Leçon 93 - Intégrale de Kurzweil-Henstock

8 avril 2026

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

⇒ Autour des subdivisions

Problèmes

Problème Construction d'une intégrale.

Problèmes

Problème Construction d'une intégrale.

Problème Aire sous la courbe.

Problèmes

Problème Construction d'une intégrale.

Problème Aire sous la courbe.

Problème Classe des fonctions intégrables

Problèmes

Problème Construction d'une intégrale.

Problème Aire sous la courbe.

Problème Classe des fonctions intégrables

Problème Intégrale sur quel type d'intervalle ? Fermé ou ouvert ?

Problèmes

Problème Construction d'une intégrale.

Problème Aire sous la courbe.

Problème Classe des fonctions intégrables

Problème Intégrale sur quel type d'intervalle ? Fermé ou ouvert ?

Problème Etymologie : pourquoi intégrale ?

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

⇒ Autour des subdivisions

Quelles sont les fonctions intégrables ?

Deux catégories de réponse à la question : quelles sont les fonctions intégrables ?

Quelles sont les fonctions intégrables ?

Deux catégories de réponse à la question : quelles sont les fonctions intégrables ?

1. une réponse pratique : elle fait le lien avec les résultats vus au premier semestre et rappelés ici. Et elle donne la valeur de l'intégrale.

Quelles sont les fonctions intégrables ?

Deux catégories de réponse à la question : quelles sont les fonctions intégrables ?

1. une réponse pratique : elle fait le lien avec les résultats vus au premier semestre et rappelés ici. Et elle donne la valeur de l'intégrale.
2. des réponses théoriques : elle permet d'assurer des résultats d'existence pour les fonctions continues (par morceaux) ou plus large. . .C'est le but de ce chapitre.

Savoir-faire

Savoir-faire. Méthode 1 : primitives

Si on doit calculer $\int_a^b f$, alors si on peut reconnaitre f comme la dérivée d'une fonction F, on a

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \quad \text{notée} \quad [F]_a^b$$

De là un tableau à apprendre !

Savoir-faire

Savoir-faire. Méthode 2 : Fractions rationnelles

Si on doit calculer $\int_a^b f$, où f est une fraction rationnelle alors on commence par décomposer f en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
On trouve une combinaison linéaire de fractions du type :

- Polynôme : intégration simple
- $\frac{a}{(t-r)^k}$ de primitive $t \mapsto \frac{-a}{(k-1)(t-r)^{k-1}}$ ou $t \mapsto a\ln(|t-r|)$ si $k=1$
- $\frac{2t+b}{(t^2+bt+c)^k}$ (avec $b^2-4c<0$) de primitive $t \mapsto \frac{-1}{(k-1)(t^2+bt+c)^{k-1}}$ ou $t \mapsto \ln(t^2+bt+c)$ si $k=1$
- $\frac{d}{(t^2+bt+c)^k} = \frac{d}{(t+\frac{b}{2})^2+\frac{4c-b^2}{4})^k} = \frac{4^k d}{(4c-b^2)^k}\frac{1}{(1+\frac{4}{4c-b^2}(t+\frac{b}{2})^2)^k}$ (avec $b^2-4c<0$), on fait le changement de variable $\tan\theta = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}(t+\frac{b}{2})$ qui se simplifie bien...

Savoir-faire

Savoir-faire. Méthode 3 : Intégration par parties

Si on doit calculer $\displaystyle\int_a^b f \times g$, alors si on peut reconnaitre f comme la dérivée d'une fonction F et que g est dérivable, on a

$$\int_a^b f = F(b)g(b) - F(a)f(a) - \int_a^b F g'$$

Evidemment, cela n'a d'intérêt que si $\int_a^b F g'$ est plus simple à calculer

Savoir-faire

Savoir-faire. Méthode 4 : Changement de variable

Si on doit calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, alors si il existe φ de classe $\mathscr{C}^1$-bijective ($\mathscr{C}^1$-difféomorphisme) de $[\alpha, \beta]$ sur $[a, b]$, on peut faire le changement de variable $t = \varphi(u)$. On a

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Règle de Bioche

Application. Règles de Bioche
Si $R(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta$ est invariant par le changement de variable :

- $\theta \mapsto -\theta$, on fait le changement de variable $t = \cos\theta$
- $\theta \mapsto \pi - \theta$, on fait le changement de variable $t = \sin\theta$
- $\theta \mapsto \pi + \theta$, on fait le changement de variable $t = \tan\theta$

Sinon, on pose $t = \tan\frac{\theta}{2}$.

Règle de Bioche

Application. Règles de Bioche
Si $R(\sin\theta, \cos\theta)\mathrm{d}\theta$ est invariant par le changement de variable :

- $\theta \mapsto -\theta$, on fait le changement de variable $t = \cos\theta$
- $\theta \mapsto \pi - \theta$, on fait le changement de variable $t = \sin\theta$
- $\theta \mapsto \pi + \theta$, on fait le changement de variable $t = \tan\theta$

Sinon, on pose $t = \tan\frac{\theta}{2}$.

Exemple Primitive de $\dfrac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}$

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

⇒ Autour des subdivisions

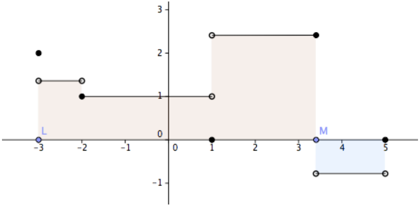
Analyse

Analyse Aire sous la courbe. Rappels de terminale

Analyse

Analyse Aire sous la courbe. Rappels de terminale

Voir Aire d'une fonction en escalier



Analyse

Analyse Aire sous la courbe. Rappels de terminale
Voir Aire d'une fonction en escalier

Heuristique - Les fonctions en escalier ou les fonctions étagées

Les fonctions en escalier sont celles pour lesquelles le calcul de l'aire « sous » la courbe est la plus simple.
Il s'agit des fonctions constantes sur des intervalles.
Nous serons donc obliger de commencer par définir (ou reprendre) la notion de subdivision d'un segment (ou intervalle).
Nous avons définit cela lorsqu'on a vu le lemme de Cousin. . .

Approche de Riemann

Les commentaires qui suivent sont pour le moins rapides. . .

Approche de Riemann

Heuristique - L'approche de Riemann

La construction se passe dans l'ordre suivant :

0. On sait les intégrales de fonctions en escalier.
1. On considère f continue sur $[a,b]$ pour laquelle on doit calculer $\int_a^b f$.
2. On se donne un qualité d'approximation $\epsilon > 0$.
3. La fonction f étant continue sur $[a,b]$, elle est uniformément continue (Heine).
   $$\exists\, \eta > 0, \qquad \forall\, x, x' \in [a,b], |x - x'| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$$
4. On découpe $[a,b]$ en n morceaux (subdivision) de taille inférieure à η : $(a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} = b$
5. On choisit alors (librement) t_i un élément de chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ et une fonction en escalier définie par : $\varphi_{|]x_{i-1},x_i[} = f(t_i)$
6. Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$, bien définie, approche celle de f à ϵ-près

Approche de Riemann

Attention - Quelque problème

Cette intégrale est bien définie pour les fonctions uniformément continue sur un segment, mais pas très bien lorsque la fonction est plus « *pathologique* ».
Par exemple, la fonction de Dirichlet (indicatrice des rationnels) :

$$\chi_{[0,1]} : t \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{et} \quad t \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{et} \quad t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.
Par ailleurs, comme nous le verrons plus loin, si une fonction est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, elle est nécessairement bornée. Et par contraposée…

Approche de Lebesgue

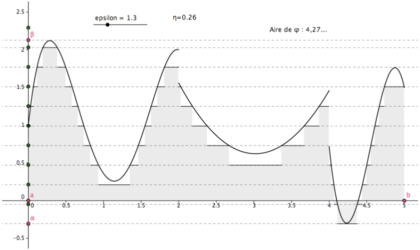
Heuristique. L'approche de Lebesgue

La stratégie de Lebesgue est très différente. Pour construire cette intégrale, on raisonne non plus sur l'intervalle de départ mais sur l'intervalle image (qui peut contenir l'infini !).

0. On connait les intégrales de fonctions étagées (comme les fonctions en escalier).
1. On découpe alors l'intervalle (image) J en n morceaux : $J = \bigcup_{i=1}^{n} J_n$ et on considère alors les intervalles $I_k = f^{-1}(J_k)$.
2. Toute la difficulté repose alors dans la nature de ces ensembles $I_k = f^{-1}(J_k)$ qui peuvent être « *très pathologiques* ».
3. On calcul alors $\int f = \sum_k |I_k| f(t_k)$

Approche de Lebesgue

Voir Aire d'une fonction étagée



Approche de Lebesgue

Attention. Quelques problème...

Pour les intégrales de Lebesgue la notion d'intégrale impropre n'existe pas.
Une fonction est intégrable au sens de Lebesgue, si et seulement si sa valeur propre est intégrable.
Donc des fonctions comme

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

qui sont intégrables (au sens de Riemann-impropre) mais pas intégrable en valeur absolue ne sont pas intégrable au sens de Lebesgue...

Approche de Kurzweil et Henstock

Heuristique. L'approche de Kurzweil-Henstock

Le cours qui suit présente l'intégrale definie indépendamment par Kurzweil et Henstock. Le principe repose sur une généralisation de l'intégration de Riemann. Elle permet d'obtenir de nombreux résultats de la théorie de Lebesgue. Mais elle reste assez peu connue. . .Une raison : elle nécessite au démarrage de le lemme de Cousin. Mais nous le connaissons bien. . .

Heuristique

Heuristique. Construction de $\mathbb{R}$. Rappels

Heuristique

Heuristique. Construction de $\mathbb{R}$. Rappels

1. $(\mathbb{Q}, \leqslant_{\mathbb{Q}})$ est un ensemble ordonné bien connu (à partir de $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$ et deux relations d'équivalence)

Heuristique

Heuristique. Construction de $\mathbb{R}$. Rappels

1. $(\mathbb{Q}, \leqslant_{\mathbb{Q}})$ est un ensemble ordonné bien connu (à partir de $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$ et deux relations d'équivalence)
2. On définit les suites de couples de bissecantes (de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$) : $x \in \mathbb{R}$ est la classe d'équivalence des $\big((a_n),(b_n)\big)$ avec $(a_n)\nearrow$, $(b_n)\searrow$, $(b_{n+1} - a_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Heuristique

Heuristique. Construction de $\mathbb{R}$. Rappels

1. $(\mathbb{Q}, \leqslant_{\mathbb{Q}})$ est un ensemble ordonné bien connu (à partir de $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$ et deux relations d'équivalence)
2. On définit les suites de couples de bissecantes (de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$) :
   $x \in \mathbb{R}$ est la classe d'équivalence des $\big((a_n),(b_n)\big)$ avec
   $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow, (b_{n+1} - a_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
3. On vérifie que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné :
   $x \leqslant x'$ ssi $\forall\ ((a_n),(b_n)) = x,\ ((a'_n),(b'_n)) = x'$,
   on a $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} b'_n$.

Heuristique

Heuristique. Construction de $\mathbb{R}$. Rappels

1. $(\mathbb{Q}, \leqslant_{\mathbb{Q}})$ est un ensemble ordonné bien connu (à partir de $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$ et deux relations d'équivalence)
2. On définit les suites de couples de bissecantes (de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$) : $x \in \mathbb{R}$ est la classe d'équivalence des $\big((a_n),(b_n)\big)$ avec $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$, $(b_{n+1} - a_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
3. On vérifie que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné : $x \leqslant x'$ ssi $\forall\ ((a_n),(b_n)) = x$, $((a'_n),(b'_n)) = x'$,
   on a $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant_{\mathbb{Q}} b'_n$.
4. On définit l'addition sur $\mathbb{R}$ (sans problème) et la multiplication de deux nombres positifs...

Principaux résultats

Analyse Schéma des principaux résultats topologiques

	Propriétés essentielles (de construction de $\mathbb{R}$)

Principaux résultats

Analyse Schéma des principaux résultats topologiques

$\mathbb{R}$ vérifie le théorème de la borne supérieure $\forall\ A \subset \mathbb{R}$, borné, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sup A$ $\Longleftrightarrow$ Toute suite croissante majorée converge $\Longleftrightarrow$ Les suites adjacentes convergent	Propriétés essentielles (de construction de $\mathbb{R}$)

Principaux résultats

Analyse Schéma des principaux résultats topologiques

$\mathbb{R}$ vérifie le théorème de la borne supérieure $\forall\ A \subset \mathbb{R}$, borné, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sup A$ $\Longleftrightarrow$ Toute suite croissante majorée converge $\Longleftrightarrow$ Les suites adjacentes convergent	Propriétés essentielles (de construction de $\mathbb{R}$)
	Bloc de la COMPACITE

Principaux résultats

Analyse Schéma des principaux résultats topologiques

<table>
<tr><td>ℝ vérifie le théorème de la borne supérieure
$\forall\ A \subset \mathbb{R}$, borné, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sup A$
$\Longleftrightarrow$
Toute suite croissante majorée converge
$\Longleftrightarrow$
Les suites adjacentes convergent</td><td>Propriétés essentielles (de construction de ℝ)</td></tr>
<tr><td>Théorème des segments emboités
Si (I_n) tel que $I_{n+1} \subset I_n$ et $\ell(I_n) \to 0$
alors $\exists\ a \in \mathbb{R}$ tel que $\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$
Et principe de dichotomie
Si f est une fonction d'intervalle sous-additive sur $[a,b]$,
$f(a,b) = 1 \Rightarrow \exists\ (a_n),(b_n)$ adjacentes tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $f(a_n,b_n) = 1$
$\Longleftrightarrow$
Théorème de Bolzano Weierstrass
Toute suite bornée admet une suite extraite convergente
$\Longleftrightarrow$
Lemme de Cousin
Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et δ, jauge (>0)
alors $[a,b]$ admet une subdivision δ fine.</td><td>Bloc de la COMPACITE</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Principaux résultats

Analyse Schéma des principaux résultats topologiques

$\mathbb{R}$ vérifie le théorème de la borne supérieure $\forall\ A \subset \mathbb{R}$, borné, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sup A$ $\Longleftrightarrow$ Toute suite croissante majorée converge $\Longleftrightarrow$ Les suites adjacentes convergent	Propriétés essentielles (de construction de $\mathbb{R}$)
Théorème des segments emboités Si (I_n) tel que $I_{n+1} \subset I_n$ et $\ell(I_n) \to 0$ alors $\exists\ a \in \mathbb{R}$ tel que $\{a\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ Et principe de dichotomie Si f est une fonction d'intervalle sous-additive sur $[a,b]$, $f(a,b) = 1 \Rightarrow \exists\ (a_n),(b_n)$ adjacentes tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $f(a_n, b_n) = 1$ $\Longleftrightarrow$ Théorème de Bolzano Weierstrass Toute suite bornée admet une suite extraite convergente $\Longleftrightarrow$ Lemme de Cousin Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et δ, jauge (>0) alors $[a,b]$ admet une subdivision δ fine.	Bloc de la COMPACITE
	Bloc de la COMPLETUDE

Principaux résultats

Analyse Schéma des principaux résultats topologiques

$\mathbb{R}$ vérifie le théorème de la borne supérieure $\forall\ A \subset \mathbb{R}$, borné, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sup A$ $\Longleftrightarrow$ Toute suite croissante majorée converge $\Longleftrightarrow$ Les suites adjacentes convergent	Propriétés essentielles (de construction de $\mathbb{R}$)
Théorème des segments emboités Si (I_n) tel que $I_{n+1} \subset I_n$ et $\ell(I_n) \to 0$ alors $\exists\ a \in \mathbb{R}$ tel que $\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ Et principe de dichotomie Si f est une fonction d'intervalle sous-additive sur $[a,b]$, $f(a,b) = 1 \Rightarrow \exists\ (a_n),(b_n)$ adjacentes tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $f(a_n,b_n) = 1$ $\Longleftrightarrow$ Théorème de Bolzano Weierstrass Toute suite bornée admet une suite extraite convergente $\Longleftrightarrow$ Lemme de Cousin Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et δ, jauge (>0) alors $[a,b]$ admet une subdivision δ fine.	Bloc de la COMPACITE
Toute suite de Cauchy converge (et réciproquement) (Suite de Cauchy :)$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N$ tel que $\forall\ p > q \geqslant N$, $\lvert u_p - u_q \rvert \leqslant \epsilon$ Toute série absolument convergente est convergente	Bloc de la COMPLETUDE

Principaux résultats

Analyse Schéma des principaux résultats topologiques

$\mathbb{R}$ vérifie le théorème de la borne supérieure $\forall\ A \subset \mathbb{R}$, borné, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sup A$ $\Longleftrightarrow$ Toute suite croissante majorée converge $\Longleftrightarrow$ Les suites adjacentes convergent	Propriétés essentielles (de construction de $\mathbb{R}$)
Théorème des segments emboités Si (I_n) tel que $I_{n+1} \subset I_n$ et $\ell(I_n) \to 0$ alors $\exists\ a \in \mathbb{R}$ tel que $\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ Et principe de dichotomie Si f est une fonction d'intervalle sous-additive sur $[a,b]$, $f(a,b) = 1 \Rightarrow \exists\ (a_n),(b_n)$ adjacentes tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $f(a_n,b_n) = 1$ $\Longleftrightarrow$ Théorème de Bolzano Weierstrass Toute suite bornée admet une suite extraite convergente $\Longleftrightarrow$ Lemme de Cousin Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et δ, jauge (>0) alors $[a,b]$ admet une subdivision δ fine.	Bloc de la COMPACITE
Toute suite de Cauchy converge (et réciproquement) (Suite de Cauchy :)$\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ N$ tel que $\forall\ p > q \geqslant N$, $\|u_p - u_q\| \leqslant \epsilon$ Toute série absolument convergente est convergente	Bloc de la COMPLETUDE

Dans $\mathbb{R}$ ces blocs sont équivalents (ce n'est pas toujours le cas).

Principaux résultats

Analyse Et pour les fonctions continues...

Principaux résultats

Analyse Et pour les fonctions continues...

- Bloc de la construction : $\Rightarrow$ TVI
- Bloc de la compacité : $\Rightarrow$ TW
- Bloc de la compacité : $\Rightarrow$ TH

Principaux résultats

Analyse Et pour les fonctions continues...

- Bloc de la construction : $\Rightarrow$ TVI
- Bloc de la compacité : $\Rightarrow$ TW
- Bloc de la compacité : $\Rightarrow$ TH

Exercice

Rappelez l'énoncé de ces trois théorèmes. Quelle différence entre les deux premiers ?

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

⇒ Autour des subdivisions

1. Problèmes

2. « Construire »l'intégrale. Préalable

2.1. Rappels calculatoires

2.2. « Vu de loin »

2.3. Quelques rappels de topologie sur $\mathbb{R}$

2.4. Subdivision d'un segment de $\mathbb{R}$

Subdivisions et pas de subdivisions

Définition - Subdivision

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
On appelle **subdivision** de $[a,b]$ toute famille finie $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de points de $[a,b]$ telle que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$..
On appelle **pas** de la subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ de $[a,b]$ le réel $\delta(\sigma) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(a_i - a_{i-1})$.

Subdivisions et pas de subdivisions

Définition - Subdivision

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
On appelle **subdivision** de $[a,b]$ toute famille finie $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de points de $[a,b]$ telle que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$..
On appelle **pas** de la subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ de $[a,b]$ le réel $\delta(\sigma) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(a_i - a_{i-1})$.

Exemple Cas particuliers : subdivision à pas constant

Relation d'ordre sur les subdivisions

Défintion - Relation d'ordre sur la subdivision

La subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ est dite **plus fine** que la subdivision $\sigma' = (x'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ de $[a, b]$ si $\{x'_0, \dots, x'_m\} \subset \{x_0, \dots, x_n\}$. Comme la relation « contenant »notée $\supset$: il s'agit d'une relation d'ordre

Relation d’ordre sur les subdivisions

Défintion - Relation d’ordre sur la subdivision

La subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ est dite **plus fine** que la subdivision $\sigma' = (x'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$ de $[a, b]$ si $\{x'_0, \ldots, x'_m\} \subset \{x_0, \ldots, x_n\}$. Comme la relation « contenant »notée $\supset$: il s’agit d’une relation d’ordre

Remarque Plus fine : relation d’ordre, non totale

Affinement

Définition - Affinement des subdivisions

Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$,
la subdivision obtenue en réunissant les points de σ et de σ' est plus fine que σ et que σ'.
C'est la moins fine des subdivisions plus fines que σ et σ', on la note $\sigma \vee \sigma'$.
On a $\sigma \vee \sigma' = \sup_{\supset}(\sigma, \sigma')$

Affinement

Définition - Affinement des subdivisions

Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$,
la subdivision obtenue en réunissant les points de σ et de σ' est plus fine que σ et que σ'.
C'est la moins fine des subdivisions plus fines que σ et σ', on la note $\sigma \vee \sigma'$.
On a $\sigma \vee \sigma' = \sup_{\supset}(\sigma, \sigma')$

Remarque $\sigma \wedge \sigma'$

Des subdivisions pointés

Définition - Subdivision pointée

Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

On appelle **subdivision pointée** de I la donnée

- d'une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots x_n)$ de $[a, b]$,
- un pointage de cette subdivision $t_1, \dots t_n \in I$ tq $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

On note $\sigma_p = \big(([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2), \dots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\big)$, on appelle les (t_i) les points de marquage de σ_p.

Des subdivisions pointés adaptées à une jauge

Définition - Subdivision pointée adaptée à un jauge

Un pas ou une **jauge** est une application $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$. Une **subdvision pointée** $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$ **est dite**
adaptée au pas δ **ou** δ**-fine**, si

$$\forall\ k \in \mathbb{N}_n, \qquad [x_{k-1},x_k] \subset \left[t_k - \frac{\delta(t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(t_k)}{2}\right]$$

On remarquera que $0 \leqslant x_k - x_{k-1} \leqslant \delta(t_k)$.
Pour une jauge δ donnée, on note $\mathfrak{S}_\delta([a,b])$ (simplifiée en $\mathfrak{S}_\delta$ si cela ne conduit à aucune ambiguïté), l'ensemble des subdivisions pointés de $[a,b]$ δ-fine.
Si δ est constante, on la note δ^*. Dans ce cas $\delta(\sigma_p) \leqslant \delta^*$.

Des subdivisions pointés au lemme de Cousin

Proposition - Amélioration de la finesse de la subdivision

Soient δ_1 et δ_2 deux jauges.
Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, i.e. $\forall\ t \in [a,b]$, $\delta(t) = \min(\delta_1(t), \delta_2(t))$.
Alors si σ_p est une subdivision pointée de $[a,b]$, δ-fine,
σ_p est également δ_1-fine et δ_2-fine.
Autrement écrit : $\mathfrak{S}_\delta \subset \mathfrak{S}_{\delta_1} \cap \mathfrak{S}_{\delta_2}$

Des subdivisions pointés au lemme de Cousin

Proposition - Amélioration de la finesse de la subdivision

Soient δ_1 et δ_2 deux jauges.
Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, i.e. $\forall\ t \in [a,b]$, $\delta(t) = \min(\delta_1(t), \delta_2(t))$.
Alors si σ_p est une subdivision pointée de $[a,b]$, δ-fine,
σ_p est également δ_1-fine et δ_2-fine.
Autrement écrit : $\mathfrak{S}_\delta \subset \mathfrak{S}_{\delta_1} \cap \mathfrak{S}_{\delta_2}$

Démonstration

Des subdivisions pointés au lemme de Cousin

Proposition - Amélioration de la finesse de la subdivision

Soient δ_1 et δ_2 deux jauges.
Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, i.e. $\forall\ t \in [a,b]$, $\delta(t) = \min(\delta_1(t), \delta_2(t))$.
Alors si σ_p est une subdivision pointée de $[a,b]$, δ-fine,
σ_p est également δ_1-fine et δ_2-fine.
Autrement écrit : $\mathfrak{S}_\delta \subset \mathfrak{S}_{\delta_1} \cap \mathfrak{S}_{\delta_2}$

Démonstration

<u>Exercice</u>

On note $\mathfrak{S}_\delta = \{\sigma_p$, subdivision pointée δ-fine de $[a,b]\}$.
Montrer que si $\delta_1 \leqslant \delta_2$, $\mathfrak{S}_{\delta_1} \subset \mathfrak{S}_{\delta_2}$.

Extraction de subdivisions

Les résultats suivants nous seront utiles pour le théorème de Chasles et le lemme d'Henstock.

Extraction de subdivisions

Les résultats suivants nous seront utiles pour le théorème de Chasles et le lemme d'Henstock.

Proposition - Extraction

Soit δ une jauge définie sur $[a,b]$.
Si $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$ est une subdivision pointée δ-fine de $[a,b]$, alors pour tout $i<j$, $\big(([x_i,x_{i+1}],t_{i+1}),\dots([x_{j-1},x_j],t_j)\big)$ est une subdivision pointée $\delta_{|[x_i,x_j]}$-fine (de $[x_i,x_j]$).

Extraction de subdivisions

Les résultats suivants nous seront utiles pour le théorème de Chasles et le lemme d'Henstock.

Proposition - Extraction

Soit δ une jauge définie sur $[a,b]$.
Si $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),\ldots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$ est une subdivision pointée δ-fine de $[a,b]$, alors pour tout $i<j$, $\big(([x_i,x_{i+1}],t_{i+1}),\ldots([x_{j-1},x_j],t_j)\big)$ est une subdivision pointée $\delta_{|[x_i,x_j]}$-fine (de $[x_i,x_j]$).

Par la suite nous définirons la notion de sous-subdivision pour parler de réunion d'extraction.

Extraction de subdivisions

Les résultats suivants nous seront utiles pour le théorème de Chasles et le lemme d'Henstock.

Proposition - Extraction

Soit δ une jauge définie sur $[a,b]$.
Si $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$ est une subdivision pointée δ-fine de $[a,b]$, alors pour tout $i<j$, $\big(([x_i,x_{i+1}],t_{i+1}),\dots([x_{j-1},x_j],t_j)\big)$ est une subdivision pointée $\delta_{|[x_i,x_j]}$-fine (de $[x_i,x_j]$).

Par la suite nous définirons la notion de sous-subdivision pour parler de réunion d'extraction.

Démonstration

Réunion de subdivisions

Réciproquement :

Réunion de subdivisions

Réciproquement :

Proposition - Réunion

Soient $a < b < c \in \mathbb{R}$, δ_1 une jauge sur $[a,b]$ et δ_2 une jauge sur $[b,c]$.
Soit $(\sigma_p)_1$ une subdivision pointée δ_1-fine de $[a,b]$.
Soit $(\sigma_p)_2$ une subdivision pointée δ_2-fine de $[b,c]$.

On note $\delta : [a,c] \to \mathbb{R}_+^*, t \mapsto \begin{cases} \delta_1(t) & \text{si } t \in [a,b[\\ \max(\delta_1(t),\delta_2(t)) & \text{si } t = b \\ \delta_2(t) & \text{si } t \in]b,c] \end{cases}$.

Alors la réunion (concaténation) $(\sigma_p)_1 \cup (\sigma_p)_2$ est une subdivision pointée δ-fine de $[a,c]$.

Réunion de subdivisions

Réciproquement :

Proposition - Réunion

Soient $a < b < c \in \mathbb{R}$, δ_1 une jauge sur $[a,b]$ et δ_2 une jauge sur $[b,c]$.
Soit $(\sigma_p)_1$ une subdivision pointée δ_1-fine de $[a,b]$.
Soit $(\sigma_p)_2$ une subdivision pointée δ_2-fine de $[b,c]$.

On note $\delta : [a,c] \to \mathbb{R}_+^*, t \mapsto \begin{cases} \delta_1(t) & \text{si } t \in [a,b[\\ \max(\delta_1(t), \delta_2(t)) & \text{si } t = b \\ \delta_2(t) & \text{si } t \in]b,c] \end{cases}$.

Alors la réunion (concaténation) $(\sigma_p)_1 \cup (\sigma_p)_2$ est une subdivision pointée δ-fine de $[a,c]$.

Démonstration

Forçage

Par la suite on aura besoin d'exploiter des jauges particulières

Forçage

Par la suite on aura besoin d'exploiter des jauges particulières

Proposition - Forçage

Soit $c \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

Considérons la jauge $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*, t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}|t-c| & \text{si } x \neq c \\ \alpha & \text{si } x = c \end{cases}$.

Si σ_p est une subdivision pointée δ-fine de $[a,b]$, alors c est nécessairement un point de marquage de σ_p.

Démonstration

Lemme de Cousin

Le lemme de Cousin énonce alors :

Théorème - Lemme de Cousin

Pour tout δ, jauge sur $[a,b]$, il existe une subdivision pointée $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),([x_1,x_2],t_2),\ldots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$, adaptée à δ (δ-fine).
Autrement écrit, pour tout δ jauge de $[a,b]$, $\mathfrak{S}_\delta \neq \emptyset$.

La démonstration du lemme de Cousin été vu en début d'année. On peut par exemple, exploiter le principe de dichotomie ou ce qui revient au même : une suite de segments emboîtés.

Lemme de Cousin

Le lemme de Cousin énonce alors :

Théorème - Lemme de Cousin

Pour tout δ, jauge sur $[a,b]$, il existe une subdivision pointée $\sigma_p = \big(([x_0,x_1],t_1),([x_1,x_2],t_2),\dots([x_{n-1},x_n],t_n)\big)$, adaptée à δ (δ-fine).
Autrement écrit, pour tout δ jauge de $[a,b]$, $\mathfrak{S}_\delta \neq \emptyset$.

La démonstration du lemme de Cousin été vu en début d'année. On peut par exemple, exploiter le principe de dichotomie ou ce qui revient au même : une suite de segments emboîtés.

Démonstration

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Quelques principes heuristiques

$\Rightarrow$ Rappels de topologie réelle

$\Rightarrow$ Autour des subdivisions

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

- Revoir les résultats pratiques : listes de primitives, IPP, changement de variables (Bioche), fractions rationnelles

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

- Revoir les résultats pratiques : listes de primitives, IPP, changement de variables (Bioche), fractions rationnelles
- Calcul de l'aire. Exploitation des fonctions en escalier (ou étagées)

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

- Revoir les résultats pratiques : listes de primitives, IPP, changement de variables (Bioche), fractions rationnelles
- Calcul de l'aire. Exploitation des fonctions en escalier (ou étagées)
- Approche de Riemann : pas constant

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

- Revoir les résultats pratiques : listes de primitives, IPP, changement de variables (Bioche), fractions rationnelles
- Calcul de l'aire. Exploitation des fonctions en escalier (ou étagées)
- Approche de Riemann : pas constant
- Approche de Lebesgue : fonctions réciproques

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

- Revoir les résultats pratiques : listes de primitives, IPP, changement de variables (Bioche), fractions rationnelles
- Calcul de l'aire. Exploitation des fonctions en escalier (ou étagées)
- Approche de Riemann : pas constant
- Approche de Lebesgue : fonctions réciproques
- Approche de Kurzweil et Henstock : pas adaptés à une jauge.

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

⇒ Autour des subdivisions

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

- Construction de $\mathbb{R}$ par les bissecantes

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

- Construction de $\mathbb{R}$ par les bissecantes
- Existence d'un $\sup$⇔ suite croissante majorée…⇔suites adjacentes

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

- Construction de $\mathbb{R}$ par les bissecantes
- Existence d'un $\sup \Leftrightarrow$ suite croissante majorée... $\Leftrightarrow$ suites adjacentes
- Bloc de la compacité : segments emboités, principe de dichotomie, TBW, Lemme de Cousin

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

- Construction de $\mathbb{R}$ par les bissecantes
- Existence d'un $\sup \Leftrightarrow$ suite croissante majorée…$\Leftrightarrow$suites adjacentes
- Bloc de la compacité : segments emboités, principe de dichotomie, TBW, Lemme de Cousin
- Bloc de la complétude : une suite converge ssi elle est de Cauchy.

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

- Construction de $\mathbb{R}$ par les bissecantes
- Existence d'un $\sup \Leftrightarrow$ suite croissante majorée... $\Leftrightarrow$ suites adjacentes
- Bloc de la compacité : segments emboités, principe de dichotomie, TBW, Lemme de Cousin
- Bloc de la complétude : une suite converge ssi elle est de Cauchy.
- Pour des fonctions continues : TVI,TW,TH

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

⇒ Autour des subdivisions

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

⇒ Autour des subdivisions

- Définition : on coupe un intervalle en morceaux.

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

⇒ Autour des subdivisions

- Définition : on coupe un intervalle en morceaux.
- Relation d'ordre entre subdivisions. Affinement.

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

⇒ Autour des subdivisions

- Définition : on coupe un intervalle en morceaux.
- Relation d'ordre entre subdivisions. Affinement.
- Subdivisions pointées et subdivision pointée δ-fine

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

⇒ Autour des subdivisions

- Définition : on coupe un intervalle en morceaux.
- Relation d'ordre entre subdivisions. Affinement.
- Subdivisions pointées et subdivision pointée δ-fine
- Extraction et réunion de subdivisions

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

⇒ Autour des subdivisions

- Définition : on coupe un intervalle en morceaux.
- Relation d'ordre entre subdivisions. Affinement.
- Subdivisions pointées et subdivision pointée δ-fine
- Extraction et réunion de subdivisions
- Forçage

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelques principes heuristiques

⇒ Rappels de topologie réelle

⇒ Autour des subdivisions

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 33 : Intégration
  3. Construction de l'intégrale
- Exercice N°798 & 799