $(e_1, \dots, e_p, x)$ est encore libre.

ou $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ ssi $(e_1, \dots, e_p, x)$ est liée.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Deux lemmes

On commence par démontrer deux lemmes :

Lemme - Complétion libre

Soient $(e_1,\ldots,e_p)$ une famille libre de E et $x \in E$.

$x \notin \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_p)$ ssi $(e_1,\ldots,e_p,x)$ est encore libre.

ou $x \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_p)$ ssi $(e_1,\ldots,e_p,x)$ est liée.

Lemme - Réduction liée

Soit $(e_1,\ldots,e_p,e_{p+1})$ une famille de E.

$e_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_p)$ ssi $\mathrm{Vect}(e_1\ldots e_{p+1}) = \mathrm{Vect}(e_1\ldots e_p)$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Deux lemmes

Lemme - Complétion libre

Soient $(e_1,\dots,e_p)$ une famille libre de E et $x \in E$.

$x \notin \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$ ssi $(e_1,\dots,e_p,x)$ est encore libre.

ou $x \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$ ssi $(e_1,\dots,e_p,x)$ est liée.

Lemme - Réduction liée

Soit $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1})$ une famille de E.

$e_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$ ssi $\mathrm{Vect}(e_1\dots e_{p+1}) = \mathrm{Vect}(e_1\dots e_p)$

Heuristique - Interprétation en terme de famille libre maximale et famille génératrice minimale

Si $(e_1,\dots,e_p)$ est libre et $x \notin \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$,

alors $(e_1,\dots e_p)$ n'est pas maximale.

Si $(e_1\dots e_{p+1})$ est génératrice de E et $e_{p+1} \in \mathrm{Vect}(e_1\dots e_p)$,

alors $(e_1,\dots e_p,e_{p+1})$ n'est pas minimale.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Démonstrations

Démonstration des lemmes

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Démonstrations

Démonstration des lemmes

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Existence de bases

Définition - Espace de dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
Par convention $\{0_E\}$ est un espace de dimension finie.
S'il n'est pas de dimension finie, E est dit de dimension infinie.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Lemme de Steinitz

On a le théorème suivant très important :

Théorème - Théorème de la base incomplète (lemme de Steinitz)

Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E et $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_q)$ une famille génératrice de E, alors : il existe une base de E de la forme $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ où $\{e_{p+1}, \dots, e_n\} \subset \mathscr{F}$ (quitte à être vide).
En d'autres termes on peut compléter une famille libre de E en une base avec des vecteurs pris dans une famille génératrice.

Lemme de Steinitz

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

On a le théorème suivant très important :

Théorème - Théorème de la base incomplète (lemme de Steinitz)

Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_q)$ une famille génératrice de E, alors : il existe une base de E de la forme $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ où $\{e_{p+1}, \ldots, e_n\} \subset \mathscr{F}$ (quitte à être vide).
En d'autres termes on peut compléter une famille libre de E en une base avec des vecteurs pris dans une famille génératrice.

Démonstration

Lemme de Steinitz

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

On a le théorème suivant très important :

Théorème - Théorème de la base incomplète (lemme de Steinitz)

Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_q)$ une famille génératrice de E, alors : il existe une base de E de la forme $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ où $\{e_{p+1}, \ldots, e_n\} \subset \mathscr{F}$ (quitte à être vide).
En d'autres termes on peut compléter une famille libre de E en une base avec des vecteurs pris dans une famille génératrice.

Démonstration

Remarque Constructivité ? Algorithme

Algorithme !

Cela donne un algorithme de complétion de famille libre, en une base (si l'espace est de dimension finie) :

Savoir-faire. Base incomplète

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Algorithme !

Cela donne un algorithme de complétion de famille libre, en une base (si l'espace est de dimension finie) :

Savoir-faire. Base incomplète

Pour le théorème de la base incomplète, on exploite un algorithme plus efficace. On suit l'algorithme suivant :

```
E=vect(B)  #A definir...
for i in range(q):
    if f[i] notin E :
        B=B+[f[i]]
        E=vect(B)
return(B)
```

L'algorithme termine car il est paramétré avec une boucle `for`. L'algorithme renvoie la famille libre maximale, contenant e_i, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Algorithme !

Cela donne un algorithme de complétion de famille libre, en une base (si l'espace est de dimension finie) :

Savoir-faire. Base incomplète

Par construction, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i \in \mathrm{Vect}(B)$,

- en effet, ou bien f_i n'appartenait pas à B au moment du test, et alors, on l'a mis dans B,
- ou bien il en faisait partie et toujours à la fin.

D'après le lemme de réduction : $\mathrm{Vect}\mathscr{F} = E \subset \mathrm{Vect}(B)$.

Donc B est également une famille génératrice de E.

Il faut également montrer que B est une famille libre.

En fait, pour tout i, B_i est libre d'après le lemme de complétion libre.

C'est donc également le cas en fin d'algorithme.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Corollaires

Application Compléter $\mathscr{E} = ((1,1,1),(1,-1,-1))$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Corollaires

Application Compléter $\mathscr{E} = ((1,1,1),(1,-1,-1))$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

A partir d'un ensemble réduit à l'unique élément $\{0\}$,

Corollaire

Si E, non réduit au vecteur nul, est de dimension finie, alors de toute famille génératrice de E on peut extraire une base.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Corollaires

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Application Compléter $\mathscr{E} = ((1,1,1),(1,-1,-1))$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

A partir d'un ensemble réduit à l'unique élément $\{0\}$,

Corollaire

Si E, non réduit au vecteur nul, est de dimension finie, alors de toute famille génératrice de E on peut extraire une base.

Corollaire

Tout espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul, admet une base.

Cardinal d'une base

En fait, on a mieux, en terme de cardinaux

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Cardinal d'une base

En fait, on a mieux, en terme de cardinaux

Proposition - Relation entre cardinaux de familles libres/familles génératrices

Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E, alors $\mathscr{L}$ est finie et $\mathrm{Card}\mathscr{L} \leqslant \mathrm{Card}\mathscr{G}$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Cardinal d'une base

En fait, on a mieux, en terme de cardinaux

Proposition - Relation entre cardinaux de familles libres/familles génératrices

Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E, alors $\mathscr{L}$ est finie et $\mathrm{Card}\mathscr{L} \leqslant \mathrm{Card}\mathscr{G}$

Heuristique - Amélioration du lemme de Steinitz

On améliore la démonstration du lemme de Steinitz.
En cherchant un invariant : comment transformer un à un les élément de $\mathscr{G}$ en élément de $\mathscr{L}$ tout en gardant la génération de E.
On démontre que pour tout $s \leqslant \mathrm{card}(\mathscr{L}) = p$ ($q = \mathrm{card}(\mathscr{G})$) :
il existe $I_s \subset \mathbb{N}_q$, tel que $\mathrm{card}(I_s) = q - s$ et
$E = \mathrm{Vect}\big((e_i)_{i\in\mathbb{N}_s}, (f_j)_{j\in I_s}\big)$

1. Problèmes
2. Bases et dimension
2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
2.2. Critère pour être une base
2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Cardinal d'une base

En fait, on a mieux, en terme de cardinaux

Proposition - Relation entre cardinaux de familles libres/familles génératrices

Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E, alors $\mathscr{L}$ est finie et $\mathrm{Card}\mathscr{L} \leqslant \mathrm{Card}\mathscr{G}$

Heuristique - Amélioration du lemme de Steinitz

On améliore la démonstration du lemme de Steinitz.
En cherchant un invariant : comment transformer un à un les élément de $\mathscr{G}$ en élément de $\mathscr{L}$ tout en gardant la génération de E.
On démontre que pour tout $s \leqslant \mathrm{card}(\mathscr{L}) = p$ $(q = \mathrm{card}(\mathscr{G}))$:
il existe $I_s \subset \mathbb{N}_q$, tel que $\mathrm{card}(I_s) = q - s$ et
$E = \mathrm{Vect}\big((e_i)_{i\in\mathbb{N}_s}, (f_j)_{j\in I_s}\big)$

Notons que la démonstration qui suit est en fait constructive !

Démonstration

Autre point de vue

Autre interprétation :

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Autre point de vue

Autre interprétation :

Corollaire - Maximalité de liberté

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(x_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs de E qui sont combinaisons linéaires de $(e_1,\ldots,e_n)$ (i.e. : $\forall\ j\in J$, $x_j \in \mathrm{Vect}(e_1,e_2,\ldots e_n)$).
Si $\mathrm{Card} J \geqslant n+1$ alors nécessairement la famille $(x_j)_{j\in J}$ est liée.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
2.2. Critère pour être une base
2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Autre point de vue

Autre interprétation :

Corollaire - Maximalité de liberté

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(x_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs de E qui sont combinaisons linéaires de $(e_1,\dots,e_n)$ (i.e. : $\forall\ j \in J$, $x_j \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots e_n)$).
Si $\mathrm{Card} J \geqslant n+1$ alors nécessairement la famille $(x_j)_{j\in J}$ est liée.

Si l'espace vectoriel possède une famille libre infinie, alors il est de dimension infinie (au sens : il n'est pas de dimension finie).

Corollaire - Espace vectoriel de dimension infinie

Il existe des espaces vectoriels de dimension infinie. C'est en particulier le cas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
2.2. Critère pour être une base
2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Autre point de vue

Autre interprétation :

Corollaire - Maximalité de liberté

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(x_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs de E qui sont combinaisons linéaires de $(e_1, \ldots, e_n)$ (i.e. : $\forall\ j \in J$, $x_j \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots e_n)$).
Si $\mathrm{Card} J \geqslant n+1$ alors nécessairement la famille $(x_j)_{j\in J}$ est liée.

Si l'espace vectoriel possède une famille libre infinie, alors il est de dimension infinie (au sens : il n'est pas de dimension finie).

Corollaire - Espace vectoriel de dimension infinie

Il existe des espaces vectoriels de dimension infinie. C'est en particulier le cas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration

Le cardinal d'une base ne dépend que de l'espace !

Théorème - Dimension constante

Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, non réduit au vecteur nul, ont même cardinal.

Le cardinal d'une base ne dépend que de l'espace !

Théorème - Dimension constante

Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, non réduit au vecteur nul, ont même cardinal.

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Dimension

Définition - Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, non réduit au vecteur nul.
On appelle dimension de E le cardinal commun de toutes ses bases.
On le note $\dim E$ ou $\dim_{\mathbb{K}} E$.
Par convention $\dim\{0_E\} = 0$.

Dimension

Définition - Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, non réduit au vecteur nul. On appelle dimension de E le cardinal commun de toutes ses bases.
On le note $\dim E$ ou $\dim_{\mathbb{K}} E$.
Par convention $\dim\{0_E\} = 0$.

Exemple Compléter

- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n =$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =$
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n =$
- $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] =$
- Pour $a \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, $\dim_{\mathbb{K}}\{y \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \mid y' + a(t)y = 0\} =$
- Pour $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$ fixé, $a \neq 0$,
$\dim_{\mathbb{K}}\{y \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}) \mid ay'' + by' + cy = 0\} =$
- Pour $(a,b,c) \in K^3$, $a \neq 0, c \neq 0$,
$\dim_{\mathbb{K}}\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\} =$

1. Problèmes
2. Bases et dimension
2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
2.2. Critère pour être une base
2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Retour sur les cardinaux

Théorème - Conséquence sur les cardinaux

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \geqslant 1$. Alors :

- Une famille libre de E de cardinal p vérifie $p \leqslant n$ et c'est une base si et seulement si $p = n$.
- Une famille génératrice de E de cardinal p vérifie $p \geqslant n$ et c'est une base si et seulement si $p = n$.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Retour sur les cardinaux

Théorème - Conséquence sur les cardinaux

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \geqslant 1$. Alors :

- Une famille libre de E de cardinal p vérifie $p \leqslant n$ et c'est une base si et seulement si $p = n$.
- Une famille génératrice de E de cardinal p vérifie $p \geqslant n$ et c'est une base si et seulement si $p = n$.

Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Applications

Savoir-faire. Montrer qu'une famille est une base

En général pour montrer qu'une famille d'un $\mathbb{K}$-e.v. de **dimension** n **connue** est une base on montre qu'elle est **libre de cardinal** n. (Dans de rares cas, on montre que la famille est génératrice et du bon cardinal).

1. Problèmes
2. Bases et dimension
2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
2.2. Critère pour être une base
2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Applications

Savoir-faire. Montrer qu'une famille est une base

En général pour montrer qu'une famille d'un $\mathbb{K}$-e.v. de **dimension** n **connue** est une base on montre qu'elle est **libre de cardinal** n. (Dans de rares cas, on montre que la famille est génératrice et du bon cardinal).

Exemple Dans $E = \mathbb{R}^n$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Applications

Savoir-faire. Montrer qu'une famille est une base

En général pour montrer qu'une famille d'un $\mathbb{K}$-e.v. de **dimension** n **connue** est une base on montre qu'elle est **libre de cardinal** n. (Dans de rares cas, on montre que la famille est génératrice et du bon cardinal).

Exemple Dans $E = \mathbb{R}^n$

Exercice

Montrer que la famille des polynômes $(N_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Avec

$$N_0 = 1 \qquad \forall\, k \geqslant 1 : N_k = \frac{X \times (X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

Dimension d'un produit (cartésien d'espaces)

Théorème - Dimension d'un produit cartésien

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F.$$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Dimension d’un produit (cartésien d’espaces)

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l’écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d’un espace vectoriel

Théorème - Dimension d’un produit cartésien

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F.$$

Démonstration

Produit cartésien étendu

Par récurrence :

Corollaire - Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels

Soient $E_1, \ldots, E_k$ des $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies respectivement $n_1, \ldots, n_k$. Alors $E_1 \times \cdots \times E_k$ est de dimension finie égale à $n_1 + \cdots + n_k$.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Bases ? Définition et caractérisations

- Une base de E est une famille libre ET génératrice de E

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

- Une base de E est une famille libre ET génératrice de E
- Il s'agit aussi d'une famille libre et maximale de E, ou d'une famille génératrice de E et minimale

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

- Une base de E est une famille libre ET génératrice de E
- Il s'agit aussi d'une famille libre et maximale de E, ou d'une famille génératrice de E et minimale
- Il y a une multitude de bases possibles pour un espace de dimension finie.
  Certaines sont reconnues comme canoniques (=naturelles)

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Bases ? Définition et caractérisations

- Une base de E est une famille libre ET génératrice de E
- Il s'agit aussi d'une famille libre et maximale de E, ou d'une famille génératrice de E et minimale
- Il y a une multitude de bases possibles pour un espace de dimension finie.
  Certaines sont reconnues comme canoniques (=naturelles)
- Si $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ est une base de E,
  Alors pour tout $x \in E$, $\exists\,!(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

- Une base de E est une famille libre ET génératrice de E
- Il s'agit aussi d'une famille libre et maximale de E, ou d'une famille génératrice de E et minimale
- Il y a une multitude de bases possibles pour un espace de dimension finie.
  Certaines sont reconnues comme canoniques (=naturelles)
- Si $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base de E,
  Alors pour tout $x \in E$, $\exists\,!(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
- On peut compléter une famille $\mathscr{F}$ libre en ajoutant x
  ssi ce vecteur x n'est pas c.l. des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Bases ? Définition et caractérisations

- Une base de E est une famille libre ET génératrice de E
- Il s'agit aussi d'une famille libre et maximale de E, ou d'une famille génératrice de E et minimale
- Il y a une multitude de bases possibles pour un espace de dimension finie.
  Certaines sont reconnues comme canoniques (=naturelles)
- Si $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base de E,
  Alors pour tout $x \in E$, $\exists\,!(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
- On peut compléter une famille $\mathscr{F}$ libre en ajoutant x
  ssi ce vecteur x n'est pas c.l. des vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.
- On peut réduire une famille $\mathscr{F}$ génératrice de E en lui enlevant x
  ssi ce vecteur x est c.l. des autres vecteurs de la famille $\mathscr{F}$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
  2.3. Dimension...

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel