

⇒ Famille de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

Heuristique - Principe

L'intégrale est facile à mettre en place pour une famille de fonctions simples : les fonctions en escalier (cf partie suivante).

Donc ici :

1. On se concentre sur l'ensemble des fonctions en escalier, c'est une algèbre.
2. On voit comment on peut *par densité* généraliser les propriétés obtenues en passant sur un ensemble *adhérant* : l'ensemble des fonctions continues par morceaux.
3. On définit donc, en amont, cet ensemble.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Fonctions en escalier

Définition - Fonction en escalier

$\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que :

pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\phi|_{]a_{i-1}, a_i[}$ est constante.

Une telle subdivision est dite **subordonnée** (ou **adaptée**) à ϕ .

On a $\phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{]x_{i-1}, x_i[} + \sum_{i=0}^n \phi(x_i) \mathbf{1}_{\{x_i\}}$.

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Fonctions en escalier

Définition - Fonction en escalier

$\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que :

pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\phi|_{]a_{i-1}, a_i[}$ est constante.

Une telle subdivision est dite **subordonnée** (ou **adaptée**) à ϕ .

$$\text{On a } \phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{]x_{i-1}, x_i[} + \sum_{i=0}^n \phi(x_i) \mathbf{1}_{\{x_i\}}.$$

Proposition - Sur les subdivisions

- Toute subdivision plus fine qu'une subdivision subordonnée à ϕ est encore subordonnée à ϕ .
- Une fonction constante sur $[a, b]$ est une fonction en escalier.
- Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs donc est bornée.

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Fonctions en escalier

Définition - Fonction en escalier

$\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que :

pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\phi|_{]a_{i-1}, a_i[}$ est constante.

Une telle subdivision est dite **subordonnée** (ou **adaptée**) à ϕ .

On a $\phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{]x_{i-1}, x_i[} + \sum_{i=0}^n \phi(x_i) \mathbf{1}_{\{x_i\}}$.

Proposition - Sur les subdivisions

- Toute subdivision plus fine qu'une subdivision subordonnée à ϕ est encore subordonnée à ϕ .
- Une fonction constante sur $[a, b]$ est une fonction en escalier.
- Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs donc est bornée.

Démonstration

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Structure de l'ensemble des fonctions en escalier

Exemple Fonction en escalier. Définition algébrique.

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Structure de l'ensemble des fonctions en escalier

Exemple Fonction en escalier. Définition algébrique.

Exercice

Que vaut $\mathbf{1}_{[a,b]} + \mathbf{1}_{[c,d]}$ et $\mathbf{1}_{[a,b]} \times \mathbf{1}_{[c,d]}$?

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

Exemple Fonction en escalier. Définition algébrique.

Exercice

Que vaut $\mathbf{1}_{[a,b]} + \mathbf{1}_{[c,d]}$ et $\mathbf{1}_{[a,b]} \times \mathbf{1}_{[c,d]}$?

Théorème - Algèbre

On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier à valeurs réelles (ou plus simplement $\mathcal{E}([a, b])$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble d'arrivée).

$(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un sev de $(\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$.

$(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}), +, \times)$.

Donc $(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \times, \cdot)$ est une algèbre.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

Exemple Fonction en escalier. Définition algébrique.

Exercice

Que vaut $\mathbf{1}_{[a,b]} + \mathbf{1}_{[c,d]}$ et $\mathbf{1}_{[a,b]} \times \mathbf{1}_{[c,d]}$?

Théorème - Algèbre

On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier à valeurs réelles (ou plus simplement $\mathcal{E}([a, b])$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble d'arrivée).

$(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un sev de $(\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot)$.

$(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}), +, \times)$.

Donc $(\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \times, \cdot)$ est une algèbre.

Démonstration

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Fonctions continues par morceaux

Elles sont d'abord définies sur un segment, puis plus largement sur un intervalle qui peut être ouvert.

⇒ Famille de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Définition - Continuité par morceaux sur un segment

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que

- ▶ f est continue sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$
- ▶ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f admet une limite finie à droite en x_{i-1} et une limite finie à gauche en x_i .

La subdivision est dite subordonnée ou adaptée à f .

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Fonctions continues par morceaux

Définition - Continuité par morceaux sur un segment

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que

- ▶ f est continue sur chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$
- ▶ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f admet une limite finie à droite en x_{i-1} et une limite finie à gauche en x_i .

La subdivision est dite subordonnée ou adaptée à f .

Exemple Question :

Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux ?

- une fonction en escalier ?
- une fonction continue ?
- $f : \begin{array}{l} x \mapsto e^{1/x} \text{ si } x \in [-1, 1], x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{array} ?$

⇒ Famille de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Propriété (nécessaire)

Proposition - Bornée

Une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Propriété (nécessaire)

Proposition - Bornée

Une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

Démonstration

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

Proposition - Algèbre

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs réelles, que l'on pourra noter $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$, est un s.e.v, et même une sous-algèbre de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$, algèbre des fonctions bornées, lui-même sous algèbre de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

Proposition - Algèbre

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs réelles, que l'on pourra noter $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$, est un s.e.v, et même une sous-algèbre de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$, algèbre des fonctions bornées, lui-même sous algèbre de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$.

Démonstration

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$$

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$$

On commence par un cas particulier (à généraliser)

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale. Préalable
3. Construction de l'intégrale
 - 3.1. Classes de fonctions à intégrer
 - 3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D
 - 3.3. Intégrales d'une fonction

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$$

On commence par un cas particulier (à généraliser)

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$$

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$$

On commence par un cas particulier (à généraliser)

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$$

Démonstration 1 - Heine

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$$

On commence par un cas particulier (à généraliser)

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$$

Démonstration 1 - Heine

Démonstration 2 - Cousin (la continuité donne la jauge)

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Approximation (uniforme) des fonctions continues par morceaux

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$$

On commence par un cas particulier (à généraliser)

Théorème - Approximation par des fonctions en escalier

Soit f continue sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$$

Démonstration 1 - Heine

Démonstration 2 - Cousin (la continuité donne la jauge)

Démonstration 3 - Cas continue par morceaux

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Corollaires

Corollaire - Approximation par des suites de fonctions

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$.

Alors il existe une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tq :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[a, b]} |f - \phi_n| = 0.$$

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Corollaires

Corollaire - Approximation par des suites de fonctions

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$.

Alors il existe une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tq :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[a, b]} |f - \phi_n| = 0.$$

Remarque Convergence « uniforme »

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Corollaires

Corollaire - Approximation par des suites de fonctions

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$.

Alors il existe une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tq :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[a, b]} |f - \phi_n| = 0.$$

Remarque Convergence « uniforme »

Démonstration

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Corollaires

Corollaire - Approximation par des suites de fonctions

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$.

Alors il existe une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tq :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[a, b]} |f - \phi_n| = 0.$$

Remarque Convergence « uniforme »

Démonstration

Corollaire - Encadrement

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, ϕ et ψ , telles que

$$\phi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \phi \leq \epsilon.$$

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Corollaires

Corollaire - Approximation par des suites de fonctions

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$.

Alors il existe une suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tq :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[a, b]} |f - \phi_n| = 0.$$

Remarque Convergence « uniforme »

Démonstration

Corollaire - Encadrement

Soit f continue par morceaux sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$.

Alors il existe deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, ϕ et ψ , telles que

$$\phi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \phi \leq \epsilon.$$

Démonstration

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Définition - Continuité par morceaux sur un intervalle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur l'intervalle I , si pour tout segment $[a, b] \subset I$, $f|_{[a, b]}$ est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$.

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Définition - Continuité par morceaux sur un intervalle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur l'intervalle I , si pour tout segment $[a, b] \subset I$, $f|_{[a, b]}$ est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$.

Exemple La fonction $f : x \mapsto e^{1/x}$ sur $]0, 1]$.

⇒ Famille de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition - Continuité par morceaux sur un intervalle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **continue par morceaux** sur l'intervalle I , si pour tout segment $[a, b] \subset I$, $f|_{[a, b]}$ est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$.

Exemple La fonction $f : x \mapsto e^{1/x}$ sur $]0, 1]$.

Heuristique - Situation courante dans l'étude de fonctions numériques

L'année prochaine à de nombreuses reprises, il faudra faire cette différence :

- ▶ L'étude sur l'intervalle I n'est pas possible,
- ▶ Mais celle sur tout segment inclus dans I est possible.

Incroyable mais vrai : les propriétés passeront alors en tout x de I (puisque tout x de I est dans un segment $[a, b] \subset I$).

⇒ Famille de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Somme de Cauchy d'une fonction en escalier

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

On commence par une construction simple : l'intégrale de fonctions en escalier.

Analyse Intégrale d'une fonction en escalier.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Somme de Cauchy d'une fonction en escalier

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

On commence par une construction simple : l'intégrale de fonctions en escalier.

Analyse Intégrale d'une fonction en escalier.

Exercice

Montrer que si σ et σ' sont deux subdivisions subordonnées à ϕ , alors $I(\phi, \sigma) = I(\phi, \sigma')$.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Somme de Cauchy de f selon une subdivision pointée

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

Définition - Somme de Cauchy de f selon σ_p

Soit f une fonction numérique défini sur le segment $[a, b]$.

Soit $\sigma_p = (([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2) \dots ([x_{n-1}, x_n], t_n))$ une subdivision pointée de $[a, b]$.

On appelle **somme de Cauchy de f associée à σ_p** la quantité

$$S(f, \sigma_p) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \times f(t_k)$$

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Somme de Cauchy de f selon une subdivision pointée

⇒ Famille de
fonctions et relations⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

Définition - Somme de Cauchy de f selon σ_p

Soit f une fonction numérique défini sur le segment $[a, b]$.

Soit $\sigma_p = (([x_0, x_1], t_1), ([x_1, x_2], t_2) \dots ([x_{n-1}, x_n], t_n))$ une subdivision pointée de $[a, b]$.

On appelle **somme de Cauchy de f associée à σ_p** la quantité

$$S(f, \sigma_p) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \times f(t_k)$$

Remarque Une somme de Cauchy est une intégrale

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Remarque Cas fréquents

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Pas constant

⇒ Famille de
fonctions et relations⇒ Somme de
Riemann-Cauchy**Remarque** Cas fréquents**Définition - Somme de Riemann (Cauchy à pas constant)**

A toute fonction $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$, on associe les sommes dites de Riemann

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{ou}$$

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Pas constant

⇒ Famille de
fonctions et relations⇒ Somme de
Riemann-Cauchy**Remarque** Cas fréquents**Définition - Somme de Riemann (Cauchy à pas constant)**

A toute fonction $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$, on associe les sommes dites de Riemann

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \text{ou}$$

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Remarque Appellation uniforme

Exemple Calcul de $R_n(f)$ et $S_n(f)$ avec $f : x \mapsto x$ sur $[0, 1]$.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale3.1. Classes de fonctions à
intégrer3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Propriétés des sommes de Cauchy

Théorème - Propriétés des sommes de Cauchy

Soit $\sigma_p = (([x_0, x_1], t_0), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n))$ une subdivision pointée de $[a, b]$.

- ▶ $f \mapsto S(f, \sigma_p)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$.
- ▶ Si f est positive sur $[a, b]$ alors $S(f, \sigma_p) \geq 0$.
Si $f \geq g$ sur $[a, b]$ alors $S(f, \sigma_p) \geq S(g, \sigma_p)$.
- ▶ Si $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$, alors on a pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$,
en notant $\sigma_p^k = (([x_0, x_1], t_0), \dots, ([x_{k-1}, x_k], t_k))$
et ${}^k\sigma_p = (([x_k, x_{k+1}], t_k), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n))$

$$S(f, \sigma_p) = S(f, \sigma_p^k) + S(f, {}^k\sigma_p) \quad \text{relation de Chasles}$$

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Propriétés des sommes de Cauchy

Théorème - Propriétés des sommes de Cauchy

Soit $\sigma_p = (([x_0, x_1], t_0), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n))$ une subdivision pointée de $[a, b]$.

- ▶ $f \mapsto S(f, \sigma_p)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$.
- ▶ Si f est positive sur $[a, b]$ alors $S(f, \sigma_p) \geq 0$.
Si $f \geq g$ sur $[a, b]$ alors $S(f, \sigma_p) \geq S(g, \sigma_p)$.
- ▶ Si $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$, alors on a pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$,
en notant $\sigma_p^k = (([x_0, x_1], t_0), \dots, ([x_{k-1}, x_k], t_k))$
et ${}^k\sigma_p = (([x_k, x_{k+1}], t_k), \dots, ([x_{n-1}, x_n], t_n))$

$$S(f, \sigma_p) = S(f, \sigma_p^k) + S(f, {}^k\sigma_p) \quad \text{relation de Chasles}$$

Démonstration

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Intégrale de Riemann : pas constant

Définition - Intégrale de f , au sens de Riemann

Soit f une fonction numérique définie sur le segment $[a, b]$.

La fonction f est dite **intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann** ou **R-intégrable sur $[a, b]$** s'il existe un nombre réel S tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta^* > 0 \text{ telle que } \forall \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f, \sigma_p) - S| < \epsilon$$

On notera $\mathcal{I}_R([a, b])$ l'**ensemble des fonctions intégrables sur $[a, b]$ au sens de Riemann**.

Le nombre S ci-dessus est appelé l'intégrale de la fonction f sur $[a, b]$ et est noté

$$\int_{[a,b]} f(x)dx \text{ ou } \int_a^b f(x)dx \text{ voire } \int_{[a,b]} f \text{ ou } \int_a^b f$$

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Intégrale de Riemann : pas constant

Définition - Intégrale de f , au sens de Riemann

Soit f une fonction numérique définie sur le segment $[a, b]$.

La fonction f est dite **intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann** ou **R-intégrable sur $[a, b]$** s'il existe un nombre réel S tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta^* > 0 \text{ telle que } \forall \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f, \sigma_p) - S| < \epsilon$$

On notera $\mathcal{I}_R([a, b])$ l'**ensemble des fonctions intégrables sur $[a, b]$ au sens de Riemann**.

Le nombre S ci-dessus est appelé l'intégrale de la fonction f sur $[a, b]$ et est noté

$$\int_{[a,b]} f(x)dx \text{ ou } \int_a^b f(x)dx \text{ voire } \int_{[a,b]} f \text{ ou } \int_a^b f$$

On admet à ce stade que S est unique, nous le démontrerons pour l'intégrale de Kurzweil-Henstock.

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Remarque Ecriture en fonction de n

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Limite

Remarque Ecriture en fonction de n

Heuristique. C'est bien une limite

On note (u_n) converge :

$$\begin{aligned} \exists \ell \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \epsilon \\ \exists S \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta^* > 0 \text{ tq } \forall \sigma_p, \delta^* \text{-fine,} \quad |S(f, \sigma_p) - S| \leq \epsilon \end{aligned}$$

Souvenons nous que nous avons également écrit cela en terme de réunion (\exists), d'inclusion (\forall), de réunion d'inclusions d'ensemble.

On notera (pas souvent)

$$\lim_{\delta^*(\sigma_p) \rightarrow 0} S(f, \sigma_p) = S$$

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Limite

Remarque Ecriture en fonction de n

Heuristique. C'est bien une limite

On note (u_n) converge :

$$\begin{aligned} \exists \ell \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \epsilon \\ \exists S \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta^* > 0 \text{ tq } \forall \sigma_p, \delta^* \text{-fine,} \quad |S(f, \sigma_p) - S| \leq \epsilon \end{aligned}$$

Souvenons nous que nous avons également écrit cela en terme de réunion (\exists), d'inclusion (\forall), de réunion d'inclusions d'ensemble.

On notera (pas souvent)

$$\lim_{\delta^*(\sigma_p) \rightarrow 0} S(f, \sigma_p) = S$$

Remarque Le sens du dx

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Fonctions bornées

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

On a une condition nécessaire d'intégrabilité au sens de Riemann. C'est une *faiblesse*.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Fonctions bornées

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

On a une condition nécessaire d'intégrabilité au sens de Riemann. C'est une *faiblesse*.

Proposition- $\mathcal{I}_R([a, b]) \subset \mathcal{B}([a, b])$

Si f est intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann, alors f est bornée

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Fonctions bornées

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

On a une condition nécessaire d'intégrabilité au sens de Riemann. C'est une *faiblesse*.

Proposition- $\mathcal{I}_R([a, b]) \subset \mathcal{B}([a, b])$

Si f est intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann, alors f est bornée

Démonstration

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Fonctions bornées

⇒ Famille de
fonctions et relations⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

On a une condition nécessaire d'intégrabilité au sens de Riemann. C'est une *faiblesse*.

Proposition- $\mathcal{I}_R([a, b]) \subset \mathcal{B}([a, b])$

Si f est intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann, alors f est bornée

Démonstration

Exemple $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $f(0) = 0$.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

Proposition - Contrôle sur la subdivision pointée δ^* -fine

Soit $\delta^* > 0$. Si σ_p est une subdivision pointée δ^* -fine,
alors $\forall k \in \mathbb{N}_n, 0 \leq x_k - x_{k-1} \leq \delta^*$.

Réciproquement, si σ_p est une subdivision pointée vérifiant
 $\forall k \in \mathbb{N}_n, 0 \leq x_k - x_{k-1} \leq \delta^*$, alors σ_p est $2\delta^*$ -fine.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

Proposition - Contrôle sur la subdivision pointée δ^* -fine

Soit $\delta^* > 0$. Si σ_p est une subdivision pointée δ^* -fine,
alors $\forall k \in \mathbb{N}_n, 0 \leq x_k - x_{k-1} \leq \delta^*$.

Réciproquement, si σ_p est une subdivision pointée vérifiant
 $\forall k \in \mathbb{N}_n, 0 \leq x_k - x_{k-1} \leq \delta^*$, alors σ_p est $2\delta^*$ -fine.

Remarque Liens entre intégrale.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

Proposition - Contrôle sur la subdivision pointée δ^* -fine

Soit $\delta^* > 0$. Si σ_p est une subdivision pointée δ^* -fine,
alors $\forall k \in \mathbb{N}_n, 0 \leq x_k - x_{k-1} \leq \delta^*$.

Réciproquement, si σ_p est une subdivision pointée vérifiant
 $\forall k \in \mathbb{N}_n, 0 \leq x_k - x_{k-1} \leq \delta^*$, alors σ_p est $2\delta^*$ -fine.

Remarque Liens entre intégrale.

Démonstration

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à intégrer

3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Familles de fonctions et relations
- ⇒ Somme de Riemann-Cauchy

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

▶ Algèbre des fonctions en escalier

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

- ▶ Algèbre des fonctions en escalier
- ▶ Algèbre des fonctions continues par morceaux sur un segment

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

- ▶ Algèbre des fonctions en escalier
- ▶ Algèbre des fonctions continues par morceaux sur un segment
- ▶ Densité des fonctions en escalier dans les fonctions continues par morceaux :

$$\mathcal{EM}([a, b]) \subset \overline{\mathcal{E}([a, b])}$$

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

- ▶ Algèbre des fonctions en escalier
- ▶ Algèbre des fonctions continues par morceaux sur un segment
- ▶ Densité des fonctions en escalier dans les fonctions continues par morceaux :

$$\mathcal{EM}([a, b]) \subset \overline{\mathcal{E}([a, b])}$$

- ▶ (Fonction continue par morceaux sur un intervalle.)

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Familles de fonctions et relations
- ⇒ Somme de Riemann-Cauchy

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

▶ Somme de Cauchy/Riemann : $S(f, \sigma_p) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(t_k)$.

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'inté-
grale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

- ▶ Somme de Cauchy/Riemann : $S(f, \sigma_p) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(t_k)$.
- ▶ Cas classique : pas constant (somme de Riemann).

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

- ▶ Somme de Cauchy/Riemann : $S(f, \sigma_p) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(t_k)$.
- ▶ Cas classique : pas constant (somme de Riemann).
- ▶ Propriétés classiques (somme de Riemann) : linéarité, positivité, relation de Chasles

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

- ▶ Somme de Cauchy/Riemann : $S(f, \sigma_p) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(t_k)$.
- ▶ Cas classique : pas constant (somme de Riemann).
- ▶ Propriétés classiques (somme de Riemann) : linéarité, positivité, relation de Chasles

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 36 : Intégration
3. Construction de l'intégrale (fin)
- ▶ Exercice : n° 801 & 804

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction

Conclusion

Objectifs

⇒ Familles de fonctions et relations

⇒ Somme de Riemann-Cauchy

- ▶ Somme de Cauchy/Riemann : $S(f, \sigma_p) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(t_k)$.
- ▶ Cas classique : pas constant (somme de Riemann).
- ▶ Propriétés classiques (somme de Riemann) : linéarité, positivité, relation de Chasles

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 36 : Intégration
3. Construction de l'intégrale (fin)
- ▶ Exercice : n° 801 & 804

⇒ Famille de
fonctions et relations

⇒ Somme de
Riemann-Cauchy

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale. Préalable

3. Construction de
l'intégrale

3.1. Classes de fonctions à
intégrer

3.2. Somme de
Cauchy/Riemann associée à f
sur D

3.3. Intégrales d'une fonction