# Leçon 106 - Espaces vectoriels euclidiens

27 mai 2026



⇒ Exploiter le p.s. pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

$\Rightarrow$ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

$\Rightarrow$ Adjoint d'un endomorphisme

# Caractérisation des formes linéaires

## Proposition - Caractérisation des formes linéaires

Soient $E$ un espace euclidien et $\phi \in E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.
Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \phi(x) = \langle a \mid x \rangle$.

# Caractérisation des formes linéaires

**Proposition - Caractérisation des formes linéaires**

Soient $E$ un espace euclidien et $\phi \in E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \phi(x) = \langle a \mid x \rangle$.

**Démonstration**

# Caractérisation des formes linéaires

## Proposition - Caractérisation des formes linéaires

Soient $E$ un espace euclidien et $\phi \in E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
Alors il existe un unique $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \phi(x) = \langle a \,|\, x\rangle$.

**Démonstration**

## Heuristique - Principe de construction

Ici, on a :

0. Un espace ambiant, euclidien
1. une forme linéaire $f \in E^*$
2. Alors il existe $a \in E$ tel que $f : x \mapsto \langle a|x\rangle$

# Application

**Corollaire - Equation de $H$ et vecteur normal**

Soient $\mathscr{B}$ une b.o.n de $E$ euclidien et $H$ un hyperplan de $E$.
Alors il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ soit l'équation de $H$ dans $\mathscr{B}$ et dans ce cas $a \in E$ de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$ est un vecteur normal à $H$, $H = \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.

# Application

## Corollaire - Equation de $H$ et vecteur normal

Soient $\mathscr{B}$ une b.o.n de $E$ euclidien et $H$ un hyperplan de $E$.

Alors il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ soit l'équation de $H$ dans $\mathscr{B}$ et dans ce cas $a \in E$ de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$ est un vecteur normal à $H$, $H = \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.

**Exemple** - Gradient

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

# Vecteur normal

**Proposition - Vecteur normal à un hyperplan affine**

Soit $\mathscr{R} = (\Omega, e_1, \dots, e_n)$ un repère affine orthonormal de l'espace $E$ de dimension $n$ (i.e. que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n de $E$).
Soit $\mathscr{H}$ un hyperlpan affine de $E$.
On appelle vecteur normal à $\mathscr{H}$, tout vecteur normal à la direction $H$ de $\mathscr{H}$, c'est-à-dire $a \in E$ tel que $H = \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$.
Si $a$ a pour coordonnées $(a_1, \dots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$, alors $\mathscr{H}$ possède une équation dans $\mathscr{R}$ du type $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h$.
Réciproquement : $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h$ avec $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, est l'équation d'un hyperlpan affine de vecteur normal $a$ de coordonnées $(a_1, \dots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$.

# Vecteur normal

## Proposition - Vecteur normal à un hyperplan affine

Soit $\mathscr{R} = (\Omega, e_1, \ldots, e_n)$ un repère affine orthonormal de l'espace $E$ de dimension $n$ (i.e. que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n de $E$).
Soit $\mathscr{H}$ un hyperlpan affine de $E$.
On appelle vecteur normal à $\mathscr{H}$, tout vecteur normal à la direction $H$ de $\mathscr{H}$, c'est-à-dire $a \in E$ tel que $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$.
Si $a$ a pour coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$, alors $\mathscr{H}$ possède une équation dans $\mathscr{R}$ du type $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h$.
Réciproquement : $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h$ avec $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, est l'équation d'un hyperlpan affine de vecteur normal $a$ de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$.

**Démonstration**

# Lignes de niveaux

**Exemple** Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

# Lignes de niveaux

**Exemple** Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

**Corollaire - Ligne de niveau : hyperplan**

Dans $E$ euclidien, les lignes de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}$ (c'est-à-dire les ensembles $E_k = \{M \in E \,|\, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = k\}$) sont des hyperplans affines de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

# Lignes de niveaux

**Exemple** Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

**Corollaire - Ligne de niveau : hyperplan**

Dans $E$ euclidien, les lignes de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}$ (c'est-à-dire les ensembles $E_k = \{M \in E \,|\, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = k\}$) sont des hyperplans affines de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

**Démonstration**

# Distance

## Proposition - Distance à un hyperplan affine

Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de $E$ euclidien, défini par un point $A$ et un vecteur normal unitaire $\vec{n}$. Alors, pour $M$ point de $E$, on a

$$d(M, \mathscr{H}) = |\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|.$$

# Distance

**Proposition - Distance à un hyperplan affine**

Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de $E$ euclidien, défini par un point $A$ et un vecteur normal unitaire $\vec{n}$. Alors, pour $M$ point de $E$, on a

$$d(M, \mathscr{H}) = |\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|.$$

**Démonstration**

# Distance à un hyperplan (cas $n = 2$ ou $n = 3$)

## Corollaire - Distance à une droite du plan

Soit $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ dans un r.o.n du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et $M(x_M, y_M)$ un point. Alors

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

# Distance à un hyperplan (cas $n = 2$ ou $n = 3$)

## Corollaire - Distance à une droite du plan

Soit $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ dans un r.o.n du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et $M(x_M, y_M)$ un point. Alors

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

## Corollaire - Distance à un plan de l'espace

Soit $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $M(x_M, y_M, z_M)$ un point. Alors

$$d(M, \mathscr{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

# Distance à un hyperplan (cas $n = 2$ ou $n = 3$)





## Corollaire - Distance à une droite du plan

Soit $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ dans un r.o.n du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et $M(x_M, y_M)$ un point. Alors

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

## Corollaire - Distance à un plan de l'espace

Soit $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $M(x_M, y_M, z_M)$ un point. Alors

$$d(M, \mathscr{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Démonstration**

# Distance à un hyperplan (cas $n = 2$ ou $n = 3$)

## Corollaire - Distance à une droite du plan

Soit $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ dans un r.o.n du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et $M(x_M, y_M)$ un point. Alors

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

## Corollaire - Distance à un plan de l'espace

Soit $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $M(x_M, y_M, z_M)$ un point. Alors

$$d(M, \mathscr{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Démonstration**

Exercice Reprendre le calcul de la distance de $a = (2, 2, 0)$ à $F = \mathrm{vect}((1, 1, 2), (1, -1, 1))$.

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

# Adjoint

On a le schéma :

$$\begin{array}{ccc} u & \longleftrightarrow & M \\ \downarrow ? & & \downarrow T \\ u^* & \longleftrightarrow & M^T \end{array}$$

# Adjoint

On a le schéma :

$$\begin{array}{ccc} u & \longleftrightarrow & M \\ \downarrow^{?} & & \downarrow^{T} \\ u^* & \longleftrightarrow & M^T \end{array}$$

**Définition - Adjoint de $u \in \mathscr{L}(E,F)$**

Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ Il existe une unique application, notée $u^*$ ou ${}^t u \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall\ x, y \in E, \qquad \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle$$

# Adjoint

On a le schéma :

$$\begin{array}{ccc} u & \longleftrightarrow & M \\ \downarrow ? & & \downarrow T \\ u^* & \longleftrightarrow & M^T \end{array}$$

**Définition - Adjoint de $u \in \mathscr{L}(E,F)$**

Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ Il existe une unique application, notée $u^*$ ou ${}^t u \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall\ x, y \in E, \qquad \langle u(x)|y\rangle = \langle x|u^*(y)\rangle$$

**Démonstration**

# Interprétation matricielle

**Analyse** - Interprétation matricielle.

# Interprétation matricielle

**Analyse** - Interprétation matricielle.

**Remarque** S'il n'y a pas de base orthonormée

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

# Forme bilinéaire non dégénérée

On élargit la notion de produit scalaire.

# Forme bilinéaire non dégénérée

On élargit la notion de produit scalaire.

**Définition - Forme bilinéaire non dégénérée**

Soient $E, F$ deux espaces vectoriels.
On dit que la forme bilinéaire $B : E \times F \to \mathbb{R}$ est non dégénérée si

$$(\forall\ x \in E, B(x,y) = 0) \Rightarrow y = 0$$

$$(\forall\ y \in F, B(x,y) = 0) \Rightarrow x = 0$$

# Forme bilinéaire non dégénérée

On élargit la notion de produit scalaire.

## Définition - Forme bilinéaire non dégénérée

Soient $E, F$ deux espaces vectoriels.
On dit que la forme bilinéaire $B : E \times F \to \mathbb{R}$ est non dégénérée si

$$(\forall\ x \in E, B(x,y) = 0) \Rightarrow y = 0$$
$$(\forall\ y \in F, B(x,y) = 0) \Rightarrow x = 0$$

<u>Exercice</u>

Montrer que tout produit scalaire définie sur $E$ st une forme bilinéaire non dégénérée.

# Crochet de dualité

## Définition - Crochet de dualité

Soit $E$ un $\mathbb{R}$ev. de dimension finie.
On appelle crochet de dualité de $E$ la forme bilinéaire non dégénérée :

$$B : E^* \times E \to \mathbb{R}, (\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$$

# Crochet de dualité

## Définition - Crochet de dualité

Soit $E$ un $\mathbb{R}$ev. de dimension finie.
On appelle crochet de dualité de $E$ la forme bilinéaire non dégénérée :

$$B : E^* \times E \to \mathbb{R}, (\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$$

Exercice

Montrer qu'il s'agit bien d'une forme bilinéaire non dégénérée.

# Caractérisation des formes linéaires

## Heuristique - Principe de construction/d'application

Ici, on a :

0. Un espace ambiant, de dimension finie (a priori non euclidien)
1. une isomorphisme (canonique) $\Phi$ de $E^*$ sur $E$.
2. On définit alors $B$, crochet de dualité : $B(f,x) = f(x)$.

En fait $B(f,x) = \langle \Phi(f), x \rangle$.

# Orthogonal dual

Comme précédemment

**Définition - Orthogonal dual**

Soit $E$ un espace vectoriel et $A$ un sous-espace de $E$.

On note $A^0 = \{\varphi \in E^* \mid \forall\ x \in A, B(\varphi, x) = \varphi(x) = 0\}$.

Soit $C$ un sous-espace de $E^*$.

On note $C^0 = \{x \in E \mid \forall\ f \in C, B(f, x) = f(x) = 0\}$.

# Orthogonal dual

Comme précédemment

## Définition - Orthogonal dual

Soit $E$ un espace vectoriel et $A$ un sous-espace de $E$.

On note $A^0 = \{\varphi \in E^* \mid \forall\ x \in A, B(\varphi, x) = \varphi(x) = 0\}$.

Soit $C$ un sous-espace de $E^*$.

On note $C^0 = \{x \in E \mid \forall\ f \in C, B(f, x) = f(x) = 0\}$.

**Application**. Mécanique quantique

# Orthogonal dual

Comme précédemment

**Définition - Orthogonal dual**

Soit $E$ un espace vectoriel et $A$ un sous-espace de $E$.

On note $A^0 = \{\varphi \in E^* \mid \forall\ x \in A, B(\varphi, x) = \varphi(x) = 0\}$.

Soit $C$ un sous-espace de $E^*$.

On note $C^0 = \{x \in E \mid \forall\ f \in C, B(f, x) = f(x) = 0\}$.

**Application**. Mécanique quantique

Exercice On suppose que $E$ est de dimension $n$. Soit $(e_1, \dots e_p)$ une base de $A$ complétée en $(e_1, \dots e_p, e_{p+1}, \dots e_n)$ une base de $E$.

Donner une caractéristique de $A^0$ avec les applications $e_i^*$.

En déduire $\dim A^0$.

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

- Hyperplan : un vecteur normal facile à obtenir à partir de l'équation de $H$.

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

- Hyperplan : un vecteur normal facile à obtenir à partir de l'équation de $H$.
- Application aux hyperplans affines.

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

- Hyperplan : un vecteur normal facile à obtenir à partir de l'équation de $H$.
- Application aux hyperplans affines.
- Ligne de niveau...

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

- Hyperplan : un vecteur normal facile à obtenir à partir de l'équation de $H$.
- Application aux hyperplans affines.
- Ligne de niveau...
- Distance à hyperplan...

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

# Conclusion





**Objectifs**

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

- Dans le cas euclidien : $u^* : a \mapsto b$ tel que $\forall\ x \in E$, $\langle u(x), a\rangle = \langle x, b\rangle$.

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

- Dans le cas euclidien : $u^* : a \mapsto b$ tel que $\forall\ x \in E$, $\langle u(x), a\rangle = \langle x, b\rangle$.
- Alors $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u^*) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}^T$

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

- Dans le cas euclidien : $u^* : a \mapsto b$ tel que $\forall\ x \in E$, $\langle u(x), a\rangle = \langle x, b\rangle$.
- Alors $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u^*) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}^T$
- Si $E$ non euclidien, on agit sur les forme linéaire $(\ldots)$ !

# Conclusion

**Objectifs**

⇒ Exploiter le produit scalaire pour étudier les hyperplans

⇒ Adjoint d'un endomorphisme

**Pour le prochain cours**

- Lecture du cours : chapitre 35 : Probabilité sur un univers fini
- Exercice n° 586