⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Problèmes

Problème Somme d'une famille indexé sur $\mathbb{N}^2$

Problèmes

Problème Somme d'une famille indexé sur $\mathbb{N}^2$

Problème Changement d'ordre de l'addition des termes d'une série

Problèmes

Problème Somme d'une famille indexé sur $\mathbb{N}^2$

Problème Changement d'ordre de l'addition des termes d'une série

Problème Ordre de calcul

Problèmes

Problème Somme d'une famille indexé sur $\mathbb{N}^2$

Problème Changement d'ordre de l'addition des termes d'une série

Problème Ordre de calcul

Problème Définition

Problèmes

Problème Somme d'une famille indexé sur $\mathbb{N}^2$

Problème Changement d'ordre de l'addition des termes d'une série

Problème Ordre de calcul

Problème Définition

Problème Structure d'espace vectoriel ?

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Famille (positive) sommable

Soit I un ensemble non vide et $\mathscr{P}_f(I)$, l'ensemble des parties finies de I.

Famille (positive) sommable

Soit I un ensemble non vide et $\mathscr{P}_f(I)$, l'ensemble des parties finies de I.

Définition - Famille de réels positifs sommable

Une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de réels positifs ou nuls est dite sommable, si

$$\exists\, M \in \mathbb{R}+, \forall\, J \in \mathscr{P}_f(I), \sum_{i\in J} \alpha_i \leqslant M$$

Si tel est le cas, on définit et on note la somme de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ par :

$$S_I(\alpha) := \sum_{i\in I} \alpha_i = \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \sum_{j\in J} \alpha_i$$

Si la famille n'est pas sommable, alors on pose $\sum_{i\in I} \alpha_i = +\infty$ (ce qui est bien la valeur de la borne supérieure...)

Famille (positive) sommable

Soit I un ensemble non vide et $\mathscr{P}_f(I)$, l'ensemble des parties finies de I.

Définition - Famille de réels positifs sommable

Une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de réels positifs ou nuls est dite sommable, si

$$\exists\, M \in \mathbb{R}+, \forall\, J \in \mathscr{P}_f(I), \sum_{i\in J} \alpha_i \leqslant M$$

Si tel est le cas, on définit et on note la somme de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ par :

$$S_I(\alpha) := \sum_{i\in I} \alpha_i = \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \sum_{j\in J} \alpha_i$$

Si la famille n'est pas sommable, alors on pose $\displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i = +\infty$ (ce qui est bien la valeur de la borne supérieure...)

Remarque Rappel

Exemples

Exemple Cas I fini

Exemples

Exemple Cas I fini

Exercice

Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $i \in I$, $\alpha_i = a$.

Alors montrer que $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable $\iff$ I est fini.

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Premier cas particulier : les séries

Proposition - Cas $I = \mathbb{N}$. Les séries positifs

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série (de termes positifs) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. En cas de sommabilité :

$$S_{\mathbb{N}}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Premier cas particulier : les séries

Proposition - Cas $I = \mathbb{N}$. Les séries positifs

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série (de termes positifs) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. En cas de sommabilité :

$$S_{\mathbb{N}}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration

Premier cas particulier : les séries

Proposition - Cas $I = \mathbb{N}$. Les séries positifs

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série (de termes positifs) $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge. En cas de sommabilité :

$$S_{\mathbb{N}}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration

Remarque Notation

$\Rightarrow$ Définition de la sommabilité

$\Rightarrow$ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Applications avec $I = \mathbb{N}^2$

Savoir-faire. Sous ensembles finis de $\mathbb{N}^2$

Se concentrer sur $[\![0, N]\!] \times [\![0, P]\!]$ car les familles sont à termes positifs.

Applications avec $I = \mathbb{N}^2$

Savoir-faire. Sous ensembles finis de $\mathbb{N}^2$

Se concentrer sur $[\![0, N]\!] \times [\![0, P]\!]$ car les familles sont à termes positifs.

Exercice

Montrer la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

Exemple de famille non sommable

Savoir-faire. Montrer qu'une famille n'est pas sommable

Si l'on trouve une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de I tel que $S_n := \sum_{i\in J_n} u_i$ n'est pas majorée, alors nécessairement la suite n'est pas sommable.

Exemple de famille non sommable

Savoir-faire. Montrer qu'une famille n'est pas sommable

Si l'on trouve une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de I tel que $S_n := \sum_{i\in J_n} u_i$ n'est pas majorée, alors nécessairement la suite n'est pas sommable.

<u>Exercice</u>

On cherche à étudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

1. Par une comparaison série-intégrale, montrer que

$$\sum_{q=1}^{Q} \frac{1}{p^2+q^2} \geqslant \frac{1}{p}\left(\arctan\frac{Q+1}{p} - \arctan\frac{1}{p}\right)$$

2. Montrer alors que la suite $\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{2p-1}\frac{1}{p^2+q^2}\right)_n$ n'est pas majorée. Conclure

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Comparaison des ensembles

Proposition - Comparaison des ensembles

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Supposons que $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable
Soit $I' \subset I$.
Alors $(\alpha_i)_{i\in I'}$ est une famille sommable et $\sum_{i\in I'} \alpha_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

Comparaison des ensembles

Proposition - Comparaison des ensembles

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Supposons que $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable
Soit $I' \subset I$.
Alors $(\alpha_i)_{i\in I'}$ est une famille sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I'} \alpha_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

Démonstration

Comparaison des termes

Proposition Comparaison de termes

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Soit $(\beta_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une autre famille de réels positifs tels que :
$\forall\ i \in I, (0 \leqslant)\beta_i \leqslant \alpha_i$.

• Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, alors $(\beta_i)_{i\in I}$ est une famille sommable.
Et $\sum_{i\in I} \beta_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

• Si $(\beta_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille est sommable, alors $(\alpha_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille est sommable (contraposée).
Et $\sum_{i\in I} \beta_i = \sum_{i\in I} \alpha_i = +\infty$.

Comparaison des termes

Proposition Comparaison de termes

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Soit $(\beta_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une autre famille de réels positifs tels que :
$\forall\ i \in I, (0 \leqslant)\beta_i \leqslant \alpha_i$.

• Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, alors $(\beta_i)_{i\in I}$ est une famille sommable.
Et $\displaystyle\sum_{i\in I} \beta_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

• Si $(\beta_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille est sommable, alors $(\alpha_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille est sommable (contraposée).
Et $\displaystyle\sum_{i\in I} \beta_i = \sum_{i\in I} \alpha_i = +\infty$.

Démonstration

Condition nécessaire pour I

Théorème - I est au plus dénombrable

Si $(\alpha_i)_{i \in I}$ est une famille de réels positifs sommable, alors $I' = \{i \in I \mid \alpha_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

Condition nécessaire pour I

Théorème - I est au plus dénombrable

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs sommable, alors $I' = \{i \in I \mid \alpha_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

Remarque Rappels

Condition nécessaire pour I

Théorème - I est au plus dénombrable

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs sommable, alors $I' = \{i \in I \mid \alpha_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

Remarque Rappels

Démonstration

Condition nécessaire pour I

Théorème - I est au plus dénombrable

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs sommable, alors $I' = \{i \in I \mid \alpha_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

Remarque Rappels

Démonstration

Remarque Intégration d'une fonction

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition de la sommabilité

- Famille (α_i) de nombres <u>positifs</u> indexés sur I

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

- Famille (α_i) de nombres positifs indexés sur I
- Elle est sommable si $\{\sum_{i \in J} \alpha_i, J \in \mathscr{P}_f(I)\}$ admet une borne supérieure, notée $\sum_{i \in I} \alpha_i$

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition de la sommabilité

- Famille (α_i) de nombres positifs indexés sur I
- Elle est sommable si $\{\sum_{i \in J} \alpha_i, J \in \mathscr{P}_f(I)\}$ admet une borne supérieure, notée $\sum_{i \in I} \alpha_i$
- On peut se placer dans $\overline{R}$ et faire les calculs puis en tirer les conclusions...

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

- Famille (α_i) de nombres positifs indexés sur I
- Elle est sommable si $\{\sum_{i \in J} \alpha_i, J \in \mathscr{P}_f(I)\}$ admet une borne supérieure, notée $\sum_{i \in I} \alpha_i$
- On peut se placer dans $\overline{R}$ et faire les calculs puis en tirer les conclusions. . .
- Nécessairement, I est alors au plus dénombrable.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition de la sommabilité

- Famille (α_i) de nombres positifs indexés sur I
- Elle est sommable si $\{\sum_{i \in J} \alpha_i, J \in \mathscr{P}_f(I)\}$ admet une borne supérieure, notée $\sum_{i \in I} \alpha_i$
- On peut se placer dans $\overline{R}$ et faire les calculs puis en tirer les conclusions...
- Nécessairement, I est alors au plus dénombrable.
- On retrouve les séries numériques positives, ou encore les sommes doubles...

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Définition de la sommabilité

$\Rightarrow$ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

- Suite croissante (D_n) de parties (finies ou non) de D qui converge vers D

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

- Suite croissante (D_n) de parties (finies ou non) de D qui converge vers D
- Permutation des termes de la somme.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

- Suite croissante (D_n) de parties (finies ou non) de D qui converge vers D
- Permutation des termes de la somme.
- Combinaison linéaire

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

- Suite croissante (D_n) de parties (finies ou non) de D qui converge vers D
- Permutation des termes de la somme.
- Combinaison linéaire
- Sommation par paquets : application à Fubini.

Conclusion

Objectifs

⇒ Définition de la sommabilité

⇒ Etudier une sommabilité et calculer une somme

Pour le prochain cours

- Lecture : Sommabilité
- Exercice n°844 & 846