



⇒ Motivations et construction du déterminant

⇒ Extensions aux familles de vecteurs, aux matrices

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## 1. Problèmes

## 2. Applications multilinéaires

### 2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  $n$ -linéaire alternée relativement à une base donnée

## 3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

### 1. Problèmes

### 2. Applications multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

### 3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

Existe-t-il une « fonction » qui indique par un calcul, pour toute matrice, si celle-ci est inversible ou non ?

## 1. Problèmes

### 2. Applications multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

### 3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

Existe-t-il une « fonction » qui indique par un calcul, pour toute matrice, si celle-ci est inversible ou non ?

**Problème** Réflexion selon la dimension

## 1. Problèmes

## 2. Applications multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

## 3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

Existe-t-il une « fonction » qui indique par un calcul, pour toute matrice, si celle-ci est inversible ou non ?

**Problème** Réflexion selon la dimension

**Problème** Réflexion selon la famille de colonnes

## 1. Problèmes

## 2. Applications multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

## 3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## **Problème** Signification de la valeur du déterminant

### 1. Problèmes

### 2. Applications multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

### 3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

**Problème** Signification de la valeur du déterminant

**Problème** Multiplicativité de la fonction déterminant ?

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

**Problème** Signification de la valeur du déterminant

**Problème** Multiplicativité de la fonction déterminant ?

**Problème** Inversion d'une matrice avec le déterminant (Système de Cramer).

## 1. Problèmes

## 2. Applications multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

## 3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

⇒ Motivations et construction du déterminant

⇒ Extensions aux familles de vecteurs, aux matrices

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## 1. Problèmes

## 2. Applications multilinéaires

### 2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  $n$ -linéaire alternée relativement à une base donnée

## 3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

Formes  $n$ -linéaires $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .Définition - Application  $n$ -linéaireSoient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.On dit que  $\Phi : E^n \rightarrow F$  est une application  $n$ -linéaire si

$$\forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \forall (X, Y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

$$\Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, \lambda X + \mu Y, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

$$= \lambda \Phi(\dots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \dots) + \mu \Phi(\dots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \dots)$$

i.e. :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Phi_i : X \mapsto \Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \dots, X_n)$  est linéaire.On note  $\mathcal{L}_n(E, F)$  l'ensemble des app.  $n$ -linéaires de  $E^n$  dans  $F$ .⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Formes $n$ -linéaires

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## Définition - Application $n$ -linéaire

Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

On dit que  $\Phi : E^n \rightarrow F$  est une application  $n$ -linéaire si

$$\forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \forall (X, Y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

$$\Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, \lambda X + \mu Y, X_{i+1}, \dots, X_n)$$

$$= \lambda \Phi(\dots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \dots) + \mu \Phi(\dots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \dots)$$

i.e. :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \Phi_i : X \mapsto \Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, X, X_{i+1}, \dots, X_n)$  est linéaire.

On note  $\mathcal{L}_n(E, F)$  l'ensemble des app.  $n$ -linéaires de  $E^n$  dans  $F$ .

## Définition - Forme $n$ -linéaire

Si  $\Phi$  est une application  $n$ -linéaire de  $E^n$  dans  $\mathbb{K}$ ,  
on dit que  $\Phi$  est une forme  $n$ -linéaire sur  $E$ . ( $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_n(E)$ )

=> Motivations et  
construction du  
déterminant

=> Extensions

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Symétrique/antisymétrique

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Définition -Forme $n$ -linéaire symétrique ou antisymétrique

On dit que  $\Phi$ , forme  $n$ -linéaire sur  $E$ , est :

- ▶ symétrique si

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \\ \Phi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \Phi(X_1, \dots, X_n)$$

- ▶ antisymétrique si

$$\forall \sigma \in S_n, \forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \\ \Phi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\Phi(X_1, \dots, X_n)$$

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Symétrique/antisymétrique

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Proposition - Caractérisation et permutation

$\Phi$  est symétrique si et seulement si, lorsque l'on échange deux vecteurs quelconques, le résultat est inchangé.

$\Phi$  est antisymétrique si et seulement si, lorsque l'on échange deux vecteurs quelconques, le résultat est transformé en son opposé.

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Symétrique/antisymétrique

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Proposition - Caractérisation et permutation

$\Phi$  est symétrique si et seulement si, lorsque l'on échange deux vecteurs quelconques, le résultat est inchangé.

$\Phi$  est antisymétrique si et seulement si, lorsque l'on échange deux vecteurs quelconques, le résultat est transformé en son opposé.

## Démonstration

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Forme alternée

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Définition - Forme $n$ -linéaire alternée

Une forme  $n$ -linéaire  $\Phi$  sur  $E$  est dite alternée si

$$\forall i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i = X_j \Rightarrow \Phi(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_n) = 0.$$

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Forme alternée et antisymétrie

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Théorème - Equivalence : alternée et antisymétrique

Soit  $\Phi$  une forme  $n$ -linéaire sur  $E$ . Alors on a  
 $\Phi$  antisymétrique  $\iff \Phi$  alternée

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Forme alternée et antisymétrie

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Théorème - Equivalence : alternée et antisymétrique

Soit  $\Phi$  une forme  $n$ -linéaire sur  $E$ . Alors on a  
 $\Phi$  antisymétrique  $\iff \Phi$  alternée

### Démonstration

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

⇒ Motivations et construction du déterminant

⇒ Extensions aux familles de vecteurs, aux matrices

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## 1. Problèmes

## 2. Applications multilinéaires

### 2.1. Définitions

### 2.2. Expression d'une forme $n$ -linéaire alternée relativement à une base donnée

## 3. Déterminant

### 3.1. Déterminant de $n$ vecteurs

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Image d'une base

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

On sait qu'une application linéaire est parfaitement définie par l'image d'une base. Qu'en est-il d'une forme  $n$ -linéaire (antisymétrique) ?

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Image d'une base

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

On sait qu'une application linéaire est parfaitement définie par l'image d'une base. Qu'en est-il d'une forme  $n$ -linéaire (antisymétrique) ?

**Analyse** Ecriture sur une base pour une forme alternée

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

## Image d'une base

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

Cette analyse donne la démonstration de la proposition suivante :

### Proposition - Ecriture selon une base

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dim.  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

On considère  $\Phi \in \mathcal{A}_n(E)$  (forme  $n$ -linéaire alternée).

Soit  $(X_1, \dots, X_n) \in E^n$ . Alors

$$\Phi(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1),1} x_{\sigma(2),2} \dots x_{\sigma(n),n} \epsilon(\sigma) \Phi(e_1, \dots, e_n)$$

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

⇒ Motivations et construction du déterminant

⇒ Extensions aux familles de vecteurs, aux matrices

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## 1. Problèmes

## 2. Applications multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  $n$ -linéaire alternée relativement à une base donnée

## 3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

## Définition

Définition - Déterminant de  $n$  vecteurs

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ ev de dimension  $n$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  vecteurs de  $E$ ,  $X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$ .

On appelle déterminant de  $(X_1, \dots, X_n)$  dans la base  $\mathcal{E}$  le scalaire

$$\det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}.$$

On note  $\det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$ .

⇒ Motivations et construction du déterminant

⇒ Extensions

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  $n$ -linéaire alternée relativement à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

## Définition

Définition - Déterminant de  $n$  vecteurs

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ ev de dimension  $n$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  vecteurs de  $E$ ,  $X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$ .

On appelle déterminant de  $(X_1, \dots, X_n)$  dans la base  $\mathcal{E}$  le scalaire

$$\det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}.$$

On note  $\det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$ .

**Remarque** Pour  $n = 2$  ou  $n = 3$  on a

⇒ Motivations et construction du déterminant

⇒ Extensions

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  $n$ -linéaire alternée relativement à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Forme alternée

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Théorème - Propriété (essentielle) du déterminant

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}} : E^n &\rightarrow \mathbb{K} \\ (X_1, \dots, X_n) &\mapsto \det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

est une forme  $n$ -linéaire alternée telle que  $\det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Forme alternée

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Théorème - Propriété (essentielle) du déterminant

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{E}} : E^n &\rightarrow \mathbb{K} \\ (X_1, \dots, X_n) &\mapsto \det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

est une forme  $n$ -linéaire alternée telle que  $\det_{\mathcal{E}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

## Démonstration

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Structure algébrique de $\mathcal{A}_n(E)$

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Théorème - Structure algébrique de $\mathcal{A}_n(E)$

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Alors l'ensemble  $\mathcal{A}_n(E)$  des formes  $n$ -linéaires alternées est une droite vectorielle, engendrée par  $\det_{\mathcal{E}}$ .

$\det_{\mathcal{E}}$  est l'unique forme  $n$ -linéaire alternée  $\Phi$  telle que  $\Phi(e_1, \dots, e_n) = 1$ , les autres formes  $n$ -linéaires alternées lui sont proportionnelles.

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Structure algébrique de $\mathcal{A}_n(E)$

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Théorème - Structure algébrique de $\mathcal{A}_n(E)$

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Alors l'ensemble  $\mathcal{A}_n(E)$  des formes  $n$ -linéaires alternées est une droite vectorielle, engendrée par  $\det_{\mathcal{E}}$ .

$\det_{\mathcal{E}}$  est l'unique forme  $n$ -linéaire alternée  $\Phi$  telle que  $\Phi(e_1, \dots, e_n) = 1$ , les autres formes  $n$ -linéaires alternées lui sont proportionnelles.

## Démonstration

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Lien avec les bases

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Théorème - Changement de base

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  des bases de  $E$ . Soit  $(X_1, \dots, X_n) \in E^n$ . Alors

$$\det_{\mathcal{E}'}(X_1, \dots, X_n) = \det_{\mathcal{E}'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n)$$

c'est-à-dire :  $\det_{\mathcal{E}'} = \det_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) \times \det_{\mathcal{E}}$

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Lien avec les bases

⇒ Motivations et construction du déterminant

⇒ Extensions

## Théorème - Changement de base

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n$ ,  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  des bases de  $E$ . Soit  $(X_1, \dots, X_n) \in E^n$ . Alors

$$\det_{\mathcal{E}'}(X_1, \dots, X_n) = \det_{\mathcal{E}'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_{\mathcal{E}}(X_1, \dots, X_n)$$

c'est-à-dire :  $\det_{\mathcal{E}'} = \det_{\mathcal{E}'}(\mathcal{E}) \times \det_{\mathcal{E}}$

## Démonstration

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  $n$ -linéaire alternée relativement à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Lien avec les bases

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Théorème - Caractérisation des bases

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n$ ,  $\mathcal{E}$  une base de  $E$ ,  
 $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors

$$\mathcal{B} \text{ base de } E \iff \det_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) \neq 0$$

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Lien avec les bases

⇒ Motivations et construction du déterminant

⇒ Extensions

## Théorème - Caractérisation des bases

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n$ ,  $\mathcal{E}$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Alors

$$\mathcal{B} \text{ base de } E \iff \det_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) \neq 0$$

## Démonstration

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  $n$ -linéaire alternée relativement à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Orientation

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Définition - Orientation d'un espace

Soit  $\mathcal{B}_0$  une base donnée de  $E$  et  $\mathcal{B}$  une autre base. On sait que  $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \neq 0$ .

Les bases de  $E$  se classent donc en deux ensembles : celles telles que  $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$  et celles telles que  $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$ .

On oriente donc  $E$  en choisissant une base  $\mathcal{B}_0$  de référence qui sera dite directe,

les bases  $\mathcal{B}$  telles que  $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$  sont dites directes,

les bases  $\mathcal{B}$  telles que  $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$  sont dites indirectes.

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Conclusion

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

- ▶ Propriétés essentielles :
  - ▶ La  $n$ -linéarité
  - ▶ La propriété d'être alternées

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

- ▶ Propriétés essentielles :
  - ▶ La  $n$ -linéarité
  - ▶ La propriété d'être alternées
- ▶ Donc l'antisymétrie.

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Motivations et construction du déterminant

- ▶ Propriétés essentielles :
  - ▶ La  $n$ -linéarité
  - ▶ La propriété d'être alternées
- ▶ Donc l'antisymétrie.
- ▶ Or L'espace des formes  $n$ -linéaires alternées définies sur  $E$  est un espace vectoriel de dimension 1.

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs

# Conclusion

⇒ Motivations et  
construction du  
déterminant

⇒ Extensions

## Objectifs

⇒ Motivations et construction du déterminant

## Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 28 : Déterminants  
3. Déterminant & 4. Calculs et applications .
- ▶ Exercice n°706 & 710

1. Problèmes

2. Applications  
multilinéaires

2.1. Définitions

2.2. Expression d'une forme  
 $n$ -linéaire alternée relativement  
à une base donnée

3. Déterminant

3.1. Déterminant de  $n$  vecteurs