Leçon 95 - Intégrale de Kurzweil-Henstock

10 & 14 avril 2026

⇒ Définition des intégrales
⇒ Premières propriétés par passage à la limite
1. Problèmes
2. « Construire »l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
3.1. Classes de fonctions à intégrer
3.2. Somme de Cauchy/Riemann associée à f sur D
3.3. Intégrales d'une fonction

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

Sommes « classiques »de Riemann

Petit détour pour un savoir-faire classique.

Sommes « classiques »de Riemann

Petit détour pour un savoir-faire classique.

Théorème - Méthode des rectangles

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann.
On rappelle que :

$$R_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i) \text{ et } S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i) \text{ où}$$

$x_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$.

Alors

$$\lim_{n\to+\infty}R_n(f)=\lim_{n\to+\infty}S_n(f)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

(méthode de calcul approché de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, dite méthode des rectangles).

Si f est C^1 sur $[a,b]$, la vitesse de convergence est en $\dfrac{1}{n}$.

Sommes « classiques »de Riemann

Petit détour pour un savoir-faire classique.

Théorème - Méthode des rectangles

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann.
On rappelle que :

$$R_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i) \text{ et } S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i) \text{ où}$$

$x_i=a+i\dfrac{b-a}{n}$.

Alors

$$\lim_{n\to+\infty}R_n(f)=\lim_{n\to+\infty}S_n(f)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

(méthode de calcul approché de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, dite méthode des rectangles).

Si f est C^1 sur $[a,b]$, la vitesse de convergence est en $\dfrac{1}{n}$.

Démonstration

Sommes « classiques » de Riemann. Vitesse de convergence

Démontrons maintenant l'ordre de grandeur de la vitesse de convergence lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$.
On exploite ici un résultat qui généralise le théorème des accroissements finis : théorème de Taylor-Lagrange :

Si F de $\mathscr{C}^1 \cap \mathscr{D}^2([a,b])$, $\exists\, c \in [a,b]$ tel que

$$F(a) = F(b) + (a-b)F'(a) + \frac{(a-b)^2}{2}F''(c).$$

Sommes « classiques » de Riemann. Vitesse de convergence

Démontrons maintenant l'ordre de grandeur de la vitesse de convergence lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$.
On exploite ici un résultat qui généralise le théorème des accroissements finis : théorème de Taylor-Lagrange :

Si F de $\mathscr{C}^1 \cap \mathscr{D}^2([a,b])$, $\exists\, c \in [a,b]$ tel que

$$F(a) = F(b) + (a-b)F'(a) + \frac{(a-b)^2}{2}F''(c).$$

Démonstration

Sommes « classiques » de Riemann. Vitesse de convergence

Démontrons maintenant l'ordre de grandeur de la vitesse de convergence lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$.
On exploite ici un résultat qui généralise le théorème des accroissements finis : théorème de Taylor-Lagrange :

Si F de $\mathscr{C}^1 \cap \mathscr{D}^2([a,b])$, $\exists\, c \in [a,b]$ tel que

$$F(a) = F(b) + (a-b)F'(a) + \frac{(a-b)^2}{2}F''(c).$$

Démonstration

Si f est suffisamment régulière, on pourrait prolonger ce calcul pour avoir un DL plus précis...

Sommes « classiques » de Riemann. Vitesse de convergence

Démontrons maintenant l'ordre de grandeur de la vitesse de convergence lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$.

On exploite ici un résultat qui généralise le théorème des accroissements finis : théorème de Taylor-Lagrange :

Si F de $\mathscr{C}^1 \cap \mathscr{D}^2([a,b])$, $\exists\ c \in [a,b]$ tel que

$$F(a) = F(b) + (a-b)F'(a) + \frac{(a-b)^2}{2}F''(c).$$

Démonstration

Si f est suffisamment régulière, on pourrait prolonger ce calcul pour avoir un DL plus précis...

Exemple Cas particulier courant.

Savoir-faire

Savoir-faire. Reconnaître les sommes de Riemann à pas constant : limite

Si l'on doit chercher la limite pour $n \to +\infty$ d'une somme k de a_n à b_n dont le terme général dépend de k ET de n, c'est très probablement une somme de Riemann à pas constant !

1. Factoriser par n afin de transformer tous les k en $\frac{k}{n}$.
2. Ecrire sur un brouillon la formule de Riemann pour mieux identifier.
3. Le facteur devant $\frac{k}{n}$ vaut $b-a$ (premier terme reconnu), le nombre additionné à $\frac{k}{n}(b-a)$ vaut a (second terme reconnu)
4. Déduire la valeur de b. Puis on identifie pour trouver f
5. Factoriser pour faire apparaitre devant la somme $\frac{b-a}{n}$

Savoir-faire

Savoir-faire. Reconnaître les sommes de Riemann à pas constant : limite

Si l'on doit chercher la limite pour $n \to +\infty$ d'une somme k de a_n à b_n dont le terme général dépend de k ET de n, c'est très probablement une somme de Riemann à pas constant !

1. Factoriser par n afin de transformer tous les k en $\frac{k}{n}$.
2. Ecrire sur un brouillon la formule de Riemann pour mieux identifier.
3. Le facteur devant $\frac{k}{n}$ vaut $b-a$ (premier terme reconnu), le nombre additionné à $\frac{k}{n}(b-a)$ vaut a (second terme reconnu)
4. Déduire la valeur de b. Puis on identifie pour trouver f
5. Factoriser pour faire apparaitre devant la somme $\frac{b-a}{n}$

On exploite les primitives largement utilisées depuis septembre

Savoir-faire

Savoir-faire. Reconnaitre les sommes de Riemann à pas constant & vitesse de convergence

On a reconnu la formule avec le savoir-faire précédent. Il s'agit de calculer la vitesse de convergence.

1. Remplacer $\ell = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par $F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} F(x_{k+1}) - F(x_k)$
2. Il s'agit d'évaluer la différence : $\sum_{k=0}[(x_{k+1} - x_k)f(x_k) - (F(x_{k+1}) - F(x_k))]$.
3. La formule de Taylor-Lagrange donne l'existence d'un c_k tel que $(x_{k+1} - x_k)f(x_k) - (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)^2 f'(c_k)$
4. On remplace par leur valeur les x_k : $R_n - \ell = \frac{b-a}{2n} \times \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(c_k) \sim \frac{(b-a)}{2n}(f(b) - f(a))$

Exercice

Attention. Il ne s'agit pas de série ! !

Bien que cela y ressemble fortement, les suites R_n ou S_n ne sont pas les sommes partielles de série.
En effet, dans la cas des séries, le terme général ne dépend que de k.
Ici il y a bien un mélange des deux variables : n et k ($\in [\![0, n]\!]$)...
Il faut prendre le coup d'oeil pour bien différencier ces deux objets (par ailleurs il ne faut pas non plus confondre série et somme de Riemann)

Exercice

Attention. Il ne s'agit pas de série ! !

Bien que cela y ressemble fortement, les suites R_n ou S_n ne sont pas les sommes partielles de série.
En effet, dans la cas des séries, le terme général ne dépend que de k.
Ici il y a bien un mélange des deux variables : n et k ($\in [\![0, n]\!]$)...
Il faut prendre le coup d'oeil pour bien différencier ces deux objets (par ailleurs il ne faut pas non plus confondre série et somme de Riemann)

Exercice

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Quelle est la vitesse de convergence ? (Savoir-faire)

Méthode des trapèzes

Corollaire - Méthode des trapèzes

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors

$$\frac{R_n(f)+S_n(f)}{2} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,dt$$

Intégrale de Kurzweil-Henstock : le pas est défini par une jauge

Définition - Intégrale de f

Soit f une fonction numérique définie sur le segment $[a,b]$.
La fonction f est dite **intégrable sur $[a,b]$, au sens de Kurzweil-Henstock** ou **KH-intégrable sur** $[a,b]$ s'il existe un nombre réel S tel que

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta_\epsilon,\ \text{jauge sur}\ [a,b]\ \text{tq}\ \forall\ \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

On notera $\mathscr{I}([a,b])$ **l'ensemble des fonctions intégrables sur** $[a,b]$.
Le nombre S ci-dessus est appelé l'intégrale de la fonction f sur $[a,b]$ et est noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$ ou…

Relation

Evidemment, la jauge δ dépend de ϵ fixé a priori. Il faut voir les relations entre les jauges avec ϵ.

Relation

Evidemment, la jauge δ dépend de ϵ fixé a priori. Il faut voir les relations entre les jauges avec ϵ.

Relation entre les adaptations

On note $D_{KH}(f,\epsilon)$, l'ensemble des jauges ϵ-adaptée à f.
On notera que si $\delta \in D_{KH}(f,\epsilon)$, alors :

- $\forall\ \epsilon' > \epsilon\ \delta \in D_{KH}(f,\epsilon')$
- $\forall\ \delta' \leqslant \delta,\ \delta' \in D_{KH}(f,\epsilon)$.

Relation

Evidemment, la jauge δ dépend de ϵ fixé a priori. Il faut voir les relations entre les jauges avec ϵ.

Relation entre les adaptations

On note $D_{KH}(f,\epsilon)$, l'ensemble des jauges ϵ-adaptée à f.
On notera que si $\delta \in D_{KH}(f,\epsilon)$, alors :

- $\forall\ \epsilon' > \epsilon\ \delta \in D_{KH}(f,\epsilon')$
- $\forall\ \delta' \leqslant \delta,\ \delta' \in D_{KH}(f,\epsilon)$.

Démonstration

Remarques et exemple

Il nous faut donc maintenant préciser ce qu'est l'ensemble $\mathscr{I}([a,b])$.

Remarques et exemple

Il nous faut donc maintenant préciser ce qu'est l'ensemble $\mathscr{I}([a,b])$.

Remarque Existence d'une subdivision δ-fine

Remarques et exemple

Il nous faut donc maintenant préciser ce qu'est l'ensemble $\mathscr{I}([a,b])$.

Remarque Existence d'une subdivision δ-fine

Exemple Intégrale d'une fonction nulle sauf en un nombre fini de points.

Remarques et exemple

Il nous faut donc maintenant préciser ce qu'est l'ensemble $\mathscr{I}([a,b])$.

Remarque Existence d'une subdivision δ-fine

Exemple Intégrale d'une fonction nulle sauf en un nombre fini de points.

<u>Exercice</u>

Si le nombre de points (y_i) est infini mais dénombrable, montrer qu'on a encore $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Unicité de l'intégrale

Proposition - Unicité de l'intégrale

Si f est R-intégrable sur $[a, b]$, alors f est KH-intégrable.
Si f est intégrable, son intégrale est unique (définie de l'une ou l'autre des façons).

Unicité de l'intégrale

Proposition - Unicité de l'intégrale

Si f est R-intégrable sur $[a,b]$, alors f est KH-intégrable.
Si f est intégrable, son intégrale est unique (définie de l'une ou l'autre des façons).

Démonstration

Chacun sa jauge !

L'exemple qui suit, montre qu'il n'est pas nécessaire que la fonction soit bornée pour être KH-intégrable.

Chacun sa jauge !

L'exemple qui suit, montre qu'il n'est pas nécessaire que la fonction soit bornée pour être KH-intégrable.

Exemple $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0,1]$.

Chacun sa jauge !

L'exemple qui suit, montre qu'il n'est pas nécessaire que la fonction soit bornée pour être KH-intégrable.

Exemple $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0,1]$.

Savoir-faire. A chaque problème sa jauge !

Vous aurez peu d'exercices où il faudra montrer à la main, comme sur l'exemple précédent, la KH-intégrabilité.
Une idée (parmi d'autres) : pour chaque problème, on crée une jauge qui contient le problème.
Puis, on prend la jauge minimale

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Quelles sont les fonctions intégrables ?

- Et les fonctions en escalier sont intégrables

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

- Et les fonctions en escalier sont intégrables
- Entre deux fonctions intégrables, f est intégrables.

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

- Et les fonctions en escalier sont intégrables
- Entre deux fonctions intégrables, f est intégrables.
- Donc les fonctions continues par morceaux sont intégrables !

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

- Version forte ou faible. L'intégration est la réciproque de la dérivation

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

- Version forte ou faible. L'intégration est la réciproque de la dérivation
- Lien avec une primitive : pour le calcul ou réciproquement, pour justifier l'existence de la primitive

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

- Version forte ou faible. L'intégration est la réciproque de la dérivation
- Lien avec une primitive : pour le calcul ou réciproquement, pour justifier l'existence de la primitive
- Savoir-faire : étudier $x \mapsto \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)\mathrm{d}t.$

Conclusion

Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 36 : Intégration
  5. L'intégrale comme « outil puissant » de l'analyse. (fin)
- Exercice : n°675 & 695

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

- Intégrale de Riemann :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta \in \mathbb{R}_+^*\ \text{telle que}\ \forall\ \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

- Intégrale de Riemann :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall\, \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

- Si une fonction est R-intégrable, la méthode des rectangles (pas constant) converge vers l'intégrale.
  On maitrise la vitesse de convergence si f de classe $\mathscr{C}^1$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

- Intégrale de Riemann :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall\ \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

- Si une fonction est R-intégrable, la méthode des rectangles (pas constant) converge vers l'intégrale.
  On maitrise la vitesse de convergence si f de classe $\mathscr{C}^1$.
- Intégrale de Kurzweil-Henstock :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall\ \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition des intégrales

- Intégrale de Riemann :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall\, \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

- Si une fonction est R-intégrable, la méthode des rectangles (pas constant) converge vers l'intégrale.
  On maitrise la vitesse de convergence si f de classe $\mathscr{C}^1$.
- Intégrale de Kurzweil-Henstock :

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta : [a,b] \to \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall\, \sigma_p \in \mathfrak{S}_\delta, |S(f,\sigma_p) - S| < \epsilon$$

- A chaque fonction sa jauge d'intégration !

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition des intégrales

$\Rightarrow$ Premières propriétés par passage à la limite

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

- Passage à la limite sur les sommes de Riemann

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition des intégrales

$\Rightarrow$ Premières propriétés par passage à la limite

- Passage à la limite sur les sommes de Riemann
- Forme linéaire, positivité, croissance.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

- Passage à la limite sur les sommes de Riemann
- Forme linéaire, positivité, croissance.
- Majoration (si $|f|$ intégrable)

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

- Passage à la limite sur les sommes de Riemann
- Forme linéaire, positivité, croissance.
- Majoration (si $|f|$ intégrable)

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

- Passage à la limite sur les sommes de Riemann
- Forme linéaire, positivité, croissance.
- Majoration (si $|f|$ intégrable)

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 36 : Intégration
  4. Espaces et sous-espaces de fonctions intégrables
- Exercice : n°811 & 814
- TD de jeudi :
  8h-10h : 802, 805, 812, 819, 815, 817
  10h-12h : 803, 806, 813, 820, 816, 818