



1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Leçon 96 - Intégrale de Kurzweil-Henstock

## 1. Problèmes

## 2. « Construire » l'intégrale.

## 3. Construction de l'intégrale

## 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

### 4.1. Notations

### 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

### 4.3. Fermeture par convergence uniforme

### 4.4. Théorèmes fondamentaux de l'analyse

### 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

### 1. Problèmes

### 2. « Construire » l'intégrale.

### 3. Construction de l'intégrale

### 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

#### 4.1. Notations

#### 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

#### 4.3. Fermeture par convergence uniforme

#### 4.4. Fondamentaux

#### 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## 1. Problèmes

## 2. « Construire » l'intégrale.

## 3. Construction de l'intégrale

## 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

### 4.1. Notations

### 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

### 4.3. Fermeture par convergence uniforme

### 4.4. Théorèmes fondamentaux de l'analyse

### 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

### 1. Problèmes

### 2. « Construire » l'intégrale.

### 3. Construction de l'intégrale

### 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

#### 4.1. Notations

#### 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

#### 4.3. Fermeture par convergence uniforme

#### 4.4. Fondamentaux

#### 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Nommer les ensembles

Si la jauge peut être choisie constante, alors la fonction est  $\mathbb{R}$ -intégrable et donc KH-intégrable, sinon elle est KH-intégrable (ou rien).

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

#### 4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Nommer les ensembles

Si la jauge peut être choisie constante, alors la fonction est R-intégrable et donc KH-intégrable, sinon elle est KH-intégrable (ou rien).

## Définition - Ensemble

On note  $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}([a, b])$  l'ensemble des fonctions R-intégrables sur  $[a, b]$ .

On note  $\mathcal{I}_{\mathcal{KH}}([a, b])$  l'ensemble des fonctions KH-intégrables sur  $[a, b]$ .

Si on ne précise pas :  $\mathcal{I}([a, b])$  est un abus de notation de  $\mathcal{I}_{\mathcal{KH}}([a, b])$ .

Par abus, on peut aussi oublier de noter  $([a, b])$ , si le contexte est assez clair.

On rappelle que  $\mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{R})$  est l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur  $[a, b]$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Nommer les ensembles

Si la jauge peut être choisie constante, alors la fonction est R-intégrable et donc KH-intégrable, sinon elle est KH-intégrable (ou rien).

## Définition - Ensemble

On note  $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}([a, b])$  l'ensemble des fonctions R-intégrables sur  $[a, b]$ .

On note  $\mathcal{I}_{KH}([a, b])$  l'ensemble des fonctions KH-intégrables sur  $[a, b]$ .

Si on ne précise pas :  $\mathcal{I}([a, b])$  est un abus de notation de  $\mathcal{I}_{KH}([a, b])$ .

Par abus, on peut aussi oublier de noter  $([a, b])$ , si le contexte est assez clair.

On rappelle que  $\mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{R})$  est l'ensemble des fonctions continues par morceaux définies sur  $[a, b]$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Un des buts de ce chapitre est de caractériser ces ensembles, donner des exemples. . .

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## 1. Problèmes

## 2. « Construire » l'intégrale.

## 3. Construction de l'intégrale

## 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

### 4.1. Notations

### 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

### 4.3. Fermeture par convergence uniforme

### 4.4. Théorèmes fondamentaux de l'analyse

### 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

### 1. Problèmes

### 2. « Construire » l'intégrale.

### 3. Construction de l'intégrale

### 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

#### 4.1. Notations

#### 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

#### 4.3. Fermeture par convergence uniforme

#### 4.4. Fondamentaux

#### 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Passage à la limite sur les sommes de Cauchy

Ces propriétés tombent de celles des sommes de Cauchy, par continuité et croissance de la limite  $\lim_{\delta(\sigma_p) \rightarrow 0} \mathcal{S}(f, \sigma_p) = \int_a^b f$ .

### Théorème Extensions des propriétés de l'intégrale

- ▶  $f \mapsto \int_{[a,b]} f$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{I}([a, b])$  et  $\mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{R})$ .
- ▶ positivité :  $f \in \mathcal{I}([a, b]), f \geq 0 \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geq 0$
- ▶ croissance :  $f, g \in \mathcal{I}([a, b]), f \geq g \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$
- ▶ majoration en v.a. :  $f \in \mathcal{C}_M([a, b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{C}_M(\mathbb{R})$  et  $|\int_{[a,b]} f| \leq \int_{[a,b]} |f|$   
 Mais, on n'a pas nécessairement  $|f| \in \mathcal{I}([a, b])$  si  $f \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ .  
 mais toujours, si  $f$  et  $|f| \in \mathcal{I}([a, b])$ , alors  $|\int_{[a,b]} f| \leq \int_{[a,b]} |f|$ .

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Passage à la limite sur les sommes de Cauchy

Ces propriétés tombent de celles des sommes de Cauchy, par continuité et croissance de la limite  $\lim_{\delta(\sigma_p) \rightarrow 0} \mathcal{S}(f, \sigma_p) = \int_a^b f$ .

## Théorème Extensions des propriétés de l'intégrale

- ▶  $f \mapsto \int_{[a,b]} f$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{I}([a, b])$  et  $\mathcal{C}_M([a, b], \mathbb{R})$ .
- ▶ positivité :  $f \in \mathcal{I}([a, b]), f \geq 0 \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geq 0$
- ▶ croissance :  $f, g \in \mathcal{I}([a, b]), f \geq g \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$
- ▶ majoration en v.a. :  $f \in \mathcal{C}_M([a, b]) \Rightarrow |f| \in \mathcal{C}_M(\mathbb{R})$  et  $|\int_{[a,b]} f| \leq \int_{[a,b]} |f|$   
 Mais, on n'a pas nécessairement  $|f| \in \mathcal{I}([a, b])$  si  $f \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ .  
 mais toujours, si  $f$  et  $|f| \in \mathcal{I}([a, b])$ , alors  $|\int_{[a,b]} f| \leq \int_{[a,b]} |f|$ .

## Démonstration

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## 1. Problèmes

## 2. « Construire » l'intégrale.

## 3. Construction de l'intégrale

## 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

### 4.1. Notations

### 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

### 4.3. Fermeture par convergence uniforme

### 4.4. Théorèmes fondamentaux de l'analyse

### 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

### 1. Problèmes

### 2. « Construire » l'intégrale.

### 3. Construction de l'intégrale

### 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

#### 4.1. Notations

#### 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

#### 4.3. Fermeture par convergence uniforme

#### 4.4. Fondamentaux

#### 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Remarque. Deux temps

- ▶ Si la jauge peut être choisie constante, alors la fonction est  $\mathbb{R}$ -intégrable, sinon elle est KH-intégrable (ou rien). Nous le verrons sur différents exemples.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

**4.3. Fermeture par convergence uniforme**

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Remarque. Deux temps

- ▶ Si la jauge peut être choisie constante, alors la fonction est  $\mathbb{R}$ -intégrable, sinon elle est KH-intégrable (ou rien). Nous le verrons sur différents exemples.
- ▶ Avant de faire la liste des fonctions intégrables au sens de Riemann ou au sens de Kurzweil-Henstock, nous avons besoin d'un théorème de stabilité.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## **Remarque** Fonctions intégrables au sens de Riemann

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme**
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

**Remarque** Fonctions intégrables au sens de Riemann  
**Analyse** Fonctions créneau et fonction en escalier

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme**
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Fonctions en escalier

**Remarque** Fonctions intégrables au sens de Riemann  
**Analyse** Fonctions créneau et fonction en escalier

### Proposition - Intégration des fonctions en escalier

Les fonctions en escalier sur un segment sont donc R-intégrables et donc KH-intégrables. Et plus précisément si  $f \in \mathcal{E}[a, b]$ ,

$$\int_a^b f(t)dt = I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})\lambda_i$$
 où  $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  est subordonnée à  $f$  i.e.  $\forall i \in \mathbb{N}_n, f|_{]a_i, a_{i-1}[} = \lambda_i$ .

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Théorème- Encadrement

Une fonction  $f$  est KH-intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe deux fonctions  $f_{-\epsilon}$  et  $f_{+\epsilon}$  KH-intégrables telles que

$$f_{-\epsilon} \leq f \leq f_{+\epsilon} \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b f_{+\epsilon} - \int_a^b f_{-\epsilon} \right| \leq \epsilon$$

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

**4.3. Fermeture par convergence uniforme**

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Stabilité uniforme

## Théorème- Encadrement

Une fonction  $f$  est KH-intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe deux fonctions  $f_{-\epsilon}$  et  $f_{+\epsilon}$  KH-intégrables telles que

$$f_{-\epsilon} \leq f \leq f_{+\epsilon} \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b f_{+\epsilon} - \int_a^b f_{-\epsilon} \right| \leq \epsilon$$

On a le même résultat de fermeture d'espace des fonctions R-intégrables par convergence uniforme :

## Proposition - Encadrement

Une fonction  $f$  est R-intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe deux fonctions  $f_{-\epsilon}$  et  $f_{+\epsilon}$  R-intégrables telles que

$$f_{-\epsilon} \leq f \leq f_{+\epsilon} \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b f_{+\epsilon} - \int_a^b f_{-\epsilon} \right| \leq \epsilon$$

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Démonstrations. Cas des fonctions en escalier

Il s'agit de la même structure de démonstration, mais la jauge est restreinte à l'ensemble des jauges constantes dans le second cas.

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme**
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

Il s'agit de la même structure de démonstration, mais la jauge est restreinte à l'ensemble des jauges constantes dans le second cas.

## Démonstration

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux). Nous savons que les fonctions en escalier sur  $[a, b]$  sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

- 1. Problèmes
- 2. « Construire » l'intégrale.
- 3. Construction de l'intégrale
- 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme**
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux). Nous savons que les fonctions en escalier sur  $[a, b]$  sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

**Proposition** -  $\mathcal{CM}([a, b]) \subset \mathcal{I}([a, b])$

Toute fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  est R-intégrable donc KH-intégrable sur  $[a, b]$ .

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux). Nous savons que les fonctions en escalier sur  $[a, b]$  sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

**Proposition -  $\mathcal{CM}([a, b]) \subset \mathcal{I}([a, b])$**

Toute fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  est R-intégrable donc KH-intégrable sur  $[a, b]$ .

**Corollaire - Fonction continue**

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est R-intégrable et KH-intégrable sur  $[a, b]$

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux). Nous savons que les fonctions en escalier sur  $[a, b]$  sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

**Proposition -  $\mathcal{CM}([a, b]) \subset \mathcal{I}([a, b])$**

Toute fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  est  $\mathbb{R}$ -intégrable donc KH-intégrable sur  $[a, b]$ .

**Corollaire - Fonction continue**

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est  $\mathbb{R}$ -intégrable et KH-intégrable sur  $[a, b]$

**Démonstration**

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux). Nous savons que les fonctions en escalier sur  $[a, b]$  sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

**Proposition** -  $\mathcal{CM}([a, b]) \subset \mathcal{I}([a, b])$

Toute fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  est  $\mathbb{R}$ -intégrable donc KH-intégrable sur  $[a, b]$ .

**Corollaire - Fonction continue**

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est  $\mathbb{R}$ -intégrable et KH-intégrable sur  $[a, b]$

**Démonstration**

**Remarque** Changement de valeurs en quelques points

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Fonctions continues par morceaux

Pour l'étude des fonctions continues (par morceaux). Nous savons que les fonctions en escalier sur  $[a, b]$  sont intégrables, donc avec le théorème de stabilité vue plus haut :

**Proposition** -  $\mathcal{CM}([a, b]) \subset \mathcal{I}([a, b])$

Toute fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  est  $\mathbb{R}$ -intégrable donc KH-intégrable sur  $[a, b]$ .

**Corollaire - Fonction continue**

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est  $\mathbb{R}$ -intégrable et KH-intégrable sur  $[a, b]$

**Démonstration**

**Remarque** Changement de valeurs en quelques points

**Remarque** Calcul d'aire

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## 1. Problèmes

## 2. « Construire » l'intégrale.

## 3. Construction de l'intégrale

## 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

### 4.1. Notations

### 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

### 4.3. Fermeture par convergence uniforme

### 4.4. Théorèmes fondamentaux de l'analyse

### 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

### 1. Problèmes

### 2. « Construire » l'intégrale.

### 3. Construction de l'intégrale

### 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

#### 4.1. Notations

#### 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

#### 4.3. Fermeture par convergence uniforme

#### 4.4. Fondamentaux

#### 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Théorème fondamental

A ce stade, on n'a pas besoin de faire la différence entre les deux intégrales.

Cela change avec la partie qui suit.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

**4.4. Fondamentaux**

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Théorème fondamental

A ce stade, on n'a pas besoin de faire la différence entre les deux intégrales.

Cela change avec la partie qui suit.

## Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel (version forte)

Soit  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et admettant une dérivée à droite en  $a$  et à gauche en  $b$ .

Notons  $f$  la dérivée de  $F$ . Alors  $f$  est KH-intégrable

( $f \in \mathcal{I}([a, b])$ ) et : 
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Théorème fondamental

A ce stade, on n'a pas besoin de faire la différence entre les deux intégrales.

Cela change avec la partie qui suit.

## Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel (version forte)

Soit  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et admettant une dérivée à droite en  $a$  et à gauche en  $b$ .

Notons  $f$  la dérivée de  $F$ . Alors  $f$  est KH-intégrable

( $f \in \mathcal{I}([a, b])$ ) et : 
$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

**Remarque** Jauge adaptée, inégalité des accroissements finis et réciproque.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Théorème fondamental

A ce stade, on n'a pas besoin de faire la différence entre les deux intégrales.

Cela change avec la partie qui suit.

## Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel (version forte)

Soit  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et admettant une dérivée à droite en  $a$  et à gauche en  $b$ .

Notons  $f$  la dérivée de  $F$ . Alors  $f$  est KH-intégrable

( $f \in \mathcal{I}([a, b])$ ) et :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

**Remarque** Jauge adaptée, inégalité des accroissements finis et réciproque.

**Démonstration**

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Une jauge adaptée à $f$

**Remarque** Retour sur le choix de la jauge.

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux**
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Une jauge adaptée à $f$

**Remarque** Retour sur le choix de la jauge.

**Savoir-faire.** Trouver la jauge pour une fonction  $f$  admettant une primitive  $F$

Si  $f$  admet une primitive  $F$ , i.e.  $F' = f$ , alors on a une jauge naturelle : celle de la dérivation de  $F$ .

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \forall x, y \in [a, b], |y - x| \leq \delta(x) \\ \Rightarrow \left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f'(x) \right| \leq \epsilon$$

Alors si  $\sigma_p$  est  $\delta$ -fine :

$$\int_a^b f(t) dt - (F(b) - F(a)) = \\ \sum_{k=1}^r [(x_{k+1} - x_k) f(t_k) - (F(x_{k+1}) - F(t_k)) - (F(t_k) - F(x_k))] \\ \leq \epsilon(b - a)$$

en respectant la croissance :  $x_k < t_k < x_{k+1}$

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

**Remarque** Rappels. Revoir le chapitre 6.

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux**
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

**Remarque** Rappels. Revoir le chapitre 6.

## Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel (version faible)

Soit  $f$  continue sur  $I$ , intervalle de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$  ( $=\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).  
Soit  $a \in I$ . Alors la fonction

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est de classe  $C^1$  sur  $I$  et  $F' = f$ .

C'est de plus l'unique primitive de  $f$  nulle en  $a \in I$ .

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

**4.4. Fondamentaux**

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

**Remarque** Rappels. Revoir le chapitre 6.

## Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel (version faible)

Soit  $f$  continue sur  $I$ , intervalle de  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$  ( $=\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).  
Soit  $a \in I$ . Alors la fonction

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est de classe  $C^1$  sur  $I$  et  $F' = f$ .

C'est de plus l'unique primitive de  $f$  nulle en  $a \in I$ .

## Démonstration

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Corollaire - Primitive pour une fonction continue

Toute fonction continue sur  $I$  admet une primitive sur  $I$ .

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux**
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Corollaire - Primitive pour une fonction continue

Toute fonction continue sur  $I$  admet une primitive sur  $I$ .

Ce résultat se démontre également en restant dans le cadre des fonctions au sens de Riemann. Car toute fonction continue sur un segment est uniformément continue, elle est donc intégrable au sens de Riemann (on peut prendre une jauge constante).

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux**
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Corollaire - Primitive pour une fonction continue

Toute fonction continue sur  $I$  admet une primitive sur  $I$ .

Ce résultat se démontre également en restant dans le cadre des fonctions au sens de Riemann. Car toute fonction continue sur une segment est uniformément continue, elle est donc intégrable au sens de Riemann (on peut prendre une jauge constante).

## Attention - Pas toutes les primitives

On n'obtient pas toutes les primitives ainsi.

Un contre-exemple : pour  $f(x) = \cos x$ , la primitive  $F(x) = \sin x + 2$  ne peut s'obtenir ainsi.

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

Et on retrouve le résultat largement exploité en début d'année :

## Théorème - Expression en fonction d'une primitive

Soit  $f$  continue sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $a$  et  $b$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = \left[ F(t) \right]_a^b.$$

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Primitives et calcul d'intégrale

Et on retrouve le résultat largement exploité en début d'année :

## Théorème - Expression en fonction d'une primitive

Soit  $f$  continue sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $a$  et  $b$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = \left[ F(t) \right]_a^b.$$

## Démonstration

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

Et on retrouve le résultat largement exploité en début d'année :

## Théorème - Expression en fonction d'une primitive

Soit  $f$  continue sur  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $a$  et  $b$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = \left[ F(t) \right]_a^b.$$

### Démonstration

**Remarque** Cas des fonctions continues par morceaux.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

**4.4. Fondamentaux**

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Attention. Dérivation

Si  $f$  est continue et que  $G : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ , alors  $G$  est dérivable et  $G'(x) = f(x)$  et non :  $f(x) - f(x_0)$ , comme lu souvent !

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux**
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Attention

## Attention. Dérivation

Si  $f$  est continue et que  $G : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ , alors  $G$  est dérivable et  $G'(x) = f(x)$  et non :  $f(x) - f(x_0)$ , comme lu souvent !

Savoir-faire. Etudier  $x \mapsto \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)dt$

Supposons  $f$  est continue,  $h_1$  et  $h_2$  dérivable. Notons  $F$  une primitive de  $f$ ,  $G : x \mapsto \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)dt = F(h_2(x)) - F(h_1(x))$ .  
dérivable par composition (et soustraction) de dérivée :

$$\begin{aligned} G'(x) &= h_2'(x) \times F'(h_2(x)) - h_1'(x) \times F'(h_1(x)) \\ &= h_2'(x) \times f(h_2(x)) - h_1'(x) \times f(h_1(x)) \end{aligned}$$

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## 1. Problèmes

## 2. « Construire » l'intégrale.

## 3. Construction de l'intégrale

## 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

### 4.1. Notations

### 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

### 4.3. Fermeture par convergence uniforme

### 4.4. Théorèmes fondamentaux de l'analyse

### 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

### 1. Problèmes

### 2. « Construire » l'intégrale.

### 3. Construction de l'intégrale

### 4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

#### 4.1. Notations

#### 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

#### 4.3. Fermeture par convergence uniforme

#### 4.4. Fondamentaux

#### 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Diagramme de Wenn

Afin de visualiser les résultats en termes d'ensemble, on peut faire un diagramme de Wenn.

La forme naturelle d'un espace vectoriel n'est pas celle d'une « patate »...

- ▶  $\mathcal{B}([a, b])$
- ▶  $\mathcal{C}([a, b])$
- ▶  $\mathcal{C}_M([a, b])$
- ▶  $\mathcal{E}([a, b])$
- ▶  $\overline{\mathcal{E}([a, b])}^u$ , l'ensemble des limites uniformes des fonctions en escalier
- ▶  $\mathcal{I}([a, b])$
- ▶  $\mathcal{I}_R([a, b])$

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

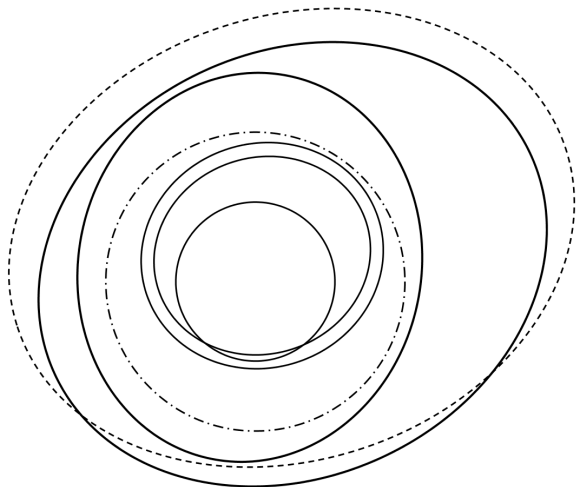
4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Diagramme de Wenn



1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants**

## Objectifs

- ⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?
- ⇒ Théorèmes fondamentaux

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

- ▶ Et les fonctions en escalier sont intégrables

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

- ▶ Et les fonctions en escalier sont intégrables
- ▶ Entre deux fonctions intégrables,  $f$  est intégrables.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

- ▶ Et les fonctions en escalier sont intégrables
- ▶ Entre deux fonctions intégrables,  $f$  est intégrables.
- ▶ Donc les fonctions continues par morceaux sont intégrables !

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Objectifs

- ⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?
- ⇒ Théorèmes fondamentaux

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

- ▶ Version forte ou faible. L'intégration est la réciproque de la dérivation

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

- ▶ Version forte ou faible. L'intégration est la réciproque de la dérivation
- ▶ Lien avec une primitive : pour le calcul ou réciproquement, pour justifier l'existence de la primitive

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?

⇒ Théorèmes fondamentaux

- ▶ Version forte ou faible. L'intégration est la réciproque de la dérivation
- ▶ Lien avec une primitive : pour le calcul ou réciproquement, pour justifier l'existence de la primitive

▶ Savoir-faire : étudier  $x \mapsto \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t) dt$ .

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

- ⇒ Quelles sont les fonctions intégrables ?
- ⇒ Théorèmes fondamentaux

## Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 36 : Intégration  
5. L'intégrale comme « outil puissant » de l'analyse.  
(fin)
- ▶ Exercice : n°675 & 695

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Définition des intégrales

► Intégrale de Riemann :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall \sigma_p \in \mathfrak{G}_\delta, |S(f, \sigma_p) - S| < \epsilon$$

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Définition des intégrales

- ▶ Intégrale de Riemann :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall \sigma_p \in \mathfrak{G}_\delta, |S(f, \sigma_p) - S| < \epsilon$$

- ▶ Si une fonction est  $R$ -intégrable, la méthode des rectangles (pas constant) converge vers l'intégrale.  
On maîtrise la vitesse de convergence si  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Définition des intégrales

- ▶ Intégrale de Riemann :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall \sigma_p \in \mathfrak{G}_\delta, |S(f, \sigma_p) - S| < \epsilon$$

- ▶ Si une fonction est  $R$ -intégrable, la méthode des rectangles (pas constant) converge vers l'intégrale.

On maîtrise la vitesse de convergence si  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- ▶ Intégrale de Kurzweil-Henstock :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall \sigma_p \in \mathfrak{G}_\delta, |S(f, \sigma_p) - S| < \epsilon$$

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Définition des intégrales

- ▶ Intégrale de Riemann :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall \sigma_p \in \mathfrak{G}_\delta, |S(f, \sigma_p) - S| < \epsilon$$

- ▶ Si une fonction est  $R$ -intégrable, la méthode des rectangles (pas constant) converge vers l'intégrale.  
On maîtrise la vitesse de convergence si  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- ▶ Intégrale de Kurzweil-Henstock :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } \forall \sigma_p \in \mathfrak{G}_\delta, |S(f, \sigma_p) - S| < \epsilon$$

- ▶ A chaque fonction sa jauge d'intégration !

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

## Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

- ⇒ Définition des intégrales
- ⇒ Premières propriétés par passage à la limite
  - ▶ Passage à la limite sur les sommes de Riemann

1. Problèmes
2. « Construire » l'intégrale.
3. Construction de l'intégrale
4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables
  - 4.1. Notations
  - 4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy
  - 4.3. Fermeture par convergence uniforme
  - 4.4. Fondamentaux
  - 4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

- ▶ Passage à la limite sur les sommes de Riemann
- ▶ Forme linéaire, positivité, croissance.

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

- ▶ Passage à la limite sur les sommes de Riemann
- ▶ Forme linéaire, positivité, croissance.
- ▶ Majoration (si  $|f|$  intégrable)

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

- ▶ Passage à la limite sur les sommes de Riemann
- ▶ Forme linéaire, positivité, croissance.
- ▶ Majoration (si  $|f|$  intégrable)

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Définition des intégrales

⇒ Premières propriétés par passage à la limite

- ▶ Passage à la limite sur les sommes de Riemann
- ▶ Forme linéaire, positivité, croissance.
- ▶ Majoration (si  $|f|$  intégrable)

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants

# Conclusion

## Objectifs

- ⇒ Définition des intégrales
- ⇒ Premières propriétés par passage à la limite

## Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 36 : Intégration  
4. Espaces et sous-espaces de fonctions intégrables
- ▶ Exercice : n° 800

1. Problèmes

2. « Construire » l'intégrale.

3. Construction de l'intégrale

4. Espaces et sous-espaces des fonctions intégrables

4.1. Notations

4.2. Passage à la limite des propriétés de somme de Cauchy

4.3. Fermeture par convergence uniforme

4.4. Fondamentaux

4.5. Bilan en termes d'espaces vectoriels croissants