

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire



## Leçon 79 - Espace vectoriel de dimension finie

⇒ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## 1. Problèmes

## 2. Bases et dimension

## 3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

### 3.1. Détermination

### 3.2. Matrice d'une application linéaire

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

⇒ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

⇒  $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Théorème - Image d'une base

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie  $n$  et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. quelconque.

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $F$ .

Alors il existe une unique application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i.$$

On dit que  $u$  est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base.

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# Détermination par les bases

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Théorème - Image d'une base

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie  $n$  et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. quelconque.

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $F$ .

Alors il existe une unique application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i.$$

On dit que  $u$  est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base.

## Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# Détermination par les bases

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Théorème - Image d'une base

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie  $n$  et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. quelconque.

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $F$ .

Alors il existe une unique application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_i) = f_i.$$

On dit que  $u$  est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base.

### Démonstration

**Remarque** Dimension infinie

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

## Corollaire - Égalité d'applications

Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
  - 3.1. Détermination
  - 3.2. Matrice d'une application linéaire

# Corollaires

## Corollaire - Égalité d'applications

Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Écriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

## Corollaire - Applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$

Soit  $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ . Alors  $u$  est de la forme

$$u : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{pmatrix} \quad \text{où } \begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \end{cases} a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Réciproquement, toute application de cette forme est linéaire du  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}^n$  dans le  $\mathbb{K}$ -e.v.  $\mathbb{K}^p$ .

## Proposition - Surjection coordonnée

Tout  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

Si  $\mathcal{B}$  une base de  $E$   $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie non nulle  $n$ . Alors

$$u: E \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$x \mapsto$  coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$

est un isomorphisme de  $E$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

## Proposition - Surjection coordonnée

Tout  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

Si  $\mathcal{B}$  une base de  $E$   $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie non nulle  $n$ . Alors

$$u: E \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$x \mapsto \text{coordonnées de } x \text{ dans } \mathcal{B}$$

est un isomorphisme de  $E$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

## Démonstration

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

## Proposition - Surjection coordonnée

Tout  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

Si  $\mathcal{B}$  une base de  $E$   $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie non nulle  $n$ . Alors

$$u : E \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$x \mapsto$  coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$

est un isomorphisme de  $E$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Démonstration

## Corollaire - Sans passer par $\mathbb{K}^n$

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. a priori quelconque.

Alors  $E$  et  $F$  sont isomorphes si et seulement si  $F$  est de dimension finie avec  $\dim F = \dim E$ .

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

## Proposition - Surjection coordonnée

Tout  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

Si  $\mathcal{B}$  une base de  $E$   $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie non nulle  $n$ . Alors

$$u : E \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$x \mapsto$  coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$

est un isomorphisme de  $E$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Démonstration

## Corollaire - Sans passer par $\mathbb{K}^n$

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie et  $F$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. a priori quelconque.

Alors  $E$  et  $F$  sont isomorphes si et seulement si  $F$  est de dimension finie avec  $\dim F = \dim E$ .

## Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# $\mathcal{L}(E, F)$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Théorème - Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie. Alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Écriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# $\mathcal{L}(E, F)$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Théorème - Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie. Alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

## Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Écriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# $\mathcal{L}(E, F)$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Théorème - Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie. Alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

### Démonstration

### Remarque Espace dual

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Écriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# Détermination par la restriction à des supplémentaires

$E, F$  désignent toujours deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

## Théorème

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux s.e.v. supplémentaires dans  $E$  et  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F), u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ . Alors il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $u|_{E_1} = u_1$  et  $u|_{E_2} = u_2$ .

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
  - 3.1. Détermination
  - 3.2. Matrice d'une application linéaire

# Détermination par la restriction à des supplémentaires

$E, F$  désignent toujours deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

## Théorème

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux s.e.v. supplémentaires dans  $E$  et  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F), u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ . Alors il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $u|_{E_1} = u_1$  et  $u|_{E_2} = u_2$ .

Plus généralement :

## Théorème - Description unique sur une famille de supplémentaires

Si  $E_1, \dots, E_p$  sont des s.e.v. de  $E$  (de dimension quelconque) vérifiant  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$  et si  $\forall i, u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ , alors il existe une et une seule application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $\forall i, u|_{E_i} = u_i$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

# Détermination par la restriction à des supplémentaires

$E, F$  désignent toujours deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

## Théorème

Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux s.e.v. supplémentaires dans  $E$  et  $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F), u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$ . Alors il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $u|_{E_1} = u_1$  et  $u|_{E_2} = u_2$ .

Plus généralement :

## Théorème - Description unique sur une famille de supplémentaires

Si  $E_1, \dots, E_p$  sont des s.e.v. de  $E$  (de dimension quelconque) vérifiant  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$  et si  $\forall i, u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ , alors il existe une et une seule application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $\forall i, u|_{E_i} = u_i$

## Démonstration

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

⇒ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

⇒  $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$

1. Problèmes

1. Problèmes

2. Bases et dimension

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

## Matrice d'une famille de vecteurs

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$

### Définition - Matrice d'une famille de $p$ vecteurs

La matrice dans la base  $\mathcal{B}$  d'une famille  $(x_1, \dots, x_p)$  de vecteurs de  $E$  est la matrice dont la  $j$ -ième colonne, pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , est formée des coordonnées de  $x_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ . C'est donc la matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$$

telle que, pour tout  $j$ ,  $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ .

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Écriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

## Matrice d'une famille de vecteurs

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$

### Définition - Matrice d'une famille de $p$ vecteurs

La matrice dans la base  $\mathcal{B}$  d'une famille  $(x_1, \dots, x_p)$  de vecteurs de  $E$  est la matrice dont la  $j$ -ième colonne, pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , est formée des coordonnées de  $x_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ . C'est donc la matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$$

telle que, pour tout  $j$ ,  $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ .

**Exemple** Dans  $\mathbb{R}^2$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Écriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

## Cas particulier $p = 1$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

### Heuristique - Cas particulier $p = 1$ : la « matrice du vecteur $x$ dans $\mathcal{B}$ »

Dans le cas particulier d'une famille à un vecteur  $x$ , la matrice  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$  est une matrice colonne, c'est la matrice colonne formée des coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On parle souvent de la « matrice du vecteur  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  ».

Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x &\mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \end{aligned}$$

est alors un isomorphisme d'espaces vectoriels. On identifie donc usuellement matrices colonnes (à  $n$  lignes) et vecteurs de  $\mathbb{K}^n$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Écriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# Matrice d'une application linéaire

## Définition - Matrice d'un morphisme $u$

$E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ ev, de dimension resp.  $n$  et  $p$ ).

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$  bases de  $E$  et de  $F$  resp..

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_j) \in F$  et donc on peut

$$\text{écrire } u(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} f_i.$$

On appelle **matrice de**  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ , la matrice :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \mathcal{M}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq n}$$

$a_{ij}$  désigne la  $i$ -ième coordonnée de  $u(e_j)$  dans  $\mathcal{C}$ .

C'est la matrice dans  $\mathcal{C}$  de la famille  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ .

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Attention - Taille de la matrice

Il s'agit d'une matrice à  $n$  colonnes (nombre de vecteurs d'une base de l'ensemble de départ) et  $p$  lignes (dimension de l'ensemble d'arrivée), soit  $p$  lignes et  $n$  colonnes.

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Attention - Taille de la matrice

Il s'agit d'une matrice à  $n$  colonnes (nombre de vecteurs d'une base de l'ensemble de départ) et  $p$  lignes (dimension de l'ensemble d'arrivée), soit  $p$  lignes et  $n$  colonnes.

**Exemple** Matrice de  $P \mapsto P'$  ( $n = 3$ )

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Écriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Théorème - Réciproquement de la matrice au morphisme

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v.,  $\dim E = n$ ,  $\dim F = p$ . On suppose fixées  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ . Alors, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = A$ .

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# De la matrice au morphisme

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Théorème - Réciproquement de la matrice au morphisme

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v.,  $\dim E = n$ ,  $\dim F = p$ . On suppose fixées  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ . Alors, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = A$ .

## Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

## Proposition - Calcul matriciel de l'opération $u(x)$

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v.,  $\dim E = n$ ,  $\dim F = p$ . On suppose fixées  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ .

Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ ,  $X$  la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur  $x$  de  $E$  dans la base  $\mathcal{B}$ , alors la matrice colonne  $Y$  des coordonnées de  $y = u(x)$  dans la base  $\mathcal{C}$  est donnée par la relation  $Y = AX$ .

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# De la matrice au morphisme

## Proposition - Calcul matriciel de l'opération $u(x)$

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v.,  $\dim E = n$ ,  $\dim F = p$ . On suppose fixées  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ .

Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ ,  $X$  la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur  $x$  de  $E$  dans la base  $\mathcal{B}$ , alors la matrice colonne  $Y$  des coordonnées de  $y = u(x)$  dans la base  $\mathcal{C}$  est donnée par la relation  $Y = AX$ .

## Démonstration

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

# De la matrice au morphisme

## Proposition - Calcul matriciel de l'opération $u(x)$

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v.,  $\dim E = n$ ,  $\dim F = p$ . On suppose fixées  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ .

Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ ,  $X$  la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur  $x$  de  $E$  dans la base  $\mathcal{B}$ , alors la matrice colonne  $Y$  des coordonnées de  $y = u(x)$  dans la base  $\mathcal{C}$  est donnée par la relation  $Y = AX$ .

## Démonstration

## Corollaire - Nouveau critère d'égalité matriciel

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . Alors :

$$\left( \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = BX \right) \Rightarrow A = B$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# De la matrice au morphisme

## Proposition - Calcul matriciel de l'opération $u(x)$

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -e.v.,  $\dim E = n$ ,  $\dim F = p$ . On suppose fixées  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$ .

Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ ,  $X$  la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur  $x$  de  $E$  dans la base  $\mathcal{B}$ , alors la matrice colonne  $Y$  des coordonnées de  $y = u(x)$  dans la base  $\mathcal{C}$  est donnée par la relation  $Y = AX$ .

## Démonstration

## Corollaire - Nouveau critère d'égalité matriciel

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . Alors :  
 $(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = BX) \Rightarrow A = B$

## Démonstration

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Définition - Matrice d'un endomorphisme

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors, pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  s'appelle la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  et se note simplement  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$  (ou  $\mathcal{M}(u, \mathcal{B})$ ).

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
  - 3.1. Détermination
  - 3.2. Matrice d'une application linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Définition - Matrice d'un endomorphisme

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors, pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  s'appelle la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  et se note simplement  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$  (ou  $\mathcal{M}(u, \mathcal{B})$ ).

**Exemple** Dans  $\mathbb{R}^2$

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
  - 3.1. Détermination
  - 3.2. Matrice d'une application linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Définition - Matrice d'un endomorphisme

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors, pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  s'appelle la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  et se note simplement  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$  (ou  $\mathcal{M}(u, \mathcal{B})$ ).

**Exemple** Dans  $\mathbb{R}^2$

### Exercice

Quelle est la matrice dans la base  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$  de la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice ?

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# $\mathcal{L}(F, G)$ & $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ isomorphes

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Théorème - L'application linéaire $u \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels ( $\dim E = n, \dim F = p$ )  
de bases respectives  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, u, v \in \mathcal{L}(E, F), \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) + \beta \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(v).$$

L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ u &\mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \end{aligned}$$

est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie
  - 3.1. Détermination
  - 3.2. Matrice d'une application linéaire

# $\mathcal{L}(F, G)$ & $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ isomorphes

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Théorème - Produit matriciel et composition

Soient trois espaces vectoriels  $E, F, G$  munis des bases respectives  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ , et deux applications linéaires  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors la matrice de  $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$  est donnée par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Écriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# $\mathcal{L}(F, G)$ & $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ isomorphes

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Théorème - Produit matriciel et composition

Soient trois espaces vectoriels  $E, F, G$  munis des bases respectives  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ , et deux applications linéaires  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors la matrice de  $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$  est donnée par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$$

## Démonstration

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Écriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Remarque Nouvelle interprétation du produit matriciel

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Remarque Nouvelle interprétation du produit matriciel

### Corollaire

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . L'application  $u \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$  est un isomorphisme d'algèbres de  $\mathcal{L}(E)$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (isomorphisme d'espaces vectoriels et morphisme d'anneaux)

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

## Bijection et réciproque

### Proposition - Bijection de $u$ et inversibilité de $M$

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de même dimension  $n$  (en particulier on peut avoir  $E = F$ ) de bases respectives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ ,

Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ .

Alors  $u$  est bijective si et seulement si  $A$  est inversible.

Et alors  $A^{-1} = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1})$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

## Bijection et réciproque

### Proposition - Bijection de $u$ et inversibilité de $M$

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de même dimension  $n$  (en particulier on peut avoir  $E = F$ ) de bases respectives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ ,  
Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ .  
Alors  $u$  est bijective si et seulement si  $A$  est inversible.

Et alors  $A^{-1} = M_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u^{-1})$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

### Savoir-faire. Exploitation

Ce résultat peut être utilisé de deux façons :

- ▶ Pour trouver l'isomorphisme réciproque de  $u$ , on calcule l'inverse de la matrice de  $u$  (voir plus loin pour les méthodes).
- ▶ Pour trouver l'inverse d'une matrice, on peut parfois la reconnaître comme la matrice d'un isomorphisme dont on sait facilement exprimer l'endomorphisme réciproque.

## Bijection et réciproque

### Proposition - Bijection de $u$ et inversibilité de $M$

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de même dimension  $n$  (en particulier on peut avoir  $E = F$ ) de bases respectives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ ,  
Soit  $u$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ .  
Alors  $u$  est bijective si et seulement si  $A$  est inversible.

Et alors  $A^{-1} = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1})$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$$

- 1. Problèmes
- 2. Bases et dimension
- 3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
  - 3.1. Détermination
  - 3.2. Matrice d'une application linéaire

### Savoir-faire. Exploitation

Ce résultat peut être utilisé de deux façons :

- ▶ Pour trouver l'isomorphisme réciproque de  $u$ , on calcule l'inverse de la matrice de  $u$  (voir plus loin pour les méthodes).
- ▶ Pour trouver l'inverse d'une matrice, on peut parfois la reconnaître comme la matrice d'un isomorphisme dont on sait facilement exprimer l'endomorphisme réciproque.

### Démonstration

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Exercice

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  définie par  $a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$  (avec la convention  $\binom{j}{i} = 0$  si  $j < i$ ) pour  $i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$ . Justifier l'inversibilité de  $A$  et déterminer  $A^{-1}$ .

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# Réciproquement, application canoniquement associée à une matrice

## Heuristique. Identification

L'application de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  qui à  $x = (x_1, \dots, x_n)$  associe

la matrice colonne  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  est un isomorphisme naturel

("canonique") entre  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Il permet d'identifier un  $n$ -uplet  $x$  avec la matrice colonne  $X$ .

D'autre part, on sait que si  $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ , alors  $u$  est de la forme

$$u : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{pmatrix} \quad \text{où } \begin{matrix} \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ a_{ij} \in \mathbb{K} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

# Réciproquement, application canoniquement associée à une matrice

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Définition - Application canoniquement associée à $A$

Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , alors il existe une unique application linéaire  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$  telle que la matrice de  $u$  dans les bases canoniques respectives de  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}^p$  soit  $A$ . On dit alors que  $u$  est canoniquement associée à  $A$ .

$u$  peut alors être identifiée à l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n,1} &\rightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

1. Problèmes

2. Bases et dimension

3. Écriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application linéaire

# Noyau, image d'une matrice

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

**Remarque** Convention d'usage

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

# Noyau, image d'une matrice

**Remarque** Convention d'usage

## Proposition - Noyau, image

Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  et  $u$  l'application linéaire canoniquement associée.

On rappelle que :

$$\text{Ker } A = \{X \in \mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{\mathbb{K}^p}\}$$

$$\text{Im } A = \{Y \in \mathbb{K}^p \equiv \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), Y = AX\}.$$

Par les identifications précédentes  $\text{Ker } A = \text{Ker } u$  et

$\text{Im } A = \text{Im } u$ .

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Proposition - Blocs nuls et stabilité

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces supplémentaires de  $E$   $\mathbb{K}$ -e.v. ( $\dim E = n, \dim F = p$ ) et  $u \in \mathcal{L}(E)$  telle que la matrice de  $u$  s'écrive, dans une base adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ , par blocs  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  (avec  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ). Alors :

- ▶  $F$  est stable par  $u$  si et seulement si  $C = O_{n-p,p}$  ; dans ce cas  $A = \mathcal{M}(u|_F)$
- ▶  $G$  est stable par  $u$  si et seulement si  $B = O_{p,n-p}$  ; dans ce cas  $D = \mathcal{M}(u|_G)$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Écriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# Réinterprétation du produit par blocs

## Proposition - Blocs nuls et stabilité

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces supplémentaires de  $E$   $\mathbb{K}$ -e.v. ( $\dim E = n, \dim F = p$ ) et  $u \in \mathcal{L}(E)$  telle que la matrice de  $u$  s'écrive, dans une base adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ , par blocs  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  (avec  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ). Alors :

- ▶  $F$  est stable par  $u$  si et seulement si  $C = O_{n-p,p}$  ; dans ce cas  $A = \mathcal{M}(u|_F)$
- ▶  $G$  est stable par  $u$  si et seulement si  $B = O_{p,n-p}$  ; dans ce cas  $D = \mathcal{M}(u|_G)$

## Démonstration

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Exercice

Montrer que les projecteurs et les symétries ont, dans des bases bien choisies, des matrices par blocs très simples.

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Exercice

Montrer que les projecteurs et les symétries ont, dans des bases bien choisies, des matrices par blocs très simples.

## **Remarque** Généralisation

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Objectifs

⇒ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

1. Problèmes
2. Bases et dimension
3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie
  - 3.1. Détermination
  - 3.2. Matrice d'une application linéaire

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

- ▶ Etant donnée une base de  $E$  (dim  $n$ ),  
 $(x_1, \dots, x_p) \in E^p \rightarrow (X_1, \dots, X_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

- ▶ Etant donnée une base de  $E$  (dim  $n$ ),  
 $(x_1, \dots, x_p) \in E^p \rightarrow (X_1, \dots, X_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- ▶ de même  $u \in \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  (avec  $n = \dim F$ , et  
 $p = \dim E$  (à partir de la famille des images des vecteurs d'une  
base)

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

- ▶ Etant donnée une base de  $E$  (dim  $n$ ),  
 $(x_1, \dots, x_p) \in E^p \rightarrow (X_1, \dots, X_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- ▶ de même  $u \in \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  (avec  $n = \dim F$ , et  
 $p = \dim E$  (à partir de la famille des images des vecteurs d'une  
base)
- ▶ Réciproquement : pour  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ .

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

- ▶ Etant donnée une base de  $E$  (dim  $n$ ),  
 $(x_1, \dots, x_p) \in E^p \rightarrow (X_1, \dots, X_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- ▶ de même  $u \in \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  (avec  $n = \dim F$ , et  
 $p = \dim E$  (à partir de la famille des images des vecteurs d'une  
base)
- ▶ Réciproquement : pour  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \rightarrow \Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ .
- ▶ Définitions de  $\text{Im } M$ ,  $\text{Ker } M$

⇒  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$$

## Objectifs

⇒ Matrice d'une application linéaire (dans des bases !)

## Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 28 : Espace vectoriels de dimension finie
  - 4. Rang
- ▶ Exercice n° 532 & 537

1. Problèmes

2. Bases et  
dimension

3. Ecriture d'une  
application linéaire en  
dimension finie

3.1. Détermination

3.2. Matrice d'une application  
linéaire