

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Problème Expérience physique

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Problème Expérience physique

Problème Projection selon un vecteur

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Problème Expérience physique

Problème Projection selon un vecteur

Problème Espaces orthogonaux

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Problème Décomposition sur une base

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Problème Décomposition sur une base

Problème Bases orthonormées

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Problème Décomposition sur une base

Problème Bases orthonormées

Problème Dualité et problème réciproque

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Produit scalaire. Définitions

Dans ce chapitre les espaces vectoriels sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels exclusivement.

⇒ **Produit scalaire**
(dans un espace euclidien)

⇒ **Normes et normes euclidiennes**

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. **Produit scalaire**

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Produit scalaire. Définitions

Dans ce chapitre les espaces vectoriels sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels exclusivement.

Définition - Produit scalaire

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On dit que ϕ est un produit scalaire sur E si ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire si ϕ est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} vérifiant :

1. (bilinéaire)

$$\forall (x, x', y) \in E^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \phi(\lambda x + \lambda' x', y) = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x', y)$$

$$\forall (x, y, y') \in E^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \phi(x, \lambda y + \lambda' y') = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x, y')$$

2. (symétrique) $\forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y) = \phi(y, x)$

3. (positive) $\forall x \in E, \phi(x, x) \geq 0$

4. (définie) $\forall x \in E, \phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

\Rightarrow Produit scalaire
(dans un espace euclidien)

\Rightarrow Normes et normes euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Produit scalaire. Définitions

Dans ce chapitre les espaces vectoriels sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels exclusivement.

Définition - Produit scalaire

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. On dit que ϕ est un produit scalaire sur E si ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire si ϕ est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} vérifiant :

1. (bilinéaire)

$$\forall (x, x', y) \in E^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \phi(\lambda x + \lambda' x', y) = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x', y)$$

$$\forall (x, y, y') \in E^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \phi(x, \lambda y + \lambda' y') = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x, y')$$

2. (symétrique) $\forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y) = \phi(y, x)$

3. (positive) $\forall x \in E, \phi(x, x) \geq 0$

4. (définie) $\forall x \in E, \phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

Remarque Linéarité+symétrie

\Rightarrow Produit scalaire
(dans un espace euclidien)

\Rightarrow Normes et normes euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Définition - Notations

Les notations les plus usuelles sont :

$$\phi(x, y) = (x, y) = \langle x, y \rangle = \langle x | y \rangle = x \cdot y$$

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Définition - Notations

Les notations les plus usuelles sont :

$$\phi(x, y) = (x, y) = \langle x, y \rangle = \langle x | y \rangle = x \cdot y$$

Définition - Espace préhilbertien réel

On appelle espace préhilbertien réel un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Savoir-faire. Montrer qu'on a un produit scalaire

On vérifie chacune des hypothèses. . .

A commencer par le fait qu'il s'agit d'une FORME (bi)linéaire.

On démontre la symétrie avant la linéarité à gauche. Comme cela, on obtient la linéarité à droite.

On démontre la forme positive avant le fait que cela soit une forme définie.

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Bilinéarité

Savoir-faire. Montrer qu'on a un produit scalaire

On vérifie chacune des hypothèses. . .

A commencer par le fait qu'il s'agit d'une FORME (bi)linéaire.

On démontre la symétrie avant la linéarité à gauche. Comme cela, on obtient la linéarité à droite.

On démontre la forme positive avant le fait que cela soit une forme définie.

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Proposition - La bilinéarité en action

Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $(Y_j)_{1 \leq j \leq s}$ deux familles de vecteurs de E et $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $(\mu_j)_{1 \leq j \leq s}$ deux familles de réels. Alors

$$\left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i X_i \mid \sum_{j=1}^s \mu_j Y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \lambda_i \mu_j \langle X_i \mid Y_j \rangle.$$

Bilinéarité

Savoir-faire. Montrer qu'on a un produit scalaire

On vérifie chacune des hypothèses...

A commencer par le fait qu'il s'agit d'une FORME (bi)linéaire.

On démontre la symétrie avant la linéarité à gauche. Comme cela, on obtient la linéarité à droite.

On démontre la forme positive avant le fait que cela soit une forme définie.

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Proposition - La bilinéarité en action

Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $(Y_j)_{1 \leq j \leq s}$ deux familles de vecteurs de E et $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ et $(\mu_j)_{1 \leq j \leq s}$ deux familles de réels. Alors

$$\left\langle \sum_{i=1}^r \lambda_i X_i \mid \sum_{j=1}^s \mu_j Y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \lambda_i \mu_j \langle X_i \mid Y_j \rangle.$$

Démonstration

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Théorème - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $x, y \in E$,

$$\langle x | y \rangle^2 \leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Théorème - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $x, y \in E$,

$$\langle x | y \rangle^2 \leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Démonstration classique (parmi les 10 à connaître sur l'année).

Démonstration

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Définition - Norme

On appelle norme sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E toute application N de E dans \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$$

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y) \text{ (inégalité triangulaire)}$$

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Norme euclidienne

Définition - Norme

On appelle norme sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E toute application N de E dans \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$$

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y) \text{ (inégalité triangulaire)}$$

\Rightarrow Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

\Rightarrow Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Corollaire - Propriétés directes

Plus précisément :

▶ $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

▶ $N(-x) = N(x)$

▶ $N(x) \geq 0$

Norme euclidienne

Définition - Norme

On appelle norme sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E toute application N de E dans \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$$

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y) \text{ (inégalité triangulaire)}$$

\Rightarrow Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

\Rightarrow Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Corollaire - Propriétés directes

Plus précisément :

▶ $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

▶ $N(-x) = N(x)$

▶ $N(x) \geq 0$

Démonstration

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Proposition - Inégalité triangulaire revisitée

Soit N une norme sur E , alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \left| N(x) - N(y) \right| \leq N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Proposition - Inégalité triangulaire revisitée

Soit N une norme sur E , alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \left| N(x) - N(y) \right| \leq N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Définition - Vecteur unitaire

Soit N une norme sur E . Un vecteur x de E est dit unitaire (ou normé) si $N(x) = 1$.

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Définition - Distance associée (et proposition)

Si N est une norme sur E , l'application

$$\begin{aligned} d : E^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (A, B) &\mapsto N(B - A) \end{aligned}$$

est appelée distance associée à la norme N et vérifie

- ▶ $\forall (A, B) \in E^2, d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- ▶ $\forall (A, B) \in E^2, d(A, B) = d(B, A)$
- ▶ $\forall (A, B, C) \in E^3, d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Définition - Distance associée (et proposition)

Si N est une norme sur E , l'application

$$\begin{aligned} d &: E^2 && \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (A, B) &&& \mapsto N(B - A) \end{aligned}$$

est appelée distance associée à la norme N et vérifie

- ▶ $\forall (A, B) \in E^2, d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- ▶ $\forall (A, B) \in E^2, d(A, B) = d(B, A)$
- ▶ $\forall (A, B, C) \in E^3, d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$

Démonstration

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Norme et produit scalaire

Proposition - Norme euclidienne

Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ alors l'application

$$E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$$

est une norme sur E . On l'appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, la distance associée est appelée distance euclidienne.

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Norme et produit scalaire

Proposition - Norme euclidienne

Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ alors l'application

$$E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$$

est une norme sur E . On l'appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, la distance associée est appelée distance euclidienne.

Remarque - Inégalité de Minkowski

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Norme et produit scalaire

Proposition - Norme euclidienne

Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ alors l'application

$$E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$$

est une norme sur E . On l'appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, la distance associée est appelée distance euclidienne.

Remarque - Inégalité de Minkowski

Démonstration

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Norme et produit scalaire

Proposition - Norme euclidienne

Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ alors l'application

$$E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$$

est une norme sur E . On l'appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, la distance associée est appelée distance euclidienne.

Remarque - Inégalité de Minkowski

Démonstration

Exercice

Soit E un espace préhilbertien. Dans quel cas a-t-on

$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ (l'égalité triangulaire) ?

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Corollaire - Inégalités (Cauchy-Schwarz, Minkowski) avec des normes

Soit E , un espace préhilbertien : $\forall (x, y) \in E^2, |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$,
avec égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Et $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
avec égalité si et seulement si (x, y) est positivement liée.

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Savoir-faire. Montrer qu'on a une norme

On vérifie chacune des hypothèses. . .

Ou bien : on démontre que la norme dérive d'un produit scalaire bien connu (ou démontré).

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Produits scalaires et normes usuelles

Savoir-faire. Montrer qu'on a une norme

On vérifie chacune des hypothèses...

Ou bien : on démontre que la norme dérive d'un produit scalaire bien connu (ou démontré).

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Proposition - Produits scalaires usuels et normes associées

On définit des produits scalaires sur \mathbb{R}^n , et sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, en posant :

- ▶ sur \mathbb{R}^n , avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- ▶ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$,

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Produits scalaires et normes usuelles

Savoir-faire. Montrer qu'on a une norme

On vérifie chacune des hypothèses...

Ou bien : on démontre que la norme dérive d'un produit scalaire bien connu (ou démontré).

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Proposition - Produits scalaires usuels et normes associées

On définit des produits scalaires sur \mathbb{R}^n , et sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, en posant :

- ▶ sur \mathbb{R}^n , avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- ▶ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$,

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$$

Démonstration

Exemple Application de ces inégalités

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Théorème - Identités

Soit E un e.v. muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ la norme associée. Pour $(x, y) \in E^2$ on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x | y \rangle$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x | y \rangle$$

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Les trois premières égalités sont appelées « identités de polarisation » (elles permettent de récupérer le produit scalaire à partir de la norme) et la quatrième « égalité du parallélogramme »

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Théorème - Identités

Soit E un e.v. muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$ la norme associée. Pour $(x, y) \in E^2$ on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x | y \rangle$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x | y \rangle$$

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Les trois premières égalités sont appelées « identités de polarisation » (elles permettent de récupérer le produit scalaire à partir de la norme) et la quatrième « égalité du parallélogramme »

Démonstration

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Remarque Identité de polarisation

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Exercices

Remarque Identité de polarisation

Savoir-faire. Montrer qu'une norme est euclidienne

La polarisation donne une expression d'une forme bilinéaire qui nécessairement est à l'origine de la norme, si celle-ci est bien euclidienne. Il s'agit de vérifier chacun des points pour cette forme : $\langle x, y \rangle := \frac{1}{2}(N(x + y) - N(x) - N(y))$ (ou $\frac{1}{4}N(x + y) - N(x - y)$). C'est sur la linéarité qu'on peut avoir des difficultés. . .

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Exercices

Remarque Identité de polarisation

Savoir-faire. Montrer qu'une norme est euclidienne

La polarisation donne une expression d'une forme bilinéaire qui nécessairement est à l'origine de la norme, si celle-ci est bien euclidienne. Il s'agit de vérifier chacun des points pour cette forme : $\langle x, y \rangle := \frac{1}{2}(N(x+y) - N(x) - N(y))$ (ou $\frac{1}{4}N(x+y) - N(x-y)$). C'est sur la linéarité qu'on peut avoir des difficultés. . .

Pour l'exercice suivant, on fera attention à ne pas confondre vecteur x, y et coordonnées x, y . . .

Exercice

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $Q(x, y) = 2x^2 + 5y^2 - 2xy$. Montrer que Q est le carré d'une norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 .

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Exercices

Remarque Identité de polarisation

Savoir-faire. Montrer qu'une norme est euclidienne

La polarisation donne une expression d'une forme bilinéaire qui nécessairement est à l'origine de la norme, si celle-ci est bien euclidienne. Il s'agit de vérifier chacun des points pour cette forme : $\langle x, y \rangle := \frac{1}{2}(N(x+y) - N(x) - N(y))$ (ou $\frac{1}{4}N(x+y) - N(x-y)$). C'est sur la linéarité qu'on peut avoir des difficultés. . .

Pour l'exercice suivant, on fera attention à ne pas confondre vecteur x, y et coordonnées x, y . . .

Exercice

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $Q(x, y) = 2x^2 + 5y^2 - 2xy$. Montrer que Q est le carré d'une norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 .

Exercice

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur \mathbb{R}^2 , non euclidienne.

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Objectifs

- ⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)
- ⇒ Normes et normes euclidiennes

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Conclusion

Objectifs

⇒ **Produit scalaire (dans un espace euclidien)**

- ▶ **Forme bilinéaire symétrique positive et définie**

⇒ **Produit scalaire**
(dans un espace euclidien)

⇒ **Normes et normes euclidiennes**

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

- ▶ Forme bilinéaire symétrique positive et définie
- ▶ Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x | y \rangle|^2 \leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle$$

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Objectifs

- ⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)
- ⇒ Normes et normes euclidiennes

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

- ▶ Norme : forme positive, pseudo-linéaire vérifiant l'inégalité triangulaire

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)
- ⇒ Normes et normes euclidiennes
 - ▶ Norme : forme positive, pseudo-linéaire vérifiant l'inégalité triangulaire
 - ▶ Un espace normé est un espace métrique (muni d'une distance).

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

- ▶ Norme : forme positive, pseudo-linéaire vérifiant l'inégalité triangulaire
- ▶ Un espace normé est un espace métrique (muni d'une distance).
- ▶ Un espace euclidien est un espace normé. On peut choisir la norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$.

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

- ▶ Norme : forme positive, pseudo-linéaire vérifiant l'inégalité triangulaire
- ▶ Un espace normé est un espace métrique (muni d'une distance).
- ▶ Un espace euclidien est un espace normé. On peut choisir la norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$.
- ▶ Des applications usuelles à connaître (sur \mathbb{R}^n ou $\mathcal{C}([a, b])$).

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

Conclusion

Objectifs

⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)

⇒ Normes et normes euclidiennes

- ▶ Norme : forme positive, pseudo-linéaire vérifiant l'inégalité triangulaire
- ▶ Un espace normé est un espace métrique (muni d'une distance).
- ▶ Un espace euclidien est un espace normé. On peut choisir la norme euclidienne : $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$.
- ▶ Des applications usuelles à connaître (sur \mathbb{R}^n ou $\mathcal{C}([a, b])$).
- ▶ On peut revenir de la norme au produit scalaire : polarisation.

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités

⇒ Produit scalaire
(dans un espace
euclidien)

⇒ Normes et normes
euclidiennes

Objectifs

- ⇒ Produit scalaire (dans un espace euclidien)
- ⇒ Normes et normes euclidiennes

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 28 : Espaces euclidiens
3. Orthogonalité
- ▶ Exercice : N°569 & 570

1. Problèmes

2. Définitions et
règles de calcul

2.1. Produit scalaire

2.2. Norme euclidienne

2.3. Différentes identités