

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales, orthonormales

4. Cas de la dimension finie : espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

$E$  désigne un espace préhilbertien réel.

## Définition - Vecteurs orthogonaux

Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$ .  $x$  et  $y$  sont dits orthogonaux si  $\langle x | y \rangle = 0$ . On note alors  $x \perp y$ .

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

$E$  désigne un espace préhilbertien réel.

## Définition - Vecteurs orthogonaux

Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$ .  $x$  et  $y$  sont dits orthogonaux si  $\langle x | y \rangle = 0$ . On note alors  $x \perp y$ .

## Théorème - Pythagore

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Vecteurs orthogonaux

$E$  désigne un espace préhilbertien réel.

## Définition - Vecteurs orthogonaux

Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$ .  $x$  et  $y$  sont dits orthogonaux si  $\langle x | y \rangle = 0$ . On note alors  $x \perp y$ .

## Théorème - Pythagore

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

## Démonstration

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

$E$  désigne un espace préhilbertien réel.

## Définition - Vecteurs orthogonaux

Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$ .  $x$  et  $y$  sont dits orthogonaux si  $\langle x | y \rangle = 0$ . On note alors  $x \perp y$ .

## Théorème - Pythagore

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

## Démonstration

### Exercice

Montrer que dans  $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$  muni de son produit scalaire usuel,  $\sin \perp \cos$ .

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales, orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

**3.2. Sous-espaces orthogonaux**

3.3. Familles orthogonales, orthonormales

4. Cas de la dimension finie : espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

**3.2. Sous-espaces orthogonaux**

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Définition - Espace orthogonal

Soient  $F$  et  $G$  deux s.e.v de  $E$ .  $F$  et  $G$  sont dits orthogonaux si  
 $\forall x \in F, \forall y \in G, x \perp y$ . On note alors  $F \perp G$ .

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

**3.2. Sous-espaces orthogonaux**

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Définition - Espace orthogonal

Soient  $F$  et  $G$  deux s.e.v de  $E$ .  $F$  et  $G$  sont dits orthogonaux si  
 $\forall x \in F, \forall y \in G, x \perp y$ . On note alors  $F \perp G$ .

## Proposition - Résultats directs

Soient  $F$  et  $G$  deux s.e.v de  $E$ .

- ▶ Si  $F \perp G$  alors  $F \cap G = \{0_E\}$ .
- ▶ Si  $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$  et  $G = \text{Vect}(g_1, \dots, g_p)$  alors  
 $(F \perp G) \Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, f_i \perp g_j)$ .

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Définition - Espace orthogonal

Soient  $F$  et  $G$  deux s.e.v de  $E$ .  $F$  et  $G$  sont dits orthogonaux si  
$$\forall x \in F, \forall y \in G, x \perp y.$$
 On note alors  $F \perp G$ .

## Proposition - Résultats directs

Soient  $F$  et  $G$  deux s.e.v de  $E$ .

- ▶ Si  $F \perp G$  alors  $F \cap G = \{0_E\}$ .
- ▶ Si  $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$  et  $G = \text{Vect}(g_1, \dots, g_p)$  alors  
$$(F \perp G) \Leftrightarrow (\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, f_i \perp g_j).$$

## Démonstration

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Définition - « Le »espace orthogonal

Soit  $F$  un s.e.v de  $E$ . On appelle orthogonal de  $F$ , et on note  $F^\perp$ , l'ensemble des vecteurs de  $E$  orthogonaux à ceux de  $F$  :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}.$$

$F^\perp$  est un sev de  $E$ . Il s'agit du plus grand espace vectoriel orthogonal à  $F$  pour la relation d'ordre de l'inclusion :

$$G \perp F \Rightarrow G \subset F^\perp.$$

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# L'espace orthogonal

## Définition - « Le »espace orthogonal

Soit  $F$  un s.e.v de  $E$ . On appelle orthogonal de  $F$ , et on note  $F^\perp$ , l'ensemble des vecteurs de  $E$  orthogonaux à ceux de  $F$  :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}.$$

$F^\perp$  est un sev de  $E$ . Il s'agit du plus grand espace vectoriel orthogonal à  $F$  pour la relation d'ordre de l'inclusion :

$$G \perp F \Rightarrow G \subset F^\perp.$$

## Démonstration

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# L'espace orthogonal

## Définition - « Le » espace orthogonal

Soit  $F$  un s.e.v de  $E$ . On appelle orthogonal de  $F$ , et on note  $F^\perp$ , l'ensemble des vecteurs de  $E$  orthogonaux à ceux de  $F$  :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}.$$

$F^\perp$  est un sev de  $E$ . Il s'agit du plus grand espace vectoriel orthogonal à  $F$  pour la relation d'ordre de l'inclusion :

$$G \perp F \Rightarrow G \subset F^\perp.$$

## Démonstration

## Proposition - Propriétés de l'orthogonal

Soient  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ . Alors

$$F \subset (F^\perp)^\perp;$$

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp.$$

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# L'espace orthogonal

## Définition - « Le » espace orthogonal

Soit  $F$  un s.e.v de  $E$ . On appelle orthogonal de  $F$ , et on note  $F^\perp$ , l'ensemble des vecteurs de  $E$  orthogonaux à ceux de  $F$  :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}.$$

$F^\perp$  est un sev de  $E$ . Il s'agit du plus grand espace vectoriel orthogonal à  $F$  pour la relation d'ordre de l'inclusion :

$$G \perp F \Rightarrow G \subset F^\perp.$$

## Démonstration

## Proposition - Propriétés de l'orthogonal

Soient  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ . Alors

$$F \subset (F^\perp)^\perp;$$

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp.$$

## Démonstration

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# L'espace orthogonal

## Définition - « Le » espace orthogonal

Soit  $F$  un s.e.v de  $E$ . On appelle orthogonal de  $F$ , et on note  $F^\perp$ , l'ensemble des vecteurs de  $E$  orthogonaux à ceux de  $F$  :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}.$$

$F^\perp$  est un sev de  $E$ . Il s'agit du plus grand espace vectoriel orthogonal à  $F$  pour la relation d'ordre de l'inclusion :

$$G \perp F \Rightarrow G \subset F^\perp.$$

## Démonstration

## Proposition - Propriétés de l'orthogonal

Soient  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ . Alors

$$F \subset (F^\perp)^\perp;$$

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp.$$

## Démonstration

**Remarque** A-t-on  $F = (F^\perp)^\perp$  ?

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales, orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales, orthonormales

4. Cas de la dimension finie : espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Intérêt des bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Heuristique - Intérêt des bases orthonormales

Lorsqu'on connaît une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  d'un espace vectoriel  $E$ , on écrit régulièrement :

« si  $x \in E$ , alors  $x$  s'écrit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \dots$  ».

Ce qui serait bien ce serait de pouvoir faire « un truc » qui nous permette d'avoir accès à  $x_i$  à partir de  $x$  et de la base  $\mathcal{B}$ .

Ce truc, ou opération devrait pouvoir affirmer :

*coordonnée du vecteur  $e_i$  dans la base  $(e_k)$  : 1 si  $k = i$  et 0 si  $k \neq i$ .*

C'est exactement ce que propose un produit scalaire, pour une base orthonormale

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Définition - Famille orthogonale - orthonormale

Soit  $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ .

On dit que  $\mathcal{F}$  est orthogonale si  $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$ ,

et que  $\mathcal{F}$  est orthonormale (orthonormée) si elle est orthogonale et  $\forall i \in I, \|u_i\| = 1$ .

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Définition - Famille orthogonale - orthonormale

Soit  $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ .

On dit que  $\mathcal{F}$  est orthogonale si  $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$ ,

et que  $\mathcal{F}$  est orthonormale (orthonormée) si elle est orthogonale et  $\forall i \in I, \|u_i\| = 1$ .

### Exercice

Montrer que pour le produit scalaire :

$\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$ , la base

$((X - a)^k)_k$  est une base orthogonale.

Retrouver la formule de Taylor

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Proposition - Famille libre

Toute famille finie orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Toute famille finie orthonormale est libre.

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

**3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales**

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Proposition - Famille libre

Toute famille finie orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Toute famille finie orthonormale est libre.

## Démonstration

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

**3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales**

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Orthogonalité implique liberté

## Proposition - Famille libre

Toute famille finie orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Toute famille finie orthonormale est libre.

## Démonstration

## Proposition - Pythagore (généralisé)

Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille orthogonale de vecteurs de  $E$ . On a

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Orthogonalité implique liberté

## Proposition - Famille libre

Toute famille finie orthogonale de vecteurs non nuls est libre.  
Toute famille finie orthonormale est libre.

## Démonstration

## Proposition - Pythagore (généralisé)

Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille orthogonale de vecteurs de  $E$ . On a

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

## Démonstration

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Proposition - Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v. muni d'un produit scalaire et  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$  une famille libre de vecteurs de  $E$ .

On définit la famille  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$  par

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$$

$$\forall i \in \llbracket 2, p \rrbracket, f_i = \frac{1}{\|e'_i\|} e'_i \text{ où } e'_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle e_i | f_j \rangle f_j$$

Alors  $\mathcal{F}$  est une famille orthonormale de  $E$  telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

On dit que  $\mathcal{F}$  est déduite de  $\mathcal{E}$  par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Algorithme de Schmidt

## Proposition - Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -e.v. muni d'un produit scalaire et  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$  une famille libre de vecteurs de  $E$ .

On définit la famille  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$  par

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$$

$$\forall i \in \llbracket 2, p \rrbracket, f_i = \frac{1}{\|e'_i\|} e'_i \text{ où } e'_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle e_i | f_j \rangle f_j$$

Alors  $\mathcal{F}$  est une famille orthonormale de  $E$  telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

On dit que  $\mathcal{F}$  est déduite de  $\mathcal{E}$  par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

## Démonstration

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

**Remarque** Cette famille est-elle unique ?

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

**3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales**

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

**Remarque** Cette famille est-elle unique ?

## Savoir-faire. Orthonormaliser une base

Pour obtenir une base orthonormalisée, on considère une base de  $E$ .

On commence par l'orthogonaliser, puis la normaliser à chaque étape.

Au final  $e'_i$  est la soustraction de  $e_i$ , du projeté orthogonal de  $e_i$  sur  $\text{vect}(e_j)_{j < i}$ .

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

**Remarque** Cette famille est-elle unique ?

## Savoir-faire. Orthonormaliser une base

Pour obtenir une base orthonormalisée, on considère une base de  $E$ .

On commence par l'orthogonaliser, puis la normaliser à chaque étape.

Au final  $e'_i$  est la soustraction de  $e_i$ , du projeté orthogonal de  $e_i$  sur  $\text{vect}(e_j)_{j < i}$ .

## Exercice

Vérifier que l'on munit  $\mathbb{R}_2[X]$  d'un produit scalaire en posant

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

Déterminer une b.o.n. de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour ce produit scalaire.

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales, orthonormales

4. Cas de la dimension finie : espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Définition - Espace euclidien

Un espace euclidien est un  $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension finie, muni d'un produit scalaire (c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie).

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Définition - Espace euclidien

Un espace euclidien est un  $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension finie, muni d'un produit scalaire (c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie).

**Exemple** Retour sur les deux produits canoniques

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Point de vue matriciel

## Proposition - Ecriture matricielle

Soit  $E$  est un espace euclidien muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .  
On note  $A$  la matrice

$$A = \left( \langle e_i | e_j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \dots & \langle e_1 | e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n | e_1 \rangle & \dots & \|e_n\|^2 \end{pmatrix}$$

appelée matrice du produit scalaire dans la base  $\mathcal{B}$  ou matrice de Gram.

Soient  $X$  et  $Y$  les matrices colonnes de  $x \in E$  et de  $y \in E$  dans  $\mathcal{B}$ .

En identifiant une matrice d'ordre 1 à son coefficient, on a

$$\langle x | y \rangle = {}^t X A Y$$

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Point de vue matriciel

## Proposition - Ecriture matricielle

Soit  $E$  est un espace euclidien muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .  
On note  $A$  la matrice

$$A = \left( \langle e_i | e_j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \dots & \langle e_1 | e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n | e_1 \rangle & \dots & \|e_n\|^2 \end{pmatrix}$$

appelée matrice du produit scalaire dans la base  $\mathcal{B}$  ou matrice de Gram.

Soient  $X$  et  $Y$  les matrices colonnes de  $x \in E$  et de  $y \in E$  dans  $\mathcal{B}$ .

En identifiant une matrice d'ordre 1 à son coefficient, on a

$$\langle x | y \rangle = {}^t X A Y$$

Exercice

Que dire de  $\mathcal{B}$  si  $A = I_n$  ?

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales, orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Point de vue matriciel

## Proposition - Ecriture matricielle

Soit  $E$  est un espace euclidien muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .  
On note  $A$  la matrice

$$A = \left( \langle e_i | e_j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \dots & \langle e_1 | e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n | e_1 \rangle & \dots & \|e_n\|^2 \end{pmatrix}$$

appelée matrice du produit scalaire dans la base  $\mathcal{B}$  ou matrice de Gram.

Soient  $X$  et  $Y$  les matrices colonnes de  $x \in E$  et de  $y \in E$  dans  $\mathcal{B}$ .

En identifiant une matrice d'ordre 1 à son coefficient, on a

$$\langle x | y \rangle = {}^t X A Y$$

Exercice

Que dire de  $\mathcal{B}$  si  $A = I_n$  ?

**Démonstration**

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales, orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Proposition - Propriétés de la matrice d'un produit scalaire

Soit  $A$  la matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque. Alors

- $A$  est une matrice symétrique :  ${}^t A = A$  ;
- $A$  est une matrice *positive* :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X A X \geq 0$  ;
- $A$  est une matrice *définie* :  
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X A X = 0 \Rightarrow X = O_{n,1}$$
 ;
- $A$  est inversible :  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ .

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Propriétés de la matrice d'un produit scalaire

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Proposition - Propriétés de la matrice d'un produit scalaire

Soit  $A$  la matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque. Alors

- $A$  est une matrice symétrique :  ${}^t A = A$  ;
- $A$  est une matrice *positive* :  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X A X \geq 0$  ;
- $A$  est une matrice *définie* :  

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^t X A X = 0 \Rightarrow X = O_{n,1}$$
 ;
- $A$  est inversible :  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ .

## Démonstration

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

**Remarque** Toutes les propriétés essentielles du produit scalaire

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

**Remarque** Toutes les propriétés essentielles du produit scalaire

## Exercice

Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive sont des réels strictement positifs.

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

1. Problèmes

2. Définitions et règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales, orthonormales

4. Cas de la dimension finie : espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Définition - Base orthonormale

$\mathcal{B}$  est une base orthonormale de  $E$  euclidien si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et une famille orthonormale.

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

**4.2. Bases orthonormales**

## Définition - Base orthonormale

$\mathcal{B}$  est une base orthonormale de  $E$  euclidien si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et une famille orthonormale.

**Exemple** Base canonique

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

**4.2. Bases orthonormales**

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Définition - Base orthonormale

$\mathcal{B}$  est une base orthonormale de  $E$  euclidien si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et une famille orthonormale.

**Exemple** Base canonique

## Théorème - Existence de bases orthonormales

- ▶ Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormale.
- ▶ Toute famille orthonormale de  $E$  peut être complétée en une base orthonormale de  $E$ .

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Définition - Base orthonormale

$\mathcal{B}$  est une base orthonormale de  $E$  euclidien si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et une famille orthonormale.

**Exemple** Base canonique

## Théorème - Existence de bases orthonormales

- ▶ Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormale.
- ▶ Toute famille orthonormale de  $E$  peut être complétée en une base orthonormale de  $E$ .

**Démonstration**

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Exercice

Réciproquement, étant donné une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ ,  $\mathbb{R}$ -ev.

Existe-t-il un produit scalaire de  $E$  telle que la base  $\mathcal{B}$  soit orthonormales ?

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Savoir-faire. Montrer qu'une famille est une base orthonormée

De même que pour savoir si une famille est une base, on exploite la matrice de cette famille ; pour montrer qu'une famille est une base orthonormale, on peut commencer par écrire sa matrice de corrélation :  $A = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}$ .

$A$  est symétrique. Elle est inversible ssi  $(e_i)$  est une base.

$A$  est diagonale ssi  $(e_i)$  est orthogonale.

$A = I_n$  ssi  $(e_i)$  est une base orthonormale.

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Proposition - Calculs en b.o.n

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$  euclidien (pour le produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ).

Soient  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$  deux vecteurs de  $E$ ,  $X$  et  $Y$  les matrices colonnes associées. Alors :

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t X Y$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \langle x | e_i \rangle$$

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Proposition - Opération matricielle de changement de base orthonormale

Soient  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$  euclidien de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}'$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ , et  $P$  la matrice de  $\mathcal{B}'$  dans  $\mathcal{B}$ .

Alors  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormale de  $E$  si et seulement si  ${}^t P P = I_n$ .

Dans ce cas on a donc  $P^{-1} = {}^t P$  (on dit que  $P$  est une matrice orthogonale).

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Proposition - Opération matricielle de changement de base orthonormale

Soient  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$  euclidien de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}'$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ , et  $P$  la matrice de  $\mathcal{B}'$  dans  $\mathcal{B}$ .

Alors  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormale de  $E$  si et seulement si  ${}^t P P = I_n$ .

Dans ce cas on a donc  $P^{-1} = {}^t P$  (on dit que  $P$  est une matrice orthogonale).

**Remarque** Matrice de passage

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Proposition - Opération matricielle de changement de base orthonormale

Soient  $\mathcal{B}$  une base orthonormale de  $E$  euclidien de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}'$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ , et  $P$  la matrice de  $\mathcal{B}'$  dans  $\mathcal{B}$ .

Alors  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormale de  $E$  si et seulement si  ${}^t P P = I_n$ .

Dans ce cas on a donc  $P^{-1} = {}^t P$  (on dit que  $P$  est une matrice orthogonale).

**Remarque** Matrice de passage

**Démonstration**

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Savoir-faire. Changement de base bilinéaire

Soit  $E$  un espace euclidien et deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .

Si  $x$  a pour coordonnées  $X$  dans  $\mathcal{B}$  et  $X'$  dans  $\mathcal{B}'$ .

Si  $y$  a pour coordonnées  $Y$  dans  $\mathcal{B}$  et  $Y'$  dans  $\mathcal{B}'$ .

On note  $A$  et  $A'$  la matrices du produit scalaire dans chacune des bases.

Enfin, on note  $P$  la matrice de  $\mathcal{B}'$  dans  $\mathcal{B}$ .

On a alors  $X = PX'$ ,  $Y = PY'$ .

$$\langle x | y \rangle = {}^t XAY = {}^t X'A'Y' = {}^t X'^t PA'PY'$$

Ceci étant vrai pour tout  $x, y$ , on a donc nécessairement  
 $A = {}^t PA'P$ .

Ce résultat reste vraie que les bases sont orthonormales ou non

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Exercice

$E = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B}$  base canonique. On pose  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$  où

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3), f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3), f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3).$$

Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormale de  $E$  (pour le produit scalaire canonique).

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  défini par  $f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$ .

Donner la matrice de  $f$  dans cette base.

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Exercice

$E = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B}$  base canonique. On pose  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$  où

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3), f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3), f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3).$$

Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormale de  $E$  (pour le produit scalaire canonique).

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  défini par  $f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$ .

Donner la matrice de  $f$  dans cette base.

## Exercice

Montrer que la matrice  $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$  est inversible et calculer son inverse.

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Objectifs

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Orthogonalité

- ▶  $F \perp G$  ssi  $\forall x \in F, y \in G, x \perp y$ .

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Orthogonalité

- ▶  $F \perp G$  ssi  $\forall x \in F, y \in G, x \perp y$ .
- ▶ Une famille d'espaces orthogonaux 2 à 2 est une famille d'espace en somme directe.

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Orthogonalité

- ▶  $F \perp G$  ssi  $\forall x \in F, y \in G, x \perp y$ .
- ▶ Une famille d'espaces orthogonaux 2 à 2 est une famille d'espace en somme directe.
- ▶ On a la définition de l'espace supplémentaire :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}$$

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Orthogonalité

- ▶  $F \perp G$  ssi  $\forall x \in F, y \in G, x \perp y$ .
- ▶ Une famille d'espaces orthogonaux 2 à 2 est une famille d'espace en somme directe.
- ▶ On a la définition de l'espace supplémentaire :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}$$

- ▶ Une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2 est une famille libre.

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Orthogonalité

- ▶  $F \perp G$  ssi  $\forall x \in F, y \in G, x \perp y$ .
- ▶ Une famille d'espaces orthogonaux 2 à 2 est une famille d'espace en somme directe.
- ▶ On a la définition de l'espace supplémentaire :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}$$

- ▶ Une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2 est une famille libre.
- ▶ On parle de famille orthonormée si les vecteurs sont normés et orthogonaux 2 à 2.

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Orthogonalité

- ▶  $F \perp G$  ssi  $\forall x \in F, y \in G, x \perp y$ .
- ▶ Une famille d'espaces orthogonaux 2 à 2 est une famille d'espace en somme directe.
- ▶ On a la définition de l'espace supplémentaire :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}$$

- ▶ Une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2 est une famille libre.
- ▶ On parle de famille orthonormée si les vecteurs sont normés et orthogonaux 2 à 2.
- ▶ Procédure de Schmidt : transformer une famille libre en famille orthogonale engendrant les mêmes espaces...

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Objectifs

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

▶ Définition : bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

- ▶ Définition : bases orthonormales
- ▶ Définitions : matrices symétriques, définies, positives

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

## Objectifs

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

- ▶ Définition : bases orthonormales
- ▶ Définitions : matrices symétriques, définies, positives
- ▶ Considérons une famille  $(e_i)$ .  
Toutes les informations sont dans  $(\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j}$

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces  
euclidiens

## Objectifs

⇒ Orthogonalité

⇒ Espaces euclidiens et matrices de corrélation

## Pour le prochain cours

- ▶ Lecture du cours : chapitre 28 : Espaces euclidiens  
5. Projections orthogonales
- ▶ Exercices : N° 571 & 577

1. Problèmes

2. Définitions et  
règles de calcul

3. Orthogonalité

3.1. Vecteurs orthogonaux

3.2. Sous-espaces orthogonaux

3.3. Familles orthogonales,  
orthonormales

4. Espaces euclidiens

4.1. Définition

4.2. Bases orthonormales