CPGE MPSI Le 29.04.17
2016-2017

Devoir Surveillé n°9

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice et un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole ($*$) voire ($**$)
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice - *1h30 environ*

Soit (u_n) une suite de réels non nuls, on lui associe la suite (P_n) définie par :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$$

On dit que le produit (infini) $\prod\limits_{n\geqslant 0} u_n$, de terme général u_n converge,

si la suite (P_n) admet une limite finie **non nulle**. On note alors $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite.

Si la suite (P_n) n'admet pas de limite ou converge vers 0, on dit que le produit $\prod\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

A. Première critère nécessaire. Premier exemple.

1. En considérant le quotient $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ montrer que, pour que le produit infini $\prod\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n = \prod\limits_{p=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{p}\right)$.
   Montrer que : $\forall n \geqslant 1$, $P_n = n + 1$. Quelle est la nature du produit (P_n) ?
   Comment interpréter ce résultat en rapport avec la première question ?
3. Soient un réel a différent de $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $P_n = \prod\limits_{p=1}^{n} \cos \dfrac{a}{2^p}$.
   Pour tout entier naturel n non nul, on note $r_n = P_n \times \sin \dfrac{a}{2^n}$.
   Montrer que (r_n) est une suite géométrique.
   En déduire que le produit (P_n) converge et donner la limite de (P_n) en fonction de a.

B. Utilisation des séries pour étudier le comportement des produits

1. Soit (u_n) une suite qui converge vers 1 et (p_n) le produit associé à cette suite (u_n).
   (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que : $\forall\ n \geqslant n_0,\ u_n > 0$.
   (b) Montrer que les produits infinis $\prod_{k=n_0}^{n} u_k$ et $\prod_{k=0}^{n} u_k$ sont de même nature.
   Cela prouvera que pour montrer la convergence d'un produit,
   il suffit de prouver la convergence du produit des termes positifs de la suite.
2. On suppose maintenant que (v_n) et (w_n) sont deux suites de réels strictement positifs.
   (a) Montrer que le produit $\prod\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(v_n)$ converge.
   Dans ce cas exprimer $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ en fonction de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln(v_n)$.
   (b) Montrer que le produit $\prod\limits_{n\geqslant 0} (1 + w_n)$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge.
   (c) Si de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < w_n < 1$,
   montrer que le produit $\prod_{n\geqslant 0}(1 - w_n)$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ converge.
3. Déterminer la nature des produits infinis suivants :
   (a) $\prod\limits_{n\geqslant 1} \left(1 - \dfrac{1}{4n^2}\right)$
   (b) $\prod\limits_{n\geqslant 1} \left(e^{1/n^\alpha}\right)$ et $\prod\limits_{n\geqslant 1} \left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ en fonction du nombre réel $\alpha > 0$.

(c) $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{n}$

(d) $\displaystyle\prod_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-x/n}$ pour $x \in]0,+\infty[$

C. Un peu d'histoire.

1. Retrouver en utilisant un produit infini, que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
2. Si p est un entier naturel, $p \geqslant 2$, que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k}$?
3. On note $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11\ldots$

   Voici un extrait d'un texte écrit par Leonhard Euler en 1737 (Introduction à l'analyse infinitésimal) :
   « *...Donc la série est toujours composée d'un nombre infini de termes, quel que soit le nombre des facteurs infinis ou finis.*
   Par exemple, on aura $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+$*etc. série où se trouvent tous les nombres qui peuvent être formés seulement par la multiplication du nombre deux : c'est à dire toute les puissances de deux.*
   On aura ensuite $\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)} = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{18}+$*etc. On ne retrouve ici que les nombres formés par la combinaison des nombres 2 et 3, ou qui n'ont d'autres diviseurs que 2 et 3. Donc si au lieu de α, β, γ, δ etc. on écrit l'unité divisée par tous les nombres premiers, et qu'on suppose* $P = \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\,etc}$, *on aura* $P = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}+$*etc., série qui comprend tous les nombres, tant les nombres premiers que ceux qui auront été formés par la multiplication. Or, comme tous les nombres sont ou des nombres premiers ou des nombres composés de ceux-ci par la multiplication, il est évident qu'on doit trouver tous les nombres entiers dans les dénominateurs...* »

   Utiliser librement ce texte pour montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Problème - *2h30 environ*

Le but de ce problème est de montrer la formule dite de condensation sur les déterminants et d'en explorer les applications et généralisations.

Notations.

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- On note $M_{i,j}$ le coefficient de M qui se trouve sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.
- On note M^T sa transposée définie par ${M^T}_{i,j} = M_{j,i}$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
- Pour $n \geq 2$ et $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on note $[M]_i^j$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de M en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne.
- Plus généralement, si $r \geqslant 0$.
  Pour $n \geqslant r+1$ et $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_r \in \{1, \ldots, n\}$, vérifiant $i_k \neq i_l$ et $j_k \neq j_l$ si $k \neq l$, on note $[M]_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de M en enlevant les lignes d'indices $i_1, \ldots, i_r$ et les colonnes $j_1, \ldots, j_r$.
  On conviendra que cette matrice vaut M si $r = 0$.
- On note $com(M)$ la comatrice de M définie par

$$com(M)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det[M]_i^j$$

- On désignera par I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

I. Formule de condensation.

On se propose de montrer dans cette partie la formule de Desnanot-Jacobi, dite de *condensation*, suivante où n est un entier $\geqslant 3$:

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(M)\det[M]_{1,n}^{1,n} = \det[M]_1^1 \det[M]_n^n - \det[M]_n^1 \det[M]_1^n \qquad (1)$$

1. Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Calculer

$$M_{i,1} \det[M]_i^1 - M_{i,2} \det[M]_i^2 + \cdots + (-1)^{n-1} M_{i,n} \det[M]_i^n$$

   en fonction de $\det(M)$ et de i.

2. Montrer que

$$M_{j,1} \det[M]_i^1 - M_{j,2} \det[M]_i^2 + \cdots + (-1)^{n-1} M_{j,n} \det[M]_i^n = 0$$

   pour $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, vérifiant $i \neq j$.

3. *Déduire des deux questions précédentes* le fait que $M \times com(M)^T = xI_n$ où x est un nombre réel que l'on précisera.

On introduit la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$M^* = \begin{pmatrix} \det[M]_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n+1}\det[M]_n^1 \\ -\det[M]_1^2 & 1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n+2}\det[M]_n^2 \\ \det[M]_1^3 & 0 & 1 & \dots & 0 & (-1)^{n+3}\det[M]_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n\det[M]_1^{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -\det[M]_n^{n-1} \\ (-1)^{n+1}\det[M]_1^n & 0 & 0 & \dots & 0 & \det[M]_n^n \end{pmatrix}$$

Autrement dit, M^* est obtenue à partir de $com(M)^T$ en remplaçant, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ et chaque $j \in \{2, \dots, n-1\}$ le coefficient ${com(M)^T}_{i,j}$ par 0 si $i \neq j$ et par 1 si $i = j$.

4. Calculer $\det(M^*)$ en fonction de $\det[M]_1^1$, $\det[M]_n^n$, $\det[M]_n^1$ et $\det[M]_1^n$.
5. Ecrire le calcul explicite de la matrice produit $M \times M^*$ sous la forme du tableau usuel de taille $n \times n$.
6. En utilisant la question précédente, démontrer (1) dans le cas où M est inversible.
7. (*) Démontrer (1) dans le cas où M n'est pas inversible.

II. Algorithme de Lewis Carroll.

Le Révérend Charles L. Dodgson, plus connu sous son nom de plume, Lewis Carroll, s'est servi de la formule de condensation (1) pour mettre au point un algorithme de calcul de déterminant $n \times n$, n'utilisant que des déterminants 2×2.

L'algorithme fonctionne comme suit :

On doit trouver le déterminant d'une matrice M de taille $n \times n$.
Pour cela, on met en jeu une suite de couples de matrices $(A^{(k)}, B^{(k)}) \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-k-1}(\mathbb{R})$ pour $k = 0, \dots, n-2$ définies comme suit :

— Pour $k = 0$, $A^{(0)} = A$ et $B^{(0)}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

— On passe du couple $(A^{(k)}, B^{(k)})$ ($k \leqslant n-3$) au couple $(A^{(k+1)}, B^{(k+1)})$ de la façon suivante :
  — Si aucun des coefficients de $B^{(k)}$ n'est nul (ce qui est le cas pour $B^{(0)}$) alors on pose

$$A_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{B_{i,j}^{(k)}} \begin{vmatrix} A_{i,j}^{(k)} & A_{i,j+1}^{(k)} \\ A_{i+1,j}^{(k)} & A_{i+1,j+1}^{(k)} \end{vmatrix}, \ i,j \in \{1, \dots, n-k-1\}$$

$$B_{i,j}^{(k+1)} = A_{i+1,j+1}^{(k)}, \ i,j \in \{1, \dots, n-k-2\}$$

  Bien entendu, dans le membre de droite qui définit le terme $A_{i,j}^{(k+1)}$, $|.|$ désigne un déterminant 2×2.
  Enfin, si $(A^{(n-2)}, B^{(n-2)})$ a pu être défini par la précédente procédure, alors on définit la matrice de taille 1×1, $A^{(n-1)} = (A_{1,1}^{(n-1)})$ par

$$A_{1,1}^{(n-1)} = \frac{1}{B_{1,1}^{(n-2)}} \begin{vmatrix} A_{1,1}^{(n-2)} & A_{1,1+1}^{(n-2)} \\ A_{1+1,1}^{(n-2)} & A_{1+1,1+1}^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

  Notrer qu'il *n'y a pas* de terme $B^{(n-1)}$. L'algorithme se termine en affirmant que $A_{1,1}^{(n-1)} = \det(M)$, on prouvera plus loin sa validité.
  — Si l'un des coefficients de $B^{(k)}$ est nul, l'algorithme ne s'applique pas, et Lewis Carroll préconise de recommencer après avoir échangé (convenablement) des lignes dans la matrice initiale.

Exemple :

$$M = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix} \quad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 38 \end{pmatrix} \quad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 77 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de M vaut donc 77.

1. Appliquer cet algorithme au calcul du déterminant de

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que l'algorithme se termine sans qu'aucun des coefficients des matrices $B^{(i)}$ ne s'annule. Quel est le nombre u_n de déterminants 2×2 que l'on a calculé au cours de la procédure ?

Une autre méthode de calcul de déterminant consiste à répéter le développement suivant des lignes par cofacteurs jusqu'à ce qu'on obtienne des déterminants 2×2.
L'objet de la question suivante est d'étudier le nombre v_n de déterminants 2×2 ainsi obtenus.

3. Soit donc v_n le nombre de déterminants 2×2 calculés lorsque l'on applique la méthode de développements successifs par rapport à des lignes pour calculer le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$. Etablir une relation entre v_n et v_{n-1}. Puis, comparer u_n et v_n lorsque $n \to +\infty$.

On se place désormais dans le cas où l'algorithme de Lewis. Carroll s'applique.
On se propose de montrer sa validité.

4. Soit $r, s \in \{1, 2, \dots, n-2\}$. En appliquant la formule de condensation, montrer que $A^{(2)}_{r,s}$ est le déterminant d'une matrice 3×3, extraite de M, que l'on précisera.
5. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $r, s \in \{1, 2, \dots, n-k\}$. Généraliser le résultat précédent en exprimant $A^{(k)}_{r,s}$ comme le déterminant d'une matrice de taille $(k+1)\times(k+1)$ extraite de M que l'on précisera. Prouver que
$$A^{(n-1)}_{1,1} = \det(M)$$
ce qui établit la validité de l'algorithme

III. Le λ-déterminant.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On introduit la notion de λ-déterminant d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convenable, noté $\det_\lambda(M)$, de la manière suivante.

Soit $(a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $\det_\lambda(a) = a$.

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det_\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + \lambda bc.$

On impose de plus, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la formule de condensation suivante :

$$\det{}_\lambda(M) \det{}_\lambda[M]^{1,n}_{1,n} = \det{}_\lambda[M]^1_1 \det{}_\lambda[M]^n_n + \lambda \det{}_\lambda[M]^1_n \det{}_\lambda[M]^n_1 \tag{2}$$

Cette condition (2) permet donc de définir par récurrence le λ-déterminant pour une matrice M de taille $n \times n$, à la condition de ne pas avoir à diviser par 0 au cours de son calcul. Plus précisément, supposons que cette procédure par récurrence ait permis de définir le membre de droite de (2) ainsi que $\det_\lambda[M]^{1,n}_{1,n}$ et qu'en plus ce dernier soit non nul. Alors on définit $\det_\lambda(M)$ par (2) puisqu'on peut diviser par $\det_\lambda[M]^{1,n}_{1,n} \neq 0$.

Dans la suite, M désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle $\det_\lambda(M)$ est bien défini.

1. Soit $t \in \mathbb{R}^*$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. On note $M_{t,j}$ la matrice obtenue à partir de M par multiplication de la j-ème colonne de M par t. Montrer que $\det_\lambda(M_{t,j})$ est bien défini et donner sa valeur en fonction de $\det_\lambda(M)$ et de t.

On considère un vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que les réels x_i sont tous non nuls.
On introduit la matrice de Vandermonde de taille $n \times n$:

$$V(x_1, \dots, x_n) = (x_i^{j-1})_{1 \le i,j \le n},$$

où x_i^{j-1} est le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.

2. On suppose que $x_j + \lambda x_i$ est non nul pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $1 \le i < j \le n$. Calculer $\det_\lambda V(x_1, \dots, x_n)$ en fonction de $x_j + \lambda x_i$ $(i, j \in \{1, \dots, n\})$. (On commencera par le cas $n = 3$, puis on procédera par récurrence sur n).