



## ⇒ Bases ? Définition et caractérisations

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

### 1. Problèmes

1. Problèmes

### 2. Bases et dimension

2. Bases et  
dimension

- 2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
- 2.2. Critère pour être une base
- 2.3. Dimension d'un espace vectoriel
- 2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

## ⇒ Bases ? Définition et caractérisations

### ⇒ Bases ? Définition et caractérisations

#### 1. Problèmes

#### 1. Problèmes

#### 2. Bases et dimension

#### 2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

## Définition - Espace de dimension finie

Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

### 1. Problèmes

### 2. Bases et dimension

- 2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
- 2.2. Critère pour être une base
- 2.3. Dimension d'un espace vectoriel
- 2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

## Définition - Espace de dimension finie

Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

## Théorème - Dimension constante

Toutes les bases d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie, non réduit au vecteur nul, ont même cardinal.

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

# Existence de bases

## Définition - Espace de dimension finie

Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

## Théorème - Dimension constante

Toutes les bases d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie, non réduit au vecteur nul, ont même cardinal.

## Définition - Dimension

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie, non réduit au vecteur nul. On appelle dimension de  $E$  le cardinal commun de toutes ses bases.

On le note  $\dim E$  ou  $\dim_{\mathbb{K}} E$ .

Par convention  $\dim\{0_E\} = 0$ .

⇒ Bases ? Définition et caractérisations

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

# Dimension d'un produit (cartésien d'espaces)

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Théorème - Dimension d'un produit cartésien

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie. Alors  $E \times F$  est de dimension finie et

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F.$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

# Dimension d'un produit (cartésien d'espaces)

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Théorème - Dimension d'un produit cartésien

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie. Alors  $E \times F$  est de dimension finie et

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F.$$

## Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

Par récurrence :

## Corollaire - Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels

Soient  $E_1, \dots, E_k$  des  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimensions finies respectivement  $n_1, \dots, n_k$ . Alors  $E_1 \times \dots \times E_k$  est de dimension finie égale à  $n_1 + \dots + n_k$ .

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

## ⇒ Bases ? Définition et caractérisations

### ⇒ Bases ? Définition et caractérisations

#### 1. Problèmes

##### 1. Problèmes

#### 2. Bases et dimension

##### 2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Théorème - Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie. Soit  $F$  un s.e.v de  $E$ .

Alors  $F$  est de dimension finie, avec  $\dim F \leq \dim E$ .

De plus

$\dim F = \dim E$  si et seulement si  $E = F$ .

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Théorème - Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie. Soit  $F$  un s.e.v de  $E$ .

Alors  $F$  est de dimension finie, avec  $\dim F \leq \dim E$ .

De plus

$$\dim F = \dim E \text{ si et seulement si } E = F.$$

## Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

Savoir-faire. Montrer que deux espaces vectoriels sont égaux

Pour montrer que deux  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$  et  $F$  de **dimension finie** sont égaux, on montre généralement une inclusion et l'égalité des dimensions.

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

**Savoir-faire.** Montrer que deux espaces vectoriels sont égaux

Pour montrer que deux  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$  et  $F$  de **dimension finie** sont égaux, on montre généralement une inclusion et l'égalité des dimensions.

**Corollaire.** S.e.v. de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$

Les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$ , autres que  $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$  et  $\mathbb{R}^2$ , sont les droites vectorielles.

Les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ , autres que  $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$  et  $\mathbb{R}^3$ , sont les droites vectorielles et les plans vectoriels.

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

# Rang d'une famille de vecteurs

## Définition - Rang d'une famille de vecteurs

Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille finie de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle rang de la famille  $(x_1, \dots, x_p)$

la dimension du sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$  :

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$$

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

# Rang d'une famille de vecteurs

## Définition - Rang d'une famille de vecteurs

Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille finie de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle rang de la famille  $(x_1, \dots, x_p)$

la dimension du sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$  :

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$$

Comme  $(x_1, \dots, x_p)$  est une famille génératrice de  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ , on peut affirmer

## Proposition Majorant

$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq p$ . Et

$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = p \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_p)$  est libre

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Théorème - Base et dimension d'une somme directe

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie,  $E_1$  et  $E_2$  deux s.e.v de  $E$

Soient  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E_1$  et  $(f_1, \dots, f_q)$  une base de  $E_2$ .

Alors  $E_1$  et  $E_2$  sont en somme directe si et seulement si

$(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  (juxtaposition des bases de  $E_1$  et  $E_2$ ) est libre.

Dans ce cas c'est une base de  $E_1 \oplus E_2$  et on a

$$\dim E_1 \oplus E_2 = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Le résultat se généralise à plus de deux s.e.v.

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Théorème - Base et dimension d'une somme directe

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie,  $E_1$  et  $E_2$  deux s.e.v de  $E$

Soient  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E_1$  et  $(f_1, \dots, f_q)$  une base de  $E_2$ .

Alors  $E_1$  et  $E_2$  sont en somme directe si et seulement si

$(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  (juxtaposition des bases de  $E_1$  et  $E_2$ ) est libre.

Dans ce cas c'est une base de  $E_1 \oplus E_2$  et on a

$$\dim E_1 \oplus E_2 = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Le résultat se généralise à plus de deux s.e.v.

## Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Théorème - Caractérisation des couples de s.e.v supplémentaires

Soient  $E$  un e.v. de dimension finie  $n$  et  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ .

Alors

- $E = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$  et  $\dim F + \dim G = n$ ;
- $E = F \oplus G \Leftrightarrow F + G = E$  et  $\dim F + \dim G = n$ ;
- $E = F \oplus G$ 
  - ⇔ la juxtaposition d'une base de  $F$  et d'une base de  $G$   
est une base de  $E$ .

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

# Caractérisation de $(F, G)$

## Théorème - Caractérisation des couples de s.e.v supplémentaires

Soient  $E$  un e.v. de dimension finie  $n$  et  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ .

Alors

- $E = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$  et  $\dim F + \dim G = n$ ;

- $E = F \oplus G \Leftrightarrow F + G = E$  et  $\dim F + \dim G = n$ ;

- $E = F \oplus G$

$\Leftrightarrow$  la juxtaposition d'une base de  $F$  et d'une base de  $G$   
est une base de  $E$ .

### Exercice

Montrer que dans  $\mathbb{R}^4$ ,  $F = \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (0, 2, 0, 1))$  et  
 $G = \text{Vect}((2, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$  sont supplémentaires.

$\Rightarrow$  Bases? Définition  
et caractérisations

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

# Caractérisation de $(F, G)$

⇒ Bases? Définition  
et caractérisations

## Théorème - Caractérisation des couples de s.e.v supplémentaires

Soient  $E$  un e.v. de dimension finie  $n$  et  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ .

Alors

- $E = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$  et  $\dim F + \dim G = n$ ;

- $E = F \oplus G \Leftrightarrow F + G = E$  et  $\dim F + \dim G = n$ ;

- $E = F \oplus G$

⇔ la juxtaposition d'une base de  $F$  et d'une base de  $G$   
est une base de  $E$ .

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

### Exercice

Montrer que dans  $\mathbb{R}^4$ ,  $F = \text{Vect}((1, 2, -1, 0), (0, 2, 0, 1))$  et  
 $G = \text{Vect}((2, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1))$  sont supplémentaires.

### Démonstration

# Existence d'un supplémentaire

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

**Remarque** - Famille libre  $F \cap G = \{0\}$  & Famille génératrice :  
 $F + G = E$ .

## 1. Problèmes

## 2. Bases et dimension

- 2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
- 2.2. Critère pour être une base
- 2.3. Dimension d'un espace vectoriel
- 2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

# Existence d'un supplémentaire

**Remarque** - Famille libre  $F \cap G = \{0\}$  & Famille génératrice :  
 $F + G = E$ .

## Théorème - Existence de supplémentaires en dimension finie

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie,  $F$  un s.e.v de  $E$ . Alors  $F$  admet au moins un supplémentaire dans  $E$ .

### 1. Problèmes

### 2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

# Existence d'un supplémentaire

**Remarque** - Famille libre  $F \cap G = \{0\}$  & Famille génératrice :  
 $F + G = E$ .

## Théorème - Existence de supplémentaires en dimension finie

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie,  $F$  un s.e.v de  $E$ . Alors  $F$  admet au moins un supplémentaire dans  $E$ .

### Démonstration

#### 1. Problèmes

#### 2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

**Remarque** Processus algorithmique

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

**Remarque** Processus algorithmique

Exercice

Donner **un** supplémentaire dans  $\mathbb{R}^4$  de  
 $F = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (2, 0, 1, 1), (-2, 4, 1, 1))$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Théorème - Dimension d'une somme de deux s.e.v., relation de Grassman

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie,  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ .  
Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

- 2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
- 2.2. Critère pour être une base
- 2.3. Dimension d'un espace vectoriel
- 2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Théorème - Dimension d'une somme de deux s.e.v., relation de Grassman

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie,  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ .  
Alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

## Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

- 2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
- 2.2. Critère pour être une base
- 2.3. Dimension d'un espace vectoriel
- 2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

# Dimension d'une somme

## Théorème - Dimension et somme d'espaces vectoriels

Si  $F_1, \dots, F_p$  sont des s.e.v. de dimension finie de  $E$   $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, alors

$$\dim \sum_{i=1}^p F_i \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

# Dimension d'une somme

## Théorème - Dimension et somme d'espaces vectoriels

Si  $F_1, \dots, F_p$  sont des s.e.v. de dimension finie de  $E$   $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, alors

$$\dim \sum_{i=1}^p F_i \leq \sum_{i=1}^p \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

## Démonstration

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Définition - Droite et plan vectoriel

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension quelconque et soit  $F$  un s.e.v de  $E$ . On dit que

- ▶  $F$  est une droite (vectorielle) si  $\dim F = 1$  ;
- ▶  $F$  est un plan (vectoriel) si  $\dim F = 2$ .

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Objectifs

- ⇒ Dimension (définition)
- ⇒ Dimension (exploitation)

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

- 2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
- 2.2. Critère pour être une base
- 2.3. Dimension d'un espace vectoriel
- 2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Dimension (définition)

- ▶ Un espace est de dimension finie, lorsqu'il admet une famille une famille génératrice finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

#### 1. Problèmes

#### 2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Dimension (définition)

- ▶ Un espace est de dimension finie, lorsqu'il admet une famille une famille génératrice finie
- ▶ Dans ce cas, toutes les bases (nombreuses !!) ont le même cardinal, qui ne dépend que de  $E$ , appelé dimension de  $E$

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

#### 1. Problèmes

#### 2. Bases et dimension

- 2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
- 2.2. Critère pour être une base
- 2.3. Dimension d'un espace vectoriel
- 2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Dimension (définition)

- ▶ Un espace est de dimension finie, lorsqu'il admet une famille une famille génératrice finie
- ▶ Dans ce cas, toutes les bases (nombreuses !!) ont le même cardinal, qui ne dépend que de  $E$ , appelé dimension de  $E$
- ▶ On a un processus constructif à partir d'une famille libre et d'une famille génératrice pour former une base de  $E$  (contenant toute la famille libre). C'est le lemme de Steinitz ou théorème de la base incomplète

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

#### 1. Problèmes

#### 2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Dimension (définition)

- ▶ Un espace est de dimension finie, lorsqu'il admet une famille une famille génératrice finie
- ▶ Dans ce cas, toutes les bases (nombreuses !!) ont le même cardinal, qui ne dépend que de  $E$ , appelé dimension de  $E$
- ▶ On a un processus constructif à partir d'une famille libre et d'une famille génératrice pour former une base de  $E$  (contenant toute la famille libre). C'est le lemme de Steinitz ou théorème de la base incomplète
- ▶ Exemples de dimension d'espace vectoriel classique, dont le produit cartésien.

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

#### 1. Problèmes

#### 2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Objectifs

- ⇒ Dimension (définition)
- ⇒ Dimension (exploitation)

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

## Objectifs

- ⇒ Dimension (définition)
- ⇒ Dimension (exploitation)

- ▶ Réciproquement, si l'on connaît la dimension, on a un critère minimaliste pour reconnaître une base.

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

### 1. Problèmes

### 2. Bases et dimension

- 2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
- 2.2. Critère pour être une base
- 2.3. Dimension d'un espace vectoriel
- 2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

## Objectifs

- ⇒ Dimension (définition)
- ⇒ Dimension (exploitation)

- ▶ Réciproquement, si l'on connaît la dimension, on a un critère minimaliste pour reconnaître une base.
- ▶ Réciproquement, si l'on connaît la dimension, on a un critère minimaliste pour reconnaître deux espaces supplémentaires.

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

### 1. Problèmes

### 2. Bases et dimension

- 2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base
- 2.2. Critère pour être une base
- 2.3. Dimension d'un espace vectoriel
- 2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

## Objectifs

⇒ Dimension (définition)

⇒ Dimension (exploitation)

- ▶ Réciproquement, si l'on connaît la dimension, on a un critère minimaliste pour reconnaître une base.
- ▶ Réciproquement, si l'on connaît la dimension, on a un critère minimaliste pour reconnaître deux espaces supplémentaires.
- ▶ Formule de Grassman :  $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie

⇒ Bases ? Définition  
et caractérisations

## Objectifs

- ⇒ Dimension (définition)
- ⇒ Dimension (exploitation)

## Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
  - 3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
- ▶ Exercice n° 526

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

2.1. Existence et unicité de  
l'écriture de tout vecteur dans  
une base

2.2. Critère pour être une base

2.3. Dimension d'un espace  
vectoriel

2.4. Sous-espaces vectoriels en  
dimension finie