Leçon 92 - Déterminants

7 avril 2026

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Formule de Cramer

Proposition - Formule de Cramer

Considérons le système $AX = b$ avec $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $b, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,
$$[X]_i = \frac{\det(C_1(A), \ldots C_{i-1}(A), b, C_{i+1}(A), \ldots C_n(A))}{\det A}.$$

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Formule de Cramer

Proposition - Formule de Cramer

Considérons le système $AX = b$ avec $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $b, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,

$$[X]_i = \frac{\det(C_1(A), \dots C_{i-1}(A), b, C_{i+1}(A), \dots C_n(A))}{\det A}.$$

Démonstration

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Déterminant de matrices par blocs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Proposition - Matrices triangulaires par blocs

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M peut s'écrire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices carrées. Alors on a

$$\det M = \det A \det B.$$

Déterminant de matrices par blocs

Proposition - Matrices triangulaires par blocs

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M peut s'écrire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices carrées. Alors on a

$$\det M = \det A \det B.$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Déterminant de matrices par blocs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Proposition - Matrices triangulaires par blocs

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M peut s'écrire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices carrées. Alors on a

$$\det M = \det A \det B.$$

Démonstration

Remarque Transposé

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Cas d'une matrice triangulaire

En appliquant alors par récurrence le résultat précédent, on obtient la

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Cas d’une matrice triangulaire

En appliquant alors par récurrence le résultat précédent, on obtient la

Proposition - Déterminant d’une matrice triangulaire

Le déterminant d’une matrice diagonale ou triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l’inverse
   - 4.5. Déterminant comme polynôme

Cas d'une matrice triangulaire

En appliquant alors par récurrence le résultat précédent, on obtient la

Proposition - Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

Démonstration

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Mineur. Cofacteur

Définition - Mineur et cofacteur

On appelle mineur d'indice (i,j) de A le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.
On appelle cofacteur d'indice (i,j) le produit du mineur d'indice (i,j) par $(-1)^{i+j}$.

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Théorème - Calcul du déterminant par développement

Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors, $A_{i,j}$ désignant le cofacteur d'indice (i,j) dans la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{i,k}$ développement suivant la k-ième colonne

$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{k,j}$ développement suivant la k-ième ligne

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Théorème - Calcul du déterminant par développement

Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors, $A_{i,j}$ désignant le cofacteur d'indice (i,j) dans la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{i,k}$ développement suivant la k-ième colonne

$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{k,j}$ développement suivant la k-ième ligne

Démonstration

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Exercices

<u>Exercice</u>

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Exercices

Exercice

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice

Soit $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Déterminer une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2}, en déduire D_n.

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

$\det A$ et cofacteurs

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition - Relation linéaire

$$\forall j,k \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \delta_{j,k} \det A$$

$$\forall i,k \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \delta_{i,k} \det A$$

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

$\det A$ et cofacteurs

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition - Relation linéaire

$$\forall j,k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \delta_{j,k} \det A$$

$$\forall i,k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \delta_{i,k} \det A$$

Démonstration

Comatrice

Définition - Comatrice

La matrice $(A_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est appelée la comatrice de A et notée $\mathrm{Com}A$.

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Comatrice

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Définition - Comatrice

La matrice $(A_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est appelée la comatrice de A et notée $\mathrm{Com}A$.

Théorème - Expression de A^{-1} avec la comatrice

$\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A\times{}^t\mathrm{Com}A={}^t\mathrm{Com}A\times A=(\det A)I_n.$

Donc, si $\det A\neq 0$ alors A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{Com}A.$

Démonstration

En pratique ?

<u>Exercice</u>

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $\det(A) \neq 0$. Déterminer A^{-1}.

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

En pratique ?

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $\det(A) \neq 0$. Déterminer A^{-1}.

Savoir-faire. Utilisation de A^{-1} avec la comatrice

Mis à part pour $n = 2$, on n'utilise pas cette formule pour calculer A^{-1} car les calculs sont trop longs. Quelle est leur complexité ? $n! \times n$ pour δ et $(n-1)! \times (n-1)$ par chacun des n^2 coefficients. Donc au total $O(n^2 \times n!)\dots$

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications des déterminants
   - 4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
   - 4.2. Déterminant de matrices par blocs
   - 4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
   - 4.4. Calcul de l'inverse
   - 4.5. Déterminant comme fonction polynomiale

Savoir-faire

Savoir-faire. S'il y a un x comme coefficient(s) de A

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Coef}_{i,\sigma(i)}(A).$$

Si x^k se glisse parmi les coefficients de A_x, alors $\det A_x$ est nécessairement une fonction polynomiale en x. On peut alors :

1. chercher son degré (d), en organisant bien notre réflexion
2. trouver des valeurs particulières pour des valeurs de x particulières et en nombre suffisant ($\geqslant d$) pour en déduire une expression directe et explicite du déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Déterminant de Vandermonde

On va utiliser cette analyse pour démontrer la proposition suivante (déterminant de Vandermonde)

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Déterminant de Vandermonde

On va utiliser cette analyse pour démontrer la proposition suivante (déterminant de Vandermonde)

Proposition - Déterminant de Vandermonde

On note $A(x_1, x_2, .., x_n)$ la matrice qui suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et $V(x_1, x_2, .., x_n)$ le déterminant cette matrice. Alors

$$V(x_1, x_2, .., x_n) = \prod_{(i,j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Déterminant de Vandermonde

On va utiliser cette analyse pour démontrer la proposition suivante (déterminant de Vandermonde)

Proposition - Déterminant de Vandermonde

On note $A(x_1, x_2, .., x_n)$ la matrice qui suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et $V(x_1, x_2, .., x_n)$ le déterminant cette matrice. Alors

$$V(x_1, x_2, .., x_n) = \prod_{(i,j)|1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

Démonstration

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Application du déterminant de Vandermonde

Corollaire - Inversibilité de la matrice Vandermonde

$A(x_1, x_2, .., x_n)$ est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Application du déterminant de Vandermonde

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Corollaire - Inversibilité de la matrice Vandermonde

$A(x_1, x_2, .., x_n)$ est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

<u>Exercice</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$.

On note $e_k : x \mapsto e^{\lambda_k x}$.

Montrer que la famille $(e_1, e_2, \dots e_k)$ est libre si et seulement si $\forall\ i \neq j \leqslant n,\ \lambda_i \neq \lambda_j$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

1. Problèmes

2. Applications multilinéaires

3. Déterminant

4. Calculs et applications

4.1. Formule de Cramer pour inverser un système

4.2. Déterminant de matrices par blocs

4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne

4.4. Calcul de l'inverse

4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs
- Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne :
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det A^{i\wedge k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det A^{k\wedge j}$$

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs
- Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne :
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det A^{i\wedge k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det A^{k\wedge j}$$
- Déterminant comme polynôme de ces coefficients.
Application au déterminant de Vandermonde

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs
- Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne :
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det A^{i\wedge k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det A^{k\wedge j}$$
- Déterminant comme polynôme de ces coefficients.
Application au déterminant de Vandermonde
- Formule théorique d'inversion d'une matrice avec la comatrice.

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

- Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure
- Extension : déterminant par blocs
- Formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne :
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k} \det A^{i\wedge k} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j} \det A^{k\wedge j}$$
- Déterminant comme polynôme de ces coefficients. Application au déterminant de Vandermonde
- Formule théorique d'inversion d'une matrice avec la comatrice.
- Quel lien entre le $\mathrm{rg}(A)$ et $\det$?

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Conclusion

1. Problèmes
2. Applications multilinéaires
3. Déterminant
4. Calculs et applications
4.1. Formule de Cramer pour inverser un système
4.2. Déterminant de matrices par blocs
4.3. Développement suivant une ligne ou une colonne
4.4. Calcul de l'inverse
4.5. Déterminant comme polynôme

Objectifs

⇒ Quelques résultats complémentaires pour le calcul de déterminant

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 37 : Intégrales
- Exercice n°716, 721 & 723
- TD :
  jeudi 8h-10h : 707, 718, 714, 726, 733
  jeudi 10h-12 : 708, 719, 720, 727, 735