⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Famille (positive) sommable

Soit I un ensemble non vide et $\mathscr{P}_f(I)$, l'ensemble des parties finies de I.

Définition - Famille de réels positifs sommable

Une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de réels positifs ou nuls est dite sommable, si

$$\exists\, M \in \mathbb{R}+, \forall\, J \in \mathscr{P}_f(I), \sum_{i\in J} \alpha_i \leqslant M$$

Si tel est le cas, on définit et on note la somme de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ par :

$$S_I(\alpha) := \sum_{i\in I} \alpha_i = \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \sum_{j\in J} \alpha_i$$

Si la famille n'est pas sommable, alors on pose $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i = +\infty$ (ce qui est bien la valeur de la borne supérieure...)

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Premier cas particulier : les séries

Proposition - Cas $I = \mathbb{N}$. Les séries positifs

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série (de termes positifs) $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. En cas de sommabilité :

$$S_{\mathbb{N}}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Comparaison des ensembles

Proposition - Comparaison des ensembles

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Supposons que $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable
Soit $I' \subset I$.
Alors $(\alpha_i)_{i\in I'}$ est une famille sommable et $\sum_{i\in I'} \alpha_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

Comparaison des ensembles

Proposition - Comparaison des ensembles

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Supposons que $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable
Soit $I' \subset I$.
Alors $(\alpha_i)_{i\in I'}$ est une famille sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I'} \alpha_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

Démonstration

Comparaison des termes

Proposition Comparaison de termes

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Soit $(\beta_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une autre famille de réels positifs tels que :
$\forall\ i \in I, (0 \leqslant)\beta_i \leqslant \alpha_i$.

- Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, alors $(\beta_i)_{i\in I}$ est une famille sommable.
Et $\sum\limits_{i\in I} \beta_i \leqslant \sum\limits_{i\in I} \alpha_i$.
- Si $(\beta_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille est sommable, alors $(\alpha_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille est sommable (contraposée).
Et $\sum\limits_{i\in I} \beta_i = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i = +\infty$.

Comparaison des termes

Proposition Comparaison de termes

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Soit $(\beta_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une autre famille de réels positifs tels que :
$\forall\ i \in I, (0 \leqslant)\beta_i \leqslant \alpha_i$.

• Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, alors $(\beta_i)_{i\in I}$ est une famille sommable.
Et $\sum_{i\in I} \beta_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

• Si $(\beta_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille est sommable, alors $(\alpha_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille est sommable (contraposée).
Et $\sum_{i\in I} \beta_i = \sum_{i\in I} \alpha_i = +\infty$.

Démonstration

Condition nécessaire pour I

Théorème - I est au plus dénombrable

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs sommable, alors $I' = \{i \in I \mid \alpha_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Suite croissante de parties

A partir de maintenant, toutes les familles seront indexées par un ensemble au plus dénombrable, on le note D.

Suite croissante de parties

A partir de maintenant, toutes les familles seront indexées par un ensemble au plus dénombrable, on le note D.

Théorème - Critère de sommabilité : Suite croissante de parties

Soit (D_n) une suite croissante de parties de D, de réunion : $D = \bigcup\!\!\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
On note : Soit $(u_d)_{d\in D} \in \mathbb{R}_+^D$, une famille de réels positifs.
(u_d) est sommable si et seulement si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_d)_{d\in D_n}$ est sommable
2. $\left(\sum_{d\in D_n} u_d\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente (ici croiss. majorée).

Si tel est le cas, alors on a : $\sum_{d\in D} u_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} u_d.$

Suite croissante de parties

A partir de maintenant, toutes les familles seront indexées par un ensemble au plus dénombrable, on le note D.

Théorème - Critère de sommabilité : Suite croissante de parties

Soit (D_n) une suite croissante de parties de D, de réunion : $D = \bigcup\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
On note : Soit $(u_d)_{d\in D} \in \mathbb{R}_+^D$, une famille de réels positifs.
(u_d) est sommable si et seulement si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_d)_{d\in D_n}$ est sommable
2. $\left(\sum_{d\in D_n} u_d\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente (ici croiss. majorée).

Si tel est le cas, alors on a : $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} u_d.$

Remarque D_n fini ?

Suite croissante de parties

A partir de maintenant, toutes les familles seront indexées par un ensemble au plus dénombrable, on le note D.

Théorème - Critère de sommabilité : Suite croissante de parties

Soit (D_n) une suite croissante de parties de D, de réunion : $D = \bigcup\!\!\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
On note : Soit $(u_d)_{d\in D} \in \mathbb{R}_+^D$, une famille de réels positifs.
(u_d) est sommable si et seulement si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_d)_{d\in D_n}$ est sommable
2. $\left(\sum_{d\in D_n} u_d\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente (ici croiss. majorée).

Si tel est le cas, alors on a : $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} u_d.$

Remarque D_n fini ?

Démonstration

Suite croissante de parties

Savoir-faire. Trouver une suite croissante d'ensembles d'indexation (fini)

Une stratégie classique consiste dans le cas où D est dénombrable sans être fini à considérer $\sigma : \mathbb{N} \to D$ une bijection. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $D_n = \sigma([\![0, n]\!])$. On a $D = \bigcup\!\!\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Suite croissante de parties

Savoir-faire. Trouver une suite croissante d'ensembles d'indexation (fini)

Une stratégie classique consiste dans le cas où D est dénombrable sans être fini à considérer $\sigma : \mathbb{N} \to D$ une bijection. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $D_n = \sigma([\![0, n]\!])$. On a $D = \bigcup\!\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Savoir-faire. Exploitation d'une suite croissante d'ensemble fini

Si $(D_n)_n$ est une suite croissante d'ensembles finis d'union D. Alors toutes les sommes $S_n := \sum_{d \in D_n} u_d$ sont finies et la suite (S_n) est croissante.
La convergence de S_n est équivalente à la sommabilité de (u_d) sur D.

Permutation de la sommation

Proposition - Invariance de la sommabilité et de la somme par permutation des indices

Soient D et D' deux ensembles au plus dénombrables.
Soit $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$. S'il exite une bijection $\sigma : D' \to D$,
alors $(u_d)_{d\in D}$ est sommable $\Longleftrightarrow$ $(u_{\sigma(d')})_{d'\in D'}$ est sommable.
Et en cas de sommabilité $\sum\limits_{d\in D} u_d = \sum\limits_{d'\in D'} u_{\sigma(d')}$

Permutation de la sommation

Proposition - Invariance de la sommabilité et de la somme par permutation des indices

Soient D et D' deux ensembles au plus dénombrables.
Soit $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$. S'il exite une bijection $\sigma : D' \to D$,
alors $(u_d)_{d\in D}$ est sommable $\Longleftrightarrow (u_{\sigma(d')})_{d'\in D'}$ est sommable.
Et en cas de sommabilité $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \sum_{d'\in D'} u_{\sigma(d')}$

Démonstration

Permutation de la sommation

Proposition - Invariance de la sommabilité et de la somme par permutation des indices

Soient D et D' deux ensembles au plus dénombrables.

Soit $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$. S'il exite une bijection $\sigma : D' \to D$,

alors $(u_d)_{d\in D}$ est sommable $\Longleftrightarrow$ $(u_{\sigma(d')})_{d'\in D'}$ est sommable.

Et en cas de sommabilité $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \sum_{d'\in D'} u_{\sigma(d')}$

Démonstration

Application Série à termes positifs

Combinaison linéaire de familles sommables

Proposition - Sommabilité d'une combinaison linéaire

Soit D, un ensemble au plus dénombrable.
Soient $(u_d)_{d\in D}$ et $(v_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ deux familles de réels positifs, sommables.
Alors $(u_d + v_d)_{d\in D}$ et $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+$, $(\lambda u_d)_{d\in D}$ sont sommables.
Et $\sum\limits_{d\in D} (u_d + v_d) = \sum\limits_{d\in D} u_d + \sum\limits_{d\in D} v_d$ et $\sum\limits_{d\in D} \lambda u_d = \lambda \sum\limits_{d\in D} u_d$.

Combinaison linéaire de familles sommables

Proposition - Sommabilité d'une combinaison linéaire

Soit D, un ensemble au plus dénombrable.
Soient $(u_d)_{d\in D}$ et $(v_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ deux familles de réels positifs, sommables.
Alors $(u_d + v_d)_{d\in D}$ et $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+$, $(\lambda u_d)_{d\in D}$ sont sommables.
Et $\displaystyle\sum_{d\in D} (u_d + v_d) = \sum_{d\in D} u_d + \sum_{d\in D} v_d$ et $\displaystyle\sum_{d\in D} \lambda u_d = \lambda \sum_{d\in D} u_d$.

Démonstration

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Sommation par paquets

Remarque Rappel : sommation finie par paquet.

Sommation par paquets

Remarque Rappel : sommation finie par paquet.

Théorème - Sommation par paquets

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de D.
Soit $(u_d) \in (\mathbb{R}_+)^D$.
$(u_d)_{d\in D}$ est sommable si et seulement si

$$\begin{cases} \forall\ i \in I, (u_d)_{d\in P_i} \text{ est sommable,} \\ \text{puis la famille } \left(\sum_{d\in P_i} u_d\right)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I \text{ est sommable} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a : $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} u_d\right)$.

Sommation par paquets

Remarque Rappel : sommation finie par paquet.

Théorème - Sommation par paquets

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de D.
Soit $(u_d)\in(\mathbb{R}_+)^D$.
$(u_d)_{d\in D}$ est sommable si et seulement si

$$\begin{cases} \forall\ i\in I, (u_d)_{d\in P_i} \text{ est sommable,} \\ \text{puis la famille } \left(\sum_{d\in P_i} u_d\right)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I \text{ est sommable} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a : $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} u_d\right)$.

Remarque I au plus dénombrable

Sommation par paquets

Remarque Rappel : sommation finie par paquet.

Théorème - Sommation par paquets

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une partition de D.
Soit $(u_d) \in (\mathbb{R}_+)^D$.
$(u_d)_{d \in D}$ est sommable si et seulement si

$$\begin{cases} \forall\ i \in I, (u_d)_{d \in P_i} \text{ est sommable,} \\ \text{puis la famille } \left(\sum_{d \in P_i} u_d\right)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I \text{ est sommable} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a : $\displaystyle\sum_{d \in D} u_d = \sum_{i \in I} \left(\sum_{d \in P_i} u_d \right)$.

Remarque I au plus dénombrable

Démonstration

Application sur $\mathbb{N}$

Remarque Avec l'ordre sur $\mathbb{N}$

Application sur $\mathbb{N}$

Remarque Avec l'ordre sur $\mathbb{N}$

Savoir-faire. Application du théorème de sommation par paquets avec $I = \mathbb{N}$

Si $D = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

$(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ est sommable si et seulement si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_d)_{d\in P_n}$ est sommable,
2. puis $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{d\in P_n} u_d\right)$ converge (série à termes positifs).

Et dans ce cas : $\sum_{d\in D} u_d = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{d\in P_n} u_d$.

Application sur $\mathbb{N}$

Remarque Avec l'ordre sur $\mathbb{N}$

Savoir-faire. Application du théorème de sommation par paquets avec $I = \mathbb{N}$

Si $D = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

$(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ est sommable si et seulement si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_d)_{d\in P_n}$ est sommable,
2. puis $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{d\in P_n} u_d\right)$ converge (série à termes positifs).

Et dans ce cas : $\displaystyle\sum_{d\in D} u_d = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{d\in P_n} u_d$.

Exemple Sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

Fubini (positif)

Le théorème suivant apparait alors comme un corollaire :

Théorème - Fubini - suites doubles positifs indexées sur $\mathbb{N}^2$

Considérons une suite doublement indexée de réels positifs $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

$(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

1. pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q\geqslant 0} u_{p,q}$ converge
2. puis la série $\sum_{p\geqslant 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge

ou bien, si et seulement si

1. pour tout $q \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p\geqslant 0} u_{p,q}$ converge
2. puis la série $\sum_{q\geqslant 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge

Alors $$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right)$$

Fubini (positif)

Remarque Indice de la somme

Fubini (positif)

Remarque Indice de la somme

Démonstration

Fubini (positif)

Remarque Indice de la somme

Démonstration

<u>Exercice</u>

1. Etudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(pq)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

   Dans le cas sommable, donner la valeur de la somme.
2. Si on note $d(n)$, le nombre de diviseurs de n, montrer alors que cette somme vaut $\sum_{n=1} \dfrac{d(n)}{n^\alpha}$.

Fubini (positif) famille double

Théorème - Fubini - suites doubles positifs indexées sur un produit cartésien

Considérons une suite doublement indexée de réels positifs $(u_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$.
$(u_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable si et seulement si

1. $\forall\ d\in D$, la famille $(u_{d,d'})_{d'\in D'}$ est sommable de somme s_d
2. puis la famille $(s_d)_{d\in D}$ est sommable.

ou bien, si et seulement si

1. $\forall\ d'\in D'$, la somme $(u_{d,d'})_{d\in D}$ est sommable de somme $s_{d'}$
2. puis la famille $(s_{d'})_{d'\in D'}$ est sommable.

On a alors

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} u_{d,d'} = \sum_{d\in D}\left(\sum_{d'\in D'} u_{d,d'}\right) = \sum_{d'\in D'}\left(\sum_{d\in D} u_{d,d'}\right)$$

Fubini (positif) famille double

Théorème - Fubini - suites doubles positifs indexées sur un produit cartésien

Considérons une suite doublement indexée de réels positifs $(u_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$.

$(u_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable si et seulement si

1. $\forall\ d \in D$, la famille $(u_{d,d'})_{d'\in D'}$ est sommable de somme s_d
2. puis la famille $(s_d)_{d\in D}$ est sommable.

ou bien, si et seulement si

1. $\forall\ d' \in D'$, la somme $(u_{d,d'})_{d\in D}$ est sommable de somme $s_{d'}$
2. puis la famille $(s_{d'})_{d'\in D'}$ est sommable.

On a alors

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} u_{d,d'} = \sum_{d\in D}\left(\sum_{d'\in D'} u_{d,d'}\right) = \sum_{d'\in D'}\left(\sum_{d\in D} u_{d,d'}\right)$$

Démonstration

Application

Corollaire - Produit

Si $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(v_{d'})_{d'\in D'} \in (R_+)^{D'}$ sont deux familles sommables,

alors $(u_d v_{d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable. Et

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} u_d v_{d'} = \sum_{d\in D} u_d \times \sum_{d'\in D'} v_{d'}$$

Application

Corollaire - Produit

Si $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(v_{d'})_{d'\in D'} \in (R_+)^{D'}$ sont deux familles sommables,

alors $(u_d v_{d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable. Et

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} u_d v_{d'} = \sum_{d\in D} u_d \times \sum_{d'\in D'} v_{d'}$$

Démonstration

Application

Corollaire - Produit

Si $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(v_{d'})_{d'\in D'} \in (R_+)^{D'}$ sont deux familles sommables,

alors $(u_d v_{d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable. Et

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} u_d v_{d'} = \sum_{d\in D} u_d \times \sum_{d'\in D'} v_{d'}$$

Démonstration

Remarque La réciproque est fausse

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Sur $\overline{R_+}$

Remarque Convention

Sur $\overline{R_+}$

Remarque Convention

Théorème - Sommation par paquets dans $\mathbb{R}_+$ - cas général

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de l'ensemble D.
Pour toute famille $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$, on a :

$$\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} u_d\right) \qquad \text{(égalité dans } \overline{\mathbb{R}}\text{)}$$

que la famille $(u_d)_{d\in D}$ soit sommable ou non (fini ou non).

Sur $\overline{R_+}$

Remarque Convention

Théorème - Sommation par paquets dans $\mathbb{R}_+$ - cas général

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de l'ensemble D.
Pour toute famille $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$, on a :

$$\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} u_d\right) \qquad \text{(égalité dans } \overline{\mathbb{R}}\text{)}$$

que la famille $(u_d)_{d\in D}$ soit sommable ou non (fini ou non).

Démonstration

Sur $\overline{R_+}$

Remarque Convention

Théorème - Sommation par paquets dans $\mathbb{R}_+$ - cas général

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de l'ensemble D.
Pour toute famille $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$, on a :

$$\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} u_d\right) \qquad (\text{égalité dans } \overline{\mathbb{R}})$$

que la famille $(u_d)_{d\in D}$ soit sommable ou non (fini ou non).

Démonstration

Savoir-faire. Etude d'une famille sommable

On se place dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut donc calculer d'abord la somme. (Si besoin, on ajoute : « sous réserve de convergence »).
Et on tire la conclusion selon la valeur : $\in \mathbb{R}$ ou $= +\infty$. Les méthodes s'adaptent.

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Famille complexe sommable

On considère des nombres à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (total !).
On suppose également que D (ensemble des indices) est un ensemble au plus dénombrable, non vide.

Famille complexe sommable

On considère des nombres à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (total !).
On suppose également que D (ensemble des indices) est un ensemble au plus dénombrable, non vide.

Définition - Famille complexe sommable

Une famille $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$ est dite sommable si la famille de réels positifs $(|z_d|)_{d\in D}$ est sommable.
On note $\ell_1(D,\mathbb{K})$, l'ensemble des familles sommables indexées sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Famille complexe sommable

On considère des nombres à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (total !).
On suppose également que D (ensemble des indices) est un ensemble au plus dénombrable, non vide.

Définition - Famille complexe sommable

Une famille $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$ est dite sommable si la famille de réels positifs $(|z_d|)_{d\in D}$ est sommable.
On note $\ell_1(D,\mathbb{K})$, l'ensemble des familles sommables indexées sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Application Cas des suites indexées sur $\mathbb{N}$.

Famille complexe sommable

On considère des nombres à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (total !).
On suppose également que D (ensemble des indices) est un ensemble au plus dénombrable, non vide.

Définition - Famille complexe sommable

Une famille $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$ est dite sommable si la famille de réels positifs $(|z_d|)_{d\in D}$ est sommable.
On note $\ell_1(D,\mathbb{K})$, l'ensemble des familles sommables indexées sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Application Cas des suites indexées sur $\mathbb{N}$.
Exemple Famille non sommable et série (semi-)convergente

Savoir-faire

Savoir-faire. Montrer la sommabilité d'une famille de réels ou de complexes

On montre la sommabilité de la famille des valeurs absolues, respectivement modules.
On commence donc toujours par considérer $(|z_d|)_{d\in D}$.

Savoir-faire

Savoir-faire. Montrer la sommabilité d'une famille de réels ou de complexes

On montre la sommabilité de la famille des valeurs absolues, respectivement modules.
On commence donc toujours par considérer $(|z_d|)_{d\in D}$.

Exercice

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Etudier la sommabilité de $(z^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Décomposition en 4 tas

Remarque Rappels

Décomposition en 4 tas

Remarque Rappels

Savoir-faire. Décomposition en « morceaux »

$(x_d) \in (\mathbb{R})^D$ est sommable $\iff (x_d^+)_{d\in D}$ et $(x_d^-)_{d\in D}$ sont sommables.
$(z_d) \in (\mathbb{C})^D$ est sommable $\iff (\mathrm{Re}(z_d))_{d\in D}$ et $(\mathrm{Im}(z_d))_{d\in D}$ sont sommables.

Critère de sommabilité

Proposition - Critères de sommabilité

Soient $(x_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{C}^D$, deux familles.
Si on a $\forall\ d \in D$, $|z_d| \leqslant x_d$ et $(x_d)_{d\in D}$ sommable,
alors $(z_d)_{d\in D}$ sommable.

Critère de sommabilité

Proposition - Critères de sommabilité

Soient $(x_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{C}^D$, deux familles.
Si on a $\forall\ d \in D$, $|z_d| \leqslant x_d$ et $(x_d)_{d\in D}$ sommable,
alors $(z_d)_{d\in D}$ sommable.

Ce qui se convertit en un second savoir-faire qu'on exploite très fréquemment (une condition suffisante, seulement) :

Savoir-faire. Sommabilité par majoration

$\forall\ d \in D$, $|z_d| \leqslant x_d$ et $(x_d)_{d\in D}$ sommable $\Longrightarrow (z_d)_{d\in D}$ est sommable.

Critère de sommabilité

Proposition - Critères de sommabilité

Soient $(x_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{C}^D$, deux familles.
Si on a $\forall\ d \in D$, $|z_d| \leqslant x_d$ et $(x_d)_{d\in D}$ sommable,
alors $(z_d)_{d\in D}$ sommable.

Ce qui se convertit en un second savoir-faire qu'on exploite très fréquemment (une condition suffisante, seulement) :

Savoir-faire. Sommabilité par majoration

$\forall\ d \in D$, $|z_d| \leqslant x_d$ et $(x_d)_{d\in D}$ sommable $\Longrightarrow$ $(z_d)_{d\in D}$ est sommable.

Démonstration

Somme

Définition - Somme d'une famille sommable

Soit $(x_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{R})$ une famille de réels, sommable.

On pose alors $\displaystyle\sum_{d\in D} x_d = \sum_{d\in D} x_d^+ - \sum_{d\in D} x_d^-$.

Soit $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{C})$ une famille de complexes, sommable.

On pose alors

$$\begin{aligned}\sum_{d\in D} z_d &= \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d) + i\sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)\\ &= \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d)^+ - \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d)^- + i\sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)^+ - i\sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)^-\end{aligned}$$

Somme

Définition - Somme d'une famille sommable

Soit $(x_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{R})$ une famille de réels, sommable.

On pose alors $\displaystyle\sum_{d\in D} x_d = \sum_{d\in D} x_d^+ - \sum_{d\in D} x_d^-$.

Soit $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{C})$ une famille de complexes, sommable.

On pose alors

$$\begin{aligned}\sum_{d\in D} z_d &= \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d) + i \sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)\\ &= \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d)^+ - \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d)^- + i \sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)^+ - i \sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)^-\end{aligned}$$

Remarque Elargissement

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Une limite...

Proposition - Point de vue naturel

Soit $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$ une famille.
$(z_d)_{d\in D}$ est sommable de somme $S := \sum_{d\in D} z_d$ si et seulement s'il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ B \in \mathscr{P}_f(D) \text{ tel que } \forall\ A (B \subset A \in \mathscr{P}_f(D)), \left|\sum_{d\in A} z_d - S\right| \leqslant \epsilon$$

Une limite. . .

Proposition - Point de vue naturel

Soit $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$ une famille.
$(z_d)_{d\in D}$ est sommable de somme $S := \sum\limits_{d\in D} z_d$ si et seulement s'il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ B \in \mathscr{P}_f(D) \text{ tel que } \forall\ A(B \subset A \in \mathscr{P}_f(D)), \left|\sum_{d\in A} z_d - S\right| \leqslant \epsilon$$

Démonstration

Une limite...

Proposition - Point de vue naturel

Soit $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$ une famille.
$(z_d)_{d\in D}$ est sommable de somme $S := \sum_{d\in D} z_d$ si et seulement s'il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ B \in \mathscr{P}_f(D) \text{ tel que } \forall\ A(B \subset A \in \mathscr{P}_f(D)), \left|\sum_{d\in A} z_d - S\right| \leqslant \epsilon$$

Démonstration

Remarque. Pas de semi-convergence

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

$\Rightarrow$ Critère de convergence et manipulations

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

- Famille $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^I$ sommable si $(|\alpha_i|) \in \mathbb{C}^I$ sommable

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

- Famille $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^I$ sommable si $(|\alpha_i|) \in \mathbb{C}^I$ sommable
- Décomposition en morceaux : positifs, négatifs, réels, imaginaires. Pour démontrer la convergence ou pour calculer la valeur de la somme !

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

- Famille $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^I$ sommable si $(|\alpha_i|) \in \mathbb{C}^I$ sommable
- Décomposition en morceaux : positifs, négatifs, réels, imaginaires. Pour démontrer la convergence ou pour calculer la valeur de la somme !
- $\ell^1(D,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

$\Rightarrow$ Critère de convergence et manipulations

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

- Méthode de la suite croissante d'ensembles pour **calculer** une somme (pas pour montrer la convergence)

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

$\Rightarrow$ Critère de convergence et manipulations

- Méthode de la suite croissante d'ensembles pour **calculer** une somme (pas pour montrer la convergence)
- Sommation par paquets et théorème de Fubini.

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

$\Rightarrow$ Critère de convergence et manipulations

- Méthode de la suite croissante d'ensembles pour **calculer** une somme (pas pour montrer la convergence)
- Sommation par paquets et théorème de Fubini.
- Application au produit de Cauchy

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Pour le prochain cours

- Lecture : Espace de probabilité
- Exercice n°849 & 852