Leçon 91 - Déterminants

3 avril 2026

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

Définition

Définition - Déterminant de n vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n vecteurs de E, $X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}_{\mathscr{E}}$.

On appelle déterminant de $(X_1, \ldots, X_n)$ dans la base $\mathscr{E}$ le scalaire

$$\det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \ldots x_{\sigma(n),n}.$$

On note $\det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}$.

Structure algébrique de $\mathscr{A}_n(E)$

Théorème - Structure algébrique de $\mathscr{A}_n(E)$

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Alors l'ensemble $\mathscr{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées est une droite vectorielle, engendrée par $\det_{\mathscr{E}}$.

$\det_{\mathscr{E}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée Φ telle que $\Phi(e_1, \dots, e_n) = 1$, les autres formes n-linéaires alternées lui sont proportionnelles.

Lien avec les bases

Théorème - Changement de base

Soient E un $\mathbb{K}$-e-v. de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ des bases de E. Soit $(X_1, \ldots, X_n) \in E^n$. Alors $\det_{\mathscr{E}'}(X_1, \ldots, X_n) = \det_{\mathscr{E}'}(e_1, \ldots, e_n) \times \det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n)$
c'est-à-dire $\det_{\mathscr{E}'} = \det_{\mathscr{E}'}(\mathscr{E}) \times \det_{\mathscr{E}}$

Lien avec les bases

Théorème - Caractérisation des bases

Soient E un $\mathbb{K}$-e-v. de dimension n, $\mathscr{E}$ une base de E, $\mathscr{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors

$$\mathscr{B} \text{ base de } E \Longleftrightarrow \det_{\mathscr{E}}(\mathscr{B}) \neq 0$$

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

Défintiion

Définition - Déterminant d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le scalaire $\det_{\mathscr{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est indépendant de $\mathscr{E}$. On le note $\det(u)$ ou $\det u$ (déterminant de l'endomorphisme u) et

$$\forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \det_{\mathscr{E}}(u(X_1), \dots, u(X_n)) = \det(u) \times \det_{\mathscr{E}}(X_1, \dots, X_n).$$

Défintiion

Définition - Déterminant d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le scalaire $\det_{\mathscr{E}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est indépendant de $\mathscr{E}$. On le note $\det(u)$ ou $\det u$ (déterminant de l'endomorphisme u) et

$$\forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n, \det_{\mathscr{E}}(u(X_1), \dots, u(X_n)) = \det(u) \times \det_{\mathscr{E}}(X_1, \dots, X_n).$$

Il faut faire une démonstration, bien que ce soit une définition : l'indépendance selon la base.

Défintiion

Définition - Déterminant d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le scalaire $\det_{\mathscr{E}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est indépendant de $\mathscr{E}$. On le note $\det(u)$ ou $\det u$ (déterminant de l'endomorphisme u) et

$$\forall (X_1, \ldots, X_n) \in E^n, \det_{\mathscr{E}}(u(X_1), \ldots, u(X_n)) = \det(u) \times \det_{\mathscr{E}}(X_1, \ldots, X_n).$$

Il faut faire une démonstration, bien que ce soit une définition : l'indépendance selon la base.

Démonstration

On montre que $\Phi_u : (X_1, \ldots X_n) \mapsto \det_{\mathscr{E}}(u(X_1), \ldots u(X_n))$ est forme n-linéaire alternée.

Propriétés

Théorème - Déterminant et inverse d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$.
On a $u \in GL(E) \Longleftrightarrow \det u \neq 0$

Propriétés

Théorème - Déterminant et inverse d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$.
On a $u \in GL(E) \Longleftrightarrow \det u \neq 0$

Démonstration

Propriétés

Théorème - Déterminant et inverse d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$.
On a $u \in GL(E) \Longleftrightarrow \det u \neq 0$

Démonstration

Proposition - Premiers résultats

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ où E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n.
Alors

- $\det Id_E = 1$
- $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$
- $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$
- Si $u \in GL(E)$, alors $\det u^{-1} = \dfrac{1}{\det u}$

Propriétés

Théorème - Déterminant et inverse d'endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$.
On a $u \in GL(E) \Longleftrightarrow \det u \neq 0$

Démonstration

Proposition - Premiers résultats

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ où E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n.
Alors

- $\det Id_E = 1$
- $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$
- $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$
- Si $u \in GL(E)$, alors $\det u^{-1} = \dfrac{1}{\det u}$

Démonstration

Inverse d'un endomorphisme

Attention - Non linéarité (par rapport à l'endomorphisme)

$\det(u+v)$ est en général différent de $\det u + \det v$.

Contre-exemple à avoir en tête :

$$\det(Id_E + Id_E) = \det(2Id_E) = 2^n \neq 1+1 \text{ pour } n \geqslant 2.$$

Inverse d'un endomorphisme

Attention - Non linéarité (par rapport à l'endomorphisme)

$\det(u+v)$ est en général différent de $\det u + \det v$.
Contre-exemple à avoir en tête :

$$\det(Id_E + Id_E) = \det(2Id_E) = 2^n \neq 1+1 \text{ pour } n \geqslant 2.$$

Remarque Morphisme de groupes
$\det_{|GL(E)}$ est un morphisme du groupe $GL(E)$ sur le groupe $\mathbb{K}^*$

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

Définition

Définition - Déterminant d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A (éléments de $\mathbb{K}^n$).
On pose alors
$\det A = \det_{\mathscr{E}}(C_1, \dots, C_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}$,

$$\text{noté } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Savoir-faire

Truc & Astuce pour le calcul - Cas $n = 2$ ou $n = 3$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} =$$

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1} - a_{3,3}a_{1,2}a_{2,1}.$$

Lien avec l'endomorphisme

Théorème - Commutativité de det et de $u \mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{E}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \mathscr{M}_{\mathscr{E}}(u)$. Alors $\det u = \det A$

Lien avec l'endomorphisme

Théorème - Commutativité de det et de $u \mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{E}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \mathscr{M}_{\mathscr{E}}(u)$. Alors $\det u = \det A$

Démonstration

Premières propriétés

Proposition - Premières propriétés

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- $\det I_n = 1$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- $\det(AB) = \det A \times \det B$
- A est inversible ssi $\det A \neq 0$ et alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
- deux matrices semblables ont même déterminant
- $\det({}^t A) = \det A$

Premières propriétés

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

Proposition - Premières propriétés

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

- $\det I_n = 1$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- $\det(AB) = \det A \times \det B$
- A est inversible ssi $\det A \neq 0$ et alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
- deux matrices semblables ont même déterminant
- $\det({}^t A) = \det A$

Démonstration

Corollaire

Corollaire - Déterminant en lignes

Si $L_1, \dots, L_n$ désignent les lignes de A, alors $\det A$ est le déterminant des vecteurs lignes de A i.e.
$\det A = \det({}^tL_1, \dots, {}^tL_n)$.

Corollaire

Corollaire - Déterminant en lignes

Si $L_1,\dots,L_n$ désignent les lignes de A, alors $\det A$ est le déterminant des vecteurs lignes de A i.e.
$\det A = \det({}^tL_1,\dots,{}^tL_n)$.

Démonstration

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

Exercice

Exercice

On note $E=\mathbb{R}^3$. Soit $a,b,c\in E$ et $f\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que :

$$\det(f(a),b,c)+\det(a,f(b),c)+\det(a,b,f(c))=\mathrm{tr}(f)\times\det(a,b,c)$$

Savoir-faire

Savoir-faire. Liste de bonnes habitudes

1. On ne change pas le déterminant d'une matrice en ajoutant à l'un des vecteurs colonnes (resp. lignes) une combinaison linéaire des autres vecteurs colonnes (resp.lignes).
2. Le déterminant d'une matrice dépend linéairement de chacun des vecteurs colonnes (resp. lignes).
3. Si on effectue une permutation σ sur les vecteurs colonnes (resp. lignes) le déterminant est multipliés par $\epsilon(\sigma)$ (par -1 dans le cas d'un échange de deux colonnes ou deux lignes)
4. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des éléments diagonaux.

Exemples

Exemple Opération sur les colonnes

Exemples

Exemple Opération sur les colonnes

Exemple Dépendance linéaire

Exemples

Exemple Opération sur les colonnes

Exemple Dépendance linéaire

On démontre le résultat concernant les matrices diagonales.

Démonstration

Exemples

Exemple Opération sur les colonnes

Exemple Dépendance linéaire

On démontre le résultat concernant les matrices diagonales.

Démonstration

Exercice

Avec les règles précédentes, montrer que

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs
- Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det A^{i\wedge k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det A^{k\wedge j}$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs
- Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne :
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det A^{i\wedge k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det A^{k\wedge j}$$
- Déterminant comme polynôme de ces coefficients.
Application au déterminant de Vandermonde

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs
- Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne :
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det A^{i\wedge k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det A^{k\wedge j}$$
- Déterminant comme polynôme de ces coefficients.
Application au déterminant de Vandermonde
- Formule théorique d'inversion d'une matrice avec la comatrice.

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs
- Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne :
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k}\det A^{i\wedge k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j}\det A^{k\wedge j}$$
- Déterminant comme polynôme de ces coefficients.
Application au déterminant de Vandermonde
- Formule théorique d'inversion d'une matrice avec la comatrice.
- Quel lien entre le $\mathrm{rg}(A)$ et $\det$?

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 35 : Séries
- Exercice n°716, 721 & 723
- TD :
  jeudi 8h-10h : 707, 718, 714, 726, 733
  jeudi 10h-12 : 708, 719, 720, 727, 735