Leçon 105 - Espaces vectoriels euclidiens

26 mai 2026

⇒ Projecteurs orthogonaux

⇒ Applications : distance et symétries orthogonales

⇒ Projecteurs orthogonaux

⇒ Applications : distance et symétries orthogonales

L'orthogonal est un supplémentaire

L'orthogonal est un supplémentaire (C.S. : F dimension finie)

Soit E un espace préhilbertien réel (pas nécessairement de dimension finie) et F un s.e.v de dimension finie de E. Alors

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

L'orthogonal est un supplémentaire

L'orthogonal est un supplémentaire (C.S. : F dimension finie)

Soit E un espace préhilbertien réel (pas nécessairement de dimension finie) et F un s.e.v de dimension finie de E. Alors

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Démonstration

L'orthogonal est un supplémentaire

L'orthogonal est un supplémentaire (C.S. : F dimension finie)

Soit E un espace préhilbertien réel (pas nécessairement de dimension finie) et F un s.e.v de dimension finie de E. Alors
$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Démonstration

Heuristique. LE supplémentaire

Un des problèmes de la notion de supplémentaire est la non-unicité de ceux-ci (E et F étant donné, il existe une infinité G_i tels que $E = F \oplus G_i$).
Parmi ceux-ci (les G_i) un a une propriété qui le rend unique et intéressant (dans le cas d'un espace préhilbertien).

Supplémentaire orthogonal

Définition - Supplémentaire orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel (pas nécessairement de dimension finie) et F un s.e.v de dimension finie de E.
$F^\perp$ est appelé LE supplémentaire orthogonal de F.

Supplémentaire orthogonal

Définition - Supplémentaire orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel (pas nécessairement de dimension finie) et F un s.e.v de dimension finie de E.
$F^\perp$ est appelé LE supplémentaire orthogonal de F.

Proposition - Deux propriétés

Soit E un espace euclidien et F un s.e.v de E. Alors

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F \qquad (F^\perp)^\perp = F$$

Supplémentaire orthogonal

Définition - Supplémentaire orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel (pas nécessairement de dimension finie) et F un s.e.v de dimension finie de E.
$F^\perp$ est appelé LE supplémentaire orthogonal de F.

Proposition - Deux propriétés

Soit E un espace euclidien et F un s.e.v de E. Alors

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F \qquad (F^\perp)^\perp = F$$

Démonstration

⇒ Projecteurs orthogonaux

⇒ Applications : distance et symétries orthogonales

Projecteur orthogonal

Définition - Projection orthogonale

Soit F un s.e.v de dimension finie de E préhilbertien réel.
On appelle projecteur orthogonal (projection orthogonale) sur F le projecteur sur F de direction $F^{\perp}$.

Projecteur orthogonal

Définition - Projection orthogonale

Soit F un s.e.v de dimension finie de E préhilbertien réel.
On appelle projecteur orthogonal (projection orthogonale) sur F le projecteur sur F de direction $F^{\perp}$.

Remarque Exprimer explicitement la projection

Expression du projecteur orthogonal

Proposition - Expression du projecteur

Soit p_F le projecteur orthogonal sur F.
Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ b.o.n de F alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle e_i \quad \text{et } y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}$$

Expression du projecteur orthogonal

Proposition - Expression du projecteur

Soit p_F le projecteur orthogonal sur F.
Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ b.o.n de F alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle e_i \qquad \text{et } y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}$$

Remarque Déjà vu ?

Expression du projecteur orthogonal

Proposition - Expression du projecteur

Soit p_F le projecteur orthogonal sur F.

Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ b.o.n de F alors

$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \,|\, e_i \rangle e_i$ et $y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^{\perp} \end{cases}$

Remarque Déjà vu ?

Démonstration

Applications

Corollaire - Cas particuliers

Soit E, un espace préhilbertien réel

1. Si $F = \mathrm{Vect}(e)$ est une droite, alors $p_F(x) = \left\langle x | \frac{e}{\|e\|} \right\rangle \frac{e}{\|e\|} = \frac{\langle x | e \rangle}{\|e\|^2} e.$
2. Si F est un hyperplan de E de dimension finie, alors $F^\perp = \mathrm{Vect}(e)$ est une droite et $p_F(x) = x - \left\langle x | \frac{e}{\|e\|} \right\rangle \frac{e}{\|e\|}.$

Applications

Corollaire - Cas particuliers

Soit E, un espace préhilbertien réel

1. Si $F = \mathrm{Vect}(e)$ est une droite, alors $p_F(x) = \left\langle x | \frac{e}{\|e\|} \right\rangle \frac{e}{\|e\|} = \frac{\langle x | e \rangle}{\|e\|^2} e.$
2. Si F est un hyperplan de E de dimension finie, alors $F^\perp = \mathrm{Vect}(e)$ est une droite et $p_F(x) = x - \left\langle x | \frac{e}{\|e\|} \right\rangle \frac{e}{\|e\|}.$

Démonstration

Applications

Exercice

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan F d'équation $x+y-2z=0$.

⇒ Projecteurs orthogonaux

⇒ Applications : distance et symétries orthogonales

Distance

Définition - distance à un sous-ensemble

Soient $x \in E$ et A une partie de E. L'ensemble $\{d(x,z); z \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0, qui admet donc une borne inférieure, appelée distance de x à A :

$$d(x,A) = \inf_{z \in A} \|x - z\|$$

Distance

Définition - distance à un sous-ensemble

Soient $x \in E$ et A une partie de E. L'ensemble $\{d(x,z); z \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0, qui admet donc une borne inférieure, appelée distance de x à A :

$$d(x,A) = \inf_{z \in A} \|x - z\|$$

Théorème - Meilleure approximation

Soient E un espace préhilbertien réel, F un s.e.v de dimension finie de E et p_F la projection orthogonale sur F. Soit $x \in E$, alors

$$y = p_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F, \|x - y\| \leqslant \|x - z\| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y \in F \\ \|x - y\| = d(x,F) \end{cases}$$

Distance

Définition - distance à un sous-ensemble

Soient $x \in E$ et A une partie de E. L'ensemble $\{d(x,z); z \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0, qui admet donc une borne inférieure, appelée distance de x à A :

$$d(x,A) = \inf_{z\in A} \|x-z\|$$

Théorème - Meilleure approximation

Soient E un espace préhilbertien réel, F un s.e.v de dimension finie de E et p_F la projection orthogonale sur F. Soit $x \in E$, alors

$$y = p_F(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F,\ \|x-y\| \leqslant \|x-z\| \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ \|x-y\| = d(x,F) \end{cases}$$

Remarque Interprétation

Distance

Définition - distance à un sous-ensemble

Soient $x \in E$ et A une partie de E. L'ensemble $\{d(x,z) ; z \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0, qui admet donc une borne inférieure, appelée distance de x à A :

$$d(x,A) = \inf_{z \in A} \|x - z\|$$

Théorème - Meilleure approximation

Soient E un espace préhilbertien réel, F un s.e.v de dimension finie de E et p_F la projection orthogonale sur F. Soit $x \in E$, alors

$$y = p_F(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F, \|x - y\| \leqslant \|x - z\| \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ \|x - y\| = d(x,F) \end{cases}$$

Remarque Interprétation

Démonstration

Application

Savoir-faire. Minimiser une forme quadratique

De manière générale, dans ce contexte, on ne cherche pas le minimum d'une norme, mais bien d'une norme au carré (forme quadratique) qui dérive du produit scalaire canonique.
L'enjeu : reconnaître le produit scalaire et les espaces E et surtout F

Application

Savoir-faire. Minimiser une forme quadratique

De manière générale, dans ce contexte, on ne cherche pas le minimum d'une norme, mais bien d'une norme au carré (forme quadratique) qui dérive du produit scalaire canonique.
L'enjeu : reconnaître le produit scalaire et les espaces E et surtout F

Exercice

Soit $f(x,y) = (x+y-2)^2 + (x-y-2)^2 + (2x+y)^2$.
Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.

Application

<u>Exercice</u>

On se donne quatre points $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(3,4)$, $D(-1,-1)$. Déterminer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$ telle que si A', B', C', D' sont les projetés de A, B, C, D sur $\mathscr{D}$ parallèlement à l'axe Oy, alors $S_{a,b} = AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + DD'^2$ soit minimale.

Comment généraliser cette méthode ?...

⇒ Projecteurs orthogonaux

⇒ Applications : distance et symétries orthogonales

Symétrie orthogonale

Définition - Symétrie orthogonale

Soient E espace préhilbertien réel, F s.e.v de dimension finie de E.
On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F de direction $F^{\perp}$.
On a $s_F = 2p_F - Id_E$ où p_F est la projection orthogonale sur F.

Symétrie orthogonale

Définition - Symétrie orthogonale

Soient E espace préhilbertien réel, F s.e.v de dimension finie de E.
On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F de direction $F^{\perp}$.
On a $s_F = 2p_F - Id_E$ où p_F est la projection orthogonale sur F.

Proposition - CNS de symétrie orthogonale

$s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie orthogonale si et seulement si

$$s \circ s = Id_E \text{ et } \mathrm{Ker}\,(s - Id_E) \perp \mathrm{Ker}\,(s + Id_E)$$

Symétrie orthogonale

Définition - Symétrie orthogonale

Soient E espace préhilbertien réel, F s.e.v de dimension finie de E.
On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F de direction $F^{\perp}$.
On a $s_F = 2p_F - Id_E$ où p_F est la projection orthogonale sur F.

Proposition - CNS de symétrie orthogonale

$s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie orthogonale si et seulement si

$$s \circ s = Id_E \text{ et } \mathrm{Ker}\,(s - Id_E) \perp \mathrm{Ker}\,(s + Id_E)$$

Démonstration

Reflexion

Définition - Réflexion

On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Conclusion

Objectifs

⇒ Projecteurs orthogonaux, distance et symétries orthogonales

⇒ Applications : distance et symétries orthogonales

Conclusion

Objectifs

⇒ Projecteurs orthogonaux, distance et symétries orthogonales

- On a $E = F \oplus F^{\perp}$ (si F est de dimension finie).

Conclusion

Objectifs

⇒ Projecteurs orthogonaux, distance et symétries orthogonales

- On a $E = F \oplus F^\perp$ (si F est de dimension finie).
- Projection orthogonale : LA projection sur F de direction $F^\perp$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Projecteurs orthogonaux, distance et symétries orthogonales

- On a $E = F \oplus F^{\perp}$ (si F est de dimension finie).
- Projection orthogonale : LA projection sur F de direction $F^{\perp}$.
- Un intérêt si F est de dimension finie : p est explicite.

$$p(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \,|\, e_i \rangle e_i \text{ avec } (e_1, e_2, \ldots e_p) \text{ b.o.n. de } F$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Projecteurs orthogonaux, distance et symétries orthogonales

⇒ Applications : distance et symétries orthogonales

Conclusion

Objectifs

$\Rightarrow$ Projecteurs orthogonaux, distance et symétries orthogonales

$\Rightarrow$ Applications : distance et symétries orthogonales

- Distance à un ev : $d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\|$. Elle est atteinte en $y = p_\perp(x) \Rightarrow$ Un gros savoir-faire technique (et calculatoire).

Conclusion

Objectifs

⇒ Projecteurs orthogonaux, distance et symétries orthogonales

⇒ Applications : distance et symétries orthogonales

- Distance à un ev : $d(x,F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Elle est atteinte en $y = p_\perp(x)$ ⇒ Un gros savoir-faire technique (et calculatoire).
- Symétrie orthogonale : LA symétrie d'axe F de direction $F^\perp$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Projecteurs orthogonaux, distance et symétries orthogonales

⇒ Applications : distance et symétries orthogonales

- Distance à un ev : $d(x,F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Elle est atteinte en $y = p_\perp(x) \Rightarrow$ Un gros savoir-faire technique (et calculatoire).
- Symétrie orthogonale : LA symétrie d'axe F de direction $F^\perp$.
- Un intérêt si F est de dimension finie : s est explicite.

$$s(x) = 2\sum_{i=1}^{p} \langle x \,|\, e_i \rangle e_i - x \text{ avec } (e_1, e_2, \dots e_p) \text{ b.o.n. de } F$$

Conclusion

Objectifs

⇒ Projecteurs orthogonaux, distance et symétries orthogonales

⇒ Applications : distance et symétries orthogonales

- Distance à un ev : $d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\|$. Elle est atteinte en $y = p_\perp(x)$ ⇒ Un gros savoir-faire technique (et calculatoire).
- Symétrie orthogonale : LA symétrie d'axe F de direction $F^\perp$.
- Un intérêt si F est de dimension finie : s est explicite.

$$s(x) = 2\sum_{i=1}^{p} \langle x \,|\, e_i\rangle e_i - x \text{ avec } (e_1, e_2, \dots e_p) \text{ b.o.n. de } F$$

- Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Conclusion

Objectifs

⇒ Projecteurs orthogonaux, distance et symétries orthogonales

⇒ Applications : distance et symétries orthogonales

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 28 : Espaces euclidiens
  6. Hyperplans vectoriels affines
- Exercice n° 581 & 5803
- TD de jeudi :
  - 8h-10h : n°580, 575, 578, 587, 582
  - 10h-12h : n°579, 576, 574, 584, 582