MPSI 3 - Fermat 13.06.17
2016-2017

Devoir à la maison n°12

Exercice 1 - Stratégie

Le but de cet exercice est d'étudier une certaine stratégie dans des processus sans retour.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons donc n variables aléatoires indépendantes, successives X_1, $X_2 \ldots X_n$, suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectivement p_1, $p_2 \ldots p_n$, tous inconnus.
Un joueur doit dire pour chaque succès, si il s'agit du dernier succès de la série.
Par exemple, si on a la série suivante (pour l'exemple $n = 6$) : $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$, $X_5 = 1$ et $X_6 = 0$, le joueur aurait gagner si après le tirage 5, il avait annoncé le dernier succès.
Un autre exemple, avec la série suivante : $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 0$, $X_4 = 1$, $X_5 = 0$ et $X_6 = 1$, le joueur aurait gagner si après le tirage 6 (mais pas à 4), il avait annoncé un dernier succès.

Voici la stratégie que nous proposons d'étudier :
- Le joueur choisit un nombre $k \in \mathbb{N}_n$ (donc k est fixé avant le début du jeu) ;
- pour chaque succès lors d'une épreuve i tel que $i < k$, le joueur annonce qu'il ne s'agit pas du dernier succès ;
- puis au premier succès i tel que $i \geqslant k$, le joueur annonce qu'il s'agit du dernier succès.

On note G_k l'événement : ≪ le joueur a gagné avec cette stratégie en choisissant k ≫.

A. Suites d'épreuves de Bernoulli.
Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$.
Considérons dans cette partie que X_1, $X_2 \ldots$ X_n ont toutes le même paramètre p.

1. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, exprimer l'espérance $\mathbf{E}(X_i)$ et la variance $\mathbf{V}(X_i)$ de X_i en fonction de p.
2. Montrer que G_k est équivalent à l'événement $(X_k + X_{k+1} + \cdots + X_n = 1)$.
3. Notons $Y_k = X_k + X_{k+1} + \cdots + X_n$. Reconnaître la loi de Y_k ? *(Rappel : ici n et k sont fixés)*
4. Que vaut alors $\mathbf{P}(Y_k = 1)$?
   On note $a_k = \mathbf{P}(Y_k = 1)$ et on cherche donc pour quelle valeur de $k \in \mathbb{N}_n$, a_k est le plus grand.
5. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\dfrac{a_{k-1}}{a_k} = \dfrac{n-k+2}{n-k+1}q$.
6. En déduire que $\forall\ k \in [\![2, n]\!]$, $a_{k-1} < a_k \iff k < n + 1 - \dfrac{q}{p}$. (On rappelle que $p = 1 - q$).
7. En étudiant la croissance puis la décroissance de (a_k), en déduire pour quelle valeur de k notée k^*, a_k est maximum (c'est à dire que $a_k \leqslant a_{k^*}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}_n$) ?
   Montrer alors que $a_{k^*} = \mathbf{P}(G_{k^*}) \approx q^{q/p}$?
8. Appliquons ce résultat avec $n = 15$ et $p = \frac{1}{6}$.
   Vous lancer 15 fois un dé à six faces. Vous devez pronostiquer le dernier 6 obtenu avec le dé.
   (a) Que vaut $n + 1 - \dfrac{q}{p}$? Écrire alors la stratégie que le joueur doit suivre pour annoncer avec une probabilité maximum le dernier 6 de la liste (i.e. un succès).
   (b) Trois simulations informatique ont donné les résultats suivants :
   - 1 6 6 4 4 4 6 2 3 3 2 3 6 5 3
   - 4 6 6 5 4 4 2 6 1 4 4 3 5 1 5
   - 4 4 3 6 4 3 3 4 4 6 2 6 1 2 6

   Pour quel(s) tirage(s), la stratégie aurait été efficace ?
   (c) Écrire un programme informatique en Turbo-Pascal qui permet d'effectuer des simulations de ce jeu. C'est à dire que ce programme doit simuler 15 lancers de dés et indiquer si la stratégie présentée ici est gagnante.

B. Suites d'épreuves à ordonner.
Dans cette partie, nous ne connaissons pas la loi de probabilité des épreuves des X_i.
On note alors pour tout entier $i \in \mathbb{N}_n$, $p_i = \mathbf{P}(X_i = 1) \in]0,1[$, $q_i = 1 - p_i = \mathbf{P}(X_i = 0)$ et $r_i = \dfrac{p_i}{q_i}$.
Enfin, on note $R_h = r_h + r_{h+1} + r_{h+2} + \cdots + r_n$ et $Q_h = q_h \times q_{h+1} \times \cdots \times q_n$.
Le joueur applique toujours la même stratégie, celle définie au début du problème.
On définit encore G_k, $a_k = \mathbf{P}(G_k)$, et $Y_k = X_k + X_{k+1} + \cdots + X_n$.

1. Montrer G_k se réalise si et seulement si il y a un et un seul succès entre k et n.
2. Montrer que $\mathbf{P}(Y_k = 0)$, la probabilité d'aucun succès entre k et n est donné par Q_k.
   Montrer que $\mathbf{P}(Y_k = 1)$, la probabilité d'un seul succès entre k et n est donné par $R_k \times Q_k$.
3. Montrer que $G_{k-1} = \Big((Y_k = 1) \cap (X_{k-1} = 0)\Big) \cup \Big((Y_k = 0) \cap (X_{k-1} = 1)\Big)$

4. En déduire que $\mathbf{P}(G_k) = R_k Q_k$ et $\mathbf{P}(G_{k-1}) = (1 - p_{k-1}) R_k Q_k + p_{k-1} Q_k$
5. Conclure que $\dfrac{a_{k-1}}{a_k} < 1 \iff 1 < R_k$. Quel est alors le meilleur k à choisir ?
6. Application ($n = 8$). Le jeu modélise différentes situations dont la suivante :
8 personnes se succèdent, dans un ordre aléatoire, pour vous proposer une certaine somme d'argent dont vous découvrez les montants au fur et à mesure des propositions.
A chaque proposition, vous devez accepter la proposition et le jeu s'arrête ; ou bien la refuser et attendre la proposition du suivant. A noter que vous ne pouvez plus accepter l'argent proposé par les personnes précédentes.
Vous gagnez à ce ≪ jeu ≫ , si vous avez choisi le montant le plus élevé..
On note $X_i = 1$ si la proposition faite par la personne i est la plus importante des propositions des i premières personnes.
   (a) Montrer que, pour tout entier $i \in [\![1, 8]\!]$, $p_i = \mathbf{P}(X_i = 1) = \dfrac{1}{i}$. En déduire la valeur de r_i.
   (b) Calculer, sous forme de fraction R_5 et R_4. En déduire qu'il faut choisir $k = 4$.
   (c) Résumer la stratégie à suivre. Quelle est la probabilité de gagner alors le plus gros montant ?

Exercice 2- Le jeu du Craps

Il s'agit d'un jeu de dés très réputé aux États-Unis, un joueur joue face à la banque.
Voici la règle du jeu :
Après avoir miser, le joueur lance les deux dés.
- S'il fait un 7 ou un 11, il gagne sa mise.
- S'il fait un 2, 3 ou 12, il perd sa mise. On dit qu'il a fait un craps.
- S'il fait 4, 5, 6, 8, 9 ou 10, on dit que le joueur établit le point et le croupier pose un palet sur la table pour indiquer la valeur du point sorti aux dés.

Une fois le point établi, le joueur relance (autant de fois que nécessaire) les deux dés jusqu'à refaire le point ou tirer 7.
- S'il refait le point établi, il gagne sa mise.
- S'il fait 7 avant d'avoir refait le point, il perd sa mise.

Selon la nature de la mise, les gains sont différents.

1. Étude du jet de deux dés.
   (a) Quel est l'univers des résultats possibles lorsque l'on somme les résultats des deux dés.
   (b) Associer à chaque événement élémentaire la probabilité de sa réalisation.
2. On note G_1, l'événement : ≪ gagner sa mise dès le premier lancer (avec un 7 ou un 11) ≫.
On note P_1, l'événement : ≪ perdre sa mise dès le premier lancer (i.e. faire Craps) ≫.
On note, pour tout $k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, B_k, l'événement : ≪ faire le point avec le score k ≫.
   (a) Que vaut $\mathbf{P}(G_1)$, $\mathbf{P}(P_1)$.
   (b) Calculer $p_k = \mathbf{P}(B_k)$, pour tout $k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$
3. On va maintenant s'intéresser à la suite des jets nécessaires pour terminer le jeu.
On note donc C, l'événement ≪ il y a plusieurs jets dans une partie de Craps ≫.
   (a) Montrer que la probabilité qu'il y ait plusieurs jets dans une partie de Craps vaut $\mathbf{P}(C) = \dfrac{2}{3}$
   (b) On note n, le nombre de jets nécessaires (en comptant le premier) et k le point obtenu par le joueur au premier jet.
   Quelles sont les valeurs possibles pour n ?
   Notons alors B_k^n, l'événement : ≪ le joueur gagne la mise, avec un point k et en lançant n fois les deux dés ≫.
   Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $k \in \{4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, (en notant $p_k = \mathbf{P}(B_k)$) :
   $$\mathbf{P}(B_k^n) = p_k^2 \left(\frac{5}{6} - p_k\right)^{n-2}$$
   (c) Que signifie l'événement $G_k = \displaystyle\bigcup_{n=2}^{\infty} B_k^n$?
   Montrer que $\mathbf{P}(G_k) = p_k^2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6} - p_k\right)^n$.
   (d) Montrer alors que pour tout $k \in \{4, 5, 6\}$, $\mathbf{P}(G_k) = \dfrac{(k-1)^2}{36(5+k)}$,
   (on pourra utiliser une relation simple entre p_k, $k - 1$ et 36)
   (e) Montrer que $\mathbf{P}(G_4) = \mathbf{P}(G_{10})$, $\mathbf{P}(G_5) = \mathbf{P}(G_9)$ et $\mathbf{P}(G_6) = \mathbf{P}(G_8)$.
   (f) Compléter alors le tableau suivant des parties gagnées

événements	G_4	G_5	G_6	G_8	G_9	G_{10}
probabilité	$\dfrac{\cdots}{36 \times \cdots}$	$\dfrac{\cdots}{36 \times \cdots}$	$\dfrac{\cdots}{36 \times \cdots}$	$\dfrac{\cdots}{36 \times \cdots}$	$\dfrac{\cdots}{36 \times \cdots}$	$\dfrac{\cdots}{36 \times \cdots}$

4. En déduire que la probabilité de gagner une partie est $\mathbf{P}(G) = \dfrac{244}{495} \approx 0,492929\ldots$
5. Que pensez-vous de ce résultat ?
Expliquez pourquoi ce jeu a beaucoup de succès dans les casinos américains.