

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

Famille complexe sommable

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

Définition - Famille complexe sommable

Une famille $(z_d)_{d \in D} \in \mathbb{K}^D$ est dite sommable si la famille de réels positifs $(|z_d|)_{d \in D}$ est sommable.

On note $\ell_1(D, \mathbb{K})$, l'ensemble des familles sommables indexées sur D et à valeurs dans \mathbb{K} .

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

Famille complexe sommable

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

Définition - Famille complexe sommable

Une famille $(z_d)_{d \in D} \in \mathbb{K}^D$ est dite sommable si la famille de réels positifs $(|z_d|)_{d \in D}$ est sommable.

On note $\ell_1(D, \mathbb{K})$, l'ensemble des familles sommables indexées sur D et à valeurs dans \mathbb{K} .

Exemple Famille non sommable et série (semi-)convergente

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

**3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme**

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations

Définition - Somme d'une famille sommable

Soit $(x_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{R})$ une famille de réels, sommable.

$$\text{On pose alors } \sum_{d \in D} x_d = \sum_{d \in D} x_d^+ - \sum_{d \in D} x_d^-.$$

Soit $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{C})$ une famille de complexes, sommable.

On pose alors

$$\begin{aligned} \sum_{d \in D} z_d &= \sum_{d \in D} \operatorname{Re}(z_d) + i \sum_{d \in D} \operatorname{Im}(z_d) \\ &= \sum_{d \in D} \operatorname{Re}(z_d)^+ - \sum_{d \in D} \operatorname{Re}(z_d)^- + i \sum_{d \in D} \operatorname{Im}(z_d)^+ - i \sum_{d \in D} \operatorname{Im}(z_d)^- \end{aligned}$$

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommaton par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommaton par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

Une limite...

⇒ Extension sur C

⇒ Critère et
manipulations

Proposition - Point de vue naturel

Soit $(z_d)_{d \in D} \in \mathbb{K}^D$ une famille. $(z_d)_{d \in D}$ est sommable de somme $S := \sum_{d \in D} z_d$ si et seulement s'ilexiste $S \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathcal{P}_f(D) \text{ tel que } \forall A (B \subset A \in \mathcal{P}_f(D)), \left| \sum_{d \in A} z_d - S \right| \leq \epsilon$$

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

Une limite...

⇒ Extension sur C

⇒ Critère et
manipulations

Proposition - Point de vue naturel

Soit $(z_d)_{d \in D} \in \mathbb{K}^D$ une famille. $(z_d)_{d \in D}$ est sommable de somme $S := \sum_{d \in D} z_d$ si et seulement s'ilexiste $S \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathcal{P}_f(D) \text{ tel que } \forall A (B \subset A \in \mathcal{P}_f(D)), \left| \sum_{d \in A} z_d - S \right| \leq \epsilon$$

Démonstration

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

Une limite...

⇒ Extension sur C

⇒ Critère et
manipulations

Proposition - Point de vue naturel

Soit $(z_d)_{d \in D} \in \mathbb{K}^D$ une famille. $(z_d)_{d \in D}$ est sommable de somme $S := \sum_{d \in D} z_d$ si et seulement s'ilexiste $S \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists B \in \mathcal{P}_f(D) \text{ tel que } \forall A (B \subset A \in \mathcal{P}_f(D)), \left| \sum_{d \in A} z_d - S \right| \leq \epsilon$$

Démonstration

Remarque. Pas de semi-convergence

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

Remarque Addition.

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommaton par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

Remarque Addition.

Application
$$\sum_{d \in D} (a_d - b_d) = \sum_{d \in D} a_d - \sum_{d \in D} b_d.$$

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations**Remarque** Addition.

Application
$$\sum_{d \in D} (a_d - b_d) = \sum_{d \in D} a_d - \sum_{d \in D} b_d.$$

Proposition - Espace vectoriel

 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^D, +, \cdot)$.

C'est-à-dire, si $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ et $(z_d)_{d \in D}, (z'_d)_{d \in D}$ sommables, alors $(\lambda z_d + \lambda' z'_d)_{d \in D}$ est sommable. Et

$$\sum_{d \in D} \lambda z_d + \lambda' z'_d = \lambda \sum_{d \in D} z_d + \lambda' \sum_{d \in D} z'_d$$

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations**Remarque** Addition.**Application** $\sum_{d \in D} (a_d - b_d) = \sum_{d \in D} a_d - \sum_{d \in D} b_d.$

Proposition - Espace vectoriel

 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^D, +, \cdot).$

C'est-à-dire, si $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ et $(z_d)_{d \in D}, (z'_d)_{d \in D}$ sommables, alors $(\lambda z_d + \lambda' z'_d)_{d \in D}$ est sommable. Et

$$\sum_{d \in D} \lambda z_d + \lambda' z'_d = \lambda \sum_{d \in D} z_d + \lambda' \sum_{d \in D} z'_d$$

(demi-)Démonstration

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

**3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$**

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

Proposition - Réduction de la famille d'indexation

Si $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{K})$ et $D' \subset D$, alors $(z_d)_{d \in D'} \in \ell^1(D', \mathbb{K})$

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

Proposition - Réduction de la famille d'indexation

Si $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{K})$ et $D' \subset D$, alors $(z_d)_{d \in D'} \in \ell^1(D', \mathbb{K})$

Démonstration

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

Proposition - Réduction de la famille d'indexation

Si $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{K})$ et $D' \subset D$, alors $(z_d)_{d \in D'} \in \ell^1(D', \mathbb{K})$

Démonstration

Remarque Comparaison des valeurs des sommes

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

Condition nécessaire et calcul

Notons pour la propriété suivante, qu'il s'agit d'une implication et non d'une équivalence pour démontrer la sommabilité.

Elle donne, en revanche, dès que la sommabilité est assurée, une façon simple de calculer la somme.

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Condition nécessaire et calcul

Notons pour la propriété suivante, qu'il s'agit d'une implication et non d'une équivalence pour démontrer la sommabilité.

Elle donne, en revanche, dès que la sommabilité est assurée, une façon simple de calculer la somme.

Proposition - Suite croissante d'ensembles donnant D

Soit $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{K})$. Supposons que $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(z_d)_{d \in D_n} \in \ell^1(D_n, \mathbb{K})$ et

$$\sum_{d \in D} z_d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{d \in D_n} z_d.$$

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Somme par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Condition nécessaire et calcul

Notons pour la propriété suivante, qu'il s'agit d'une implication et non d'une équivalence pour démontrer la sommabilité.

Elle donne, en revanche, dès que la sommabilité est assurée, une façon simple de calculer la somme.

Proposition - Suite croissante d'ensembles donnant D

Soit $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{K})$. Supposons que $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(z_d)_{d \in D_n} \in \ell^1(D_n, \mathbb{K})$ et

$$\sum_{d \in D} z_d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{d \in D_n} z_d.$$

Démonstration

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Somme par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Attention à la non-réciproque

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations

Attention. La réciproque est fautive

A bien avoir en tête.

$\mathbb{N}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est sommable.

Et la somme $\sum_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} x_k$ admet une limite : $\ln 2 \in \mathbb{R}$.

Et pourtant, la famille $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Finalement, la réciproque est vraie que pour des familles à valeurs dans \mathbb{R}_+ , (ou que dans \mathbb{R}_- ...). La sommabilité est plus exigeante que la convergence... (comme pour les intégrales)

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

Exploiter la croissance des ensembles d'indexation

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations

Savoir-faire. Utiliser la propriété des suites croissantes d'ensemble pour calculer une somme (1)

On a vu que D était au plus dénombrable.

- Si D est fini, les calculs numériques sont simples.
- Si D est infini, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow D$ bijective. On note alors $D_n = \varphi(\llbracket 0, n \rrbracket)$

On a donc $D = \bigcup D_n$ et chaque D_n est fini.

On exploite alors $\sum_{d \in D} z_d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{d \in D_n} z_d$.

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Somme par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

Exploiter la croissance des ensembles d'indexation

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations

Savoir-faire. Utiliser la propriété des suites croissantes d'ensemble pour calculer une somme (1)

On a vu que D était au plus dénombrable.

- Si D est fini, les calculs numériques sont simples.
- Si D est infini, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow D$ bijective. On note alors $D_n = \varphi(\llbracket 0, n \rrbracket)$

On a donc $D = \bigcup D_n$ et chaque D_n est fini.

On exploite alors
$$\sum_{d \in D} z_d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{d \in D_n} z_d.$$

Application Cas d'une somme sur \mathbb{N}

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

Indexation entière

Théorème - Calcul de la somme avec indexation entière

Soit $\sigma : D' \rightarrow D$ une bijection. Soit $(z_d)_{d \in D} \in \mathbb{K}^D$.

on a $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{K}) \iff (z_{\sigma(d')})_{d' \in D'} \in \ell^1(D', \mathbb{K})$.

En cas de sommabilité, on a $\sum_{d \in D} z_d = \sum_{d' \in D'} z_{\sigma(d')}$

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Indexation entière

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations

Théorème - Calcul de la somme avec indexation entière

Soit $\sigma : D' \rightarrow D$ une bijection. Soit $(z_d)_{d \in D} \in \mathbb{K}^D$.on a $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{K}) \iff (z_{\sigma(d')})_{d' \in D'} \in \ell^1(D', \mathbb{K})$.En cas de sommabilité, on a
$$\sum_{d \in D} z_d = \sum_{d' \in D'} z_{\sigma(d')}$$
Corollaire - Version avec $D = \mathbb{N}$ Si $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $\sum_{n \in \mathbb{N}} z_n$ est absolument convergente,Alors pour tout $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$,
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} z_{\sigma(n)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n.$$

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

Indexation entière

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations

Théorème - Calcul de la somme avec indexation entière

Soit $\sigma : D' \rightarrow D$ une bijection. Soit $(z_d)_{d \in D} \in \mathbb{K}^D$.on a $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{K}) \iff (z_{\sigma(d')})_{d' \in D'} \in \ell^1(D', \mathbb{K})$.En cas de sommabilité, on a $\sum_{d \in D} z_d = \sum_{d' \in D'} z_{\sigma(d')}$ Corollaire - Version avec $D = \mathbb{N}$ Si $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et si $\sum_{n \in \mathbb{N}} z_n$ est absolument convergente,Alors pour tout $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} z_{\sigma(n)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$.

Démonstration

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

Complément au savoir-faire

On peut compléter le savoir-faire précédent, avec, en plus, un changement de variables.

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Complément au savoir-faire

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations

On peut compléter le savoir-faire précédent, avec, en plus, un changement de variables.

Savoir-faire. Utiliser la propriété des suites croissantes d'ensemble pour calculer une somme (2)

On suppose que D est dénombrable, on reprend $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow D$ bijective et $D_n = \varphi(\llbracket 0, n \rrbracket)$

$$\text{On a : } \sum_{d \in D} z_d = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{d \in D_n} z_d = \sum_{n=0}^{+\infty} z_{\varphi(n)}.$$

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

Corollaire - La somme comme une forme linéaire

L'application $\ell^1(D, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, (z_d)_{d \in D} \mapsto \sum_{d \in D} z_d$ est une forme linéaire.

Et pour tout $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{K})$, on a $\left| \sum_{d \in D} z_d \right| \leq \sum_{d \in D} |z_d|$.

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

Corollaire

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations

Corollaire - La somme comme une forme linéaire

L'application $\ell^1(D, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, (z_d)_{d \in D} \mapsto \sum_{d \in D} z_d$ est une forme linéaire.

Et pour tout $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{K})$, on a $\left| \sum_{d \in D} z_d \right| \leq \sum_{d \in D} |z_d|$.

Démonstration

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommaton par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

Sommation par paquets

Théorème - Sommation par paquets dans \mathbb{K} - cas général

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une partition de l'ensemble D .

Soit $(z_d)_{d \in D} \in (\mathbb{K})^D$, on a :

$(z_d)_{d \in D}$ est sommable si et seulement si :

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Pour tout } i \in I, (z_d)_{d \in P_i} \text{ est sommable} \\ 2. \left(\sum_{d \in P_i} |z_d| \right) \text{ est une famille sommable.} \end{array} \right.$$

En cas de sommabilité :

$$\sum_{d \in D} z_d = \sum_{i \in I} \left(\sum_{d \in P_i} z_d \right)$$

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Sommation par paquets

Théorème - Sommation par paquets dans \mathbb{K} - cas général

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une partition de l'ensemble D .

Soit $(z_d)_{d \in D} \in (\mathbb{K})^D$, on a :

$(z_d)_{d \in D}$ est sommable si et seulement si :

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Pour tout } i \in I, (z_d)_{d \in P_i} \text{ est sommable} \\ 2. \left(\sum_{d \in P_i} |z_d| \right) \text{ est une famille sommable.} \end{array} \right.$$

En cas de sommabilité :

$$\sum_{d \in D} z_d = \sum_{i \in I} \left(\sum_{d \in P_i} z_d \right)$$

Démonstration

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Sommation par paquets

Théorème - Sommation par paquets dans \mathbb{K} - cas général

Soit $(P_i)_{i \in I}$ une partition de l'ensemble D .

Soit $(z_d)_{d \in D} \in (\mathbb{K})^D$, on a :

$(z_d)_{d \in D}$ est sommable si et seulement si :

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Pour tout } i \in I, (z_d)_{d \in P_i} \text{ est sommable} \\ 2. \left(\sum_{d \in P_i} |z_d| \right) \text{ est une famille sommable.} \end{array} \right.$$

En cas de sommabilité :

$$\sum_{d \in D} z_d = \sum_{i \in I} \left(\sum_{d \in P_i} z_d \right)$$

Démonstration

Application Somme sur \mathbb{Z}

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

D'abord vérifier la sommabilité

Attention. Pas de sommabilité par la somme

Il faut bien s'assurer d'abord de la sommabilité avant le calcul.

La famille $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = 1$ et $z_{-n} = -1$, et

$z_0 = 0$ vérifie $\sum_{k=-n}^n z_k = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et pourtant cette famille $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

D'abord vérifier la sommabilité

Attention. Pas de sommabilité par la somme

Il faut bien s'assurer d'abord de la sommabilité avant le calcul.

La famille $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = 1$ et $z_{-n} = -1$, et

$z_0 = 0$ vérifie $\sum_{k=-n}^n z_k = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et pourtant cette famille $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

Reprenons un calcul précédent :

Exercice

On considère $r \in [0, 1[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $z_n = r^n e^{in\theta}$ si $n \leq 0$,

$z_n = r^{-n} e^{in\theta}$ si $n < 0$.

1. Montrer que $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

2. Calculer $\sum_{n \in \mathbb{Z}} z_n$.

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Fubini - cas général

Théorème - Fubini : suites doubles complexes indexées sur un produit cartésien

Considérons une suite numérique doublement indexée

$$(z_{d,d'})_{(d,d') \in D \times D'}$$

$(z_{d,d'})_{(d,d') \in D \times D'}$ est sommable si et seulement si

1. pour tout $d \in D$, la famille $(z_{d,d'})_{d' \in D'}$ est sommable

2. puis la famille $\left(\sum_{d'} |z_{d,d'}| \right)_{d \in D}$ est sommable.

On a alors

$$\sum_{(d,d') \in D \times D'} z_{d,d'} = \sum_{d \in D} \left(\sum_{d' \in D'} z_{d,d'} \right) = \sum_{d' \in D'} \left(\sum_{d \in D} z_{d,d'} \right)$$

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Fubini - cas général

Théorème - Fubini : suites doubles complexes indexées sur un produit cartésien

Considérons une suite numérique doublement indexée

$$(z_{d,d'})_{(d,d') \in D \times D'}$$

$(z_{d,d'})_{(d,d') \in D \times D'}$ est sommable si et seulement si

1. pour tout $d \in D$, la famille $(z_{d,d'})_{d' \in D'}$ est sommable

2. puis la famille $\left(\sum_{d'} |z_{d,d'}| \right)_{d \in D}$ est sommable.

On a alors

$$\sum_{(d,d') \in D \times D'} z_{d,d'} = \sum_{d \in D} \left(\sum_{d' \in D'} z_{d,d'} \right) = \sum_{d' \in D'} \left(\sum_{d \in D} z_{d,d'} \right)$$

Démonstration

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Deux cas d'application

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations

Proposition - Produit de termes

Soient $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{C})$ et $(z'_{d'})_{d' \in D'} \in \ell^1(D', \mathbb{C})$.Alors $(z_d z'_{d'})_{(d, d') \in D \times D'} \in \mathbb{C}^{D \times D'}$ est sommable.

Et
$$\sum_{(d, d') \in D \times D'} z_d z'_{d'} = \left(\sum_{d \in D} z_d \right) \times \left(\sum_{d' \in D'} z'_{d'} \right).$$

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

Deux cas d'application

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations

Proposition - Produit de termes

Soient $(z_d)_{d \in D} \in \ell^1(D, \mathbb{C})$ et $(z'_{d'})_{d' \in D'} \in \ell^1(D', \mathbb{C})$.Alors $(z_d z'_{d'})_{(d, d') \in D \times D'} \in \mathbb{C}^{D \times D'}$ est sommable.

Et
$$\sum_{(d, d') \in D \times D'} z_d z'_{d'} = \left(\sum_{d \in D} z_d \right) \times \left(\sum_{d' \in D'} z'_{d'} \right).$$

Exercice

Faire la démonstration

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

Autre application

Proposition - Fubini complexe indexé sur \mathbb{N}

Soit $(z_{(p,q)})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$.

$(z_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{q \geq 0} |z_{p,q}| \text{ converge} \\ 2. \text{ La série } \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |z_{p,q}| \right) \text{ converge.} \end{array} \right.$$

Et on a alors
$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} z_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} z_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} z_{p,q} \right).$$

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Autre application

Proposition - Fubini complexe indexé sur \mathbb{N}

Soit $(z_{(p,q)})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$.

$(z_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{q \geq 0} |z_{p,q}| \text{ converge} \\ 2. \text{ La série } \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |z_{p,q}| \right) \text{ converge.} \end{array} \right.$$

Et on a alors
$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} z_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} z_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} z_{p,q} \right).$$

On peut arbitrairement faire l'interversion $p \leftrightarrow q$.

Exercice

Faire la démonstration

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Autre application

Proposition - Fubini complexe indexé sur \mathbb{N}

Soit $(z_{(p,q)})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$.

$(z_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

- $$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Pour tout } p \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum_{q \geq 0} |z_{p,q}| \text{ converge} \\ 2. \text{ La série } \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |z_{p,q}| \right) \text{ converge.} \end{array} \right.$$

Et on a alors
$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} z_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} z_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} z_{p,q} \right).$$

On peut arbitrairement faire l'interversion $p \leftrightarrow q$.

Exercice

Faire la démonstration

Exemple Convergence et somme de
$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$$

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

Formulation

Définition - Produit de Cauchy

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ est la série $\sum_{n \geq 0} c_n$,

$$\text{avec, pour tout } n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{h=0}^n a_h b_{n-h}.$$

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Formulation

Définition - Produit de Cauchy

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ est la série $\sum_{n \geq 0} c_n$,

$$\text{avec, pour tout } n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{h=0}^n a_h b_{n-h}.$$

Proposition - Produit de séries absolument convergentes

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries abs. conv.,

alors leur produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} c_n$ est une série abs. conv..

$$\text{Et on a } \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Formulation

Définition - Produit de Cauchy

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Le produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ est la série $\sum_{n \geq 0} c_n$,

$$\text{avec, pour tout } n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{h=0}^n a_h b_{n-h}.$$

Proposition - Produit de séries absolument convergentes

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries abs. conv.,

alors leur produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} c_n$ est une série abs. conv..

$$\text{Et on a } \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Démonstration

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Exemple Exponentielle

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommaton par paquets et
Fubini

3.7. Application : **Produit de
Cauchy**

Exemple Exponentielle

Application Formule du binôme négative

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy

Applications

Exemple Exponentielle**Application** Formule du binôme négative

Attention. Cas de non convergence absolue

Considérons $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont semi-convergence (critère de Leibniz), i.e. convergentes mais non absolument convergentes.

Le produit de Cauchy donne $c_n = \sum_{h=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(h+1)(n-h+1)}}$.

Or $x \mapsto (x+1)(n+1-x)$ est maximal en $x = \frac{n}{2}$ et vaut $(\frac{n}{2} + 1)^2$.

d'où $|c_n| \geq (n+1) \frac{2}{n+2} \geq 1$, donc $\sum c_n$ diverge

grossièrement : la famille $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

⇒ Extension sur \mathbb{C} ⇒ Critère et
manipulations

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$ 3.6. Sommation par paquets et
Fubini3.7. Application : Produit de
Cauchy

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes
- ⇒ Critère de convergence et manipulations

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

- ▶ Famille $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^I$ sommable si $(|\alpha_i|) \in \mathbb{C}^I$ sommable

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

- ▶ Famille $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^I$ sommable si $(|\alpha_i|) \in \mathbb{C}^I$ sommable
- ▶ Décomposition en morceaux : positifs, négatifs, réels, imaginaires.
Pour démontrer la convergence ou pour calculer la valeur de la somme !

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

- ▶ Famille $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^I$ sommable si $(|\alpha_i|) \in \mathbb{C}^I$ sommable
- ▶ Décomposition en morceaux : positifs, négatifs, réels, imaginaires. Pour démontrer la convergence ou pour calculer la valeur de la somme !
- ▶ $\ell^1(D, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes
- ⇒ Critère de convergence et manipulations

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes
- ⇒ Critère de convergence et manipulations
- ▶ Méthode de la suite croissante d'ensembles pour **calculer** une somme (pas pour montrer la convergence)

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes
- ⇒ Critère de convergence et manipulations
- ▶ Méthode de la suite croissante d'ensembles pour **calculer** une somme (pas pour montrer la convergence)
- ▶ Sommation par paquets et théorème de Fubini.

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Conclusion

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

- ▶ Méthode de la suite croissante d'ensembles pour **calculer** une somme (pas pour montrer la convergence)
- ▶ Sommation par paquets et théorème de Fubini.
- ▶ Application au produit de Cauchy

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et manipulations

1. Problème

2. Somme de famille de réels positifs

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et Fubini

3.7. Application : Produit de Cauchy

Conclusion

⇒ Extension sur \mathbb{C}

⇒ Critère et
manipulations

Objectifs

⇒ Extension de la sommabilité aux familles de complexes

⇒ Critère de convergence et manipulations

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture : Espace euclidiens
- ▶ Exercice n°850 & 853
- ▶ TD de jeudi 21 mai : - 8h-10h : N°844, 848, 854, 856, 572 -
10h-12h : N° 847, 855, 857, 573

1. Problème

2. Somme de famille
de réels positifs

3. Familles
complexes
sommables

3.1. Définition

3.2. Critère de sommabilité et
calcul de somme

3.3. Autre point de vue

3.4. Espace vectoriel $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.5. Transfert de propriétés sur
 $\ell^1(D, \mathbb{K})$

3.6. Sommation par paquets et
Fubini

3.7. Application : Produit de
Cauchy