Leçon 107 - Espaces de probabilité

28 mai 2026

⇒Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

Problèmes

Problème Structure mathématique

Problèmes

Problème Structure mathématique

Problème Quelle définition pour la probabilité d'un événement ?

Problèmes

Problème Structure mathématique

Problème Quelle définition pour la probabilité d'un événement ?

Problème Informatique

Problèmes

Problème Incompatibilité des événements

Problèmes

Problème Incompatibilité des événements

Problème Indépendance des événements

Problèmes

Problème Incompatibilité des événements

Problème Indépendance des événements

Problème Deux événements en relation

⇒Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

Remarque introductive

Heuristique. Sur quelques définitions. . .

Dans cette partie, nous commençons par quelques définitions qui ne sont pas très « mathématiques ». Elles donnent plus un principe d'application qu'un cadre formalisé qui nous permettra de faire des démonstrations.

⇒Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

modèle (scientifique)

Le « modèle »est un concept clé en mathématiques de l'aléatoire et de manière générale en science même si ce concept a mis du temps à se dégager.
Nous renvoyons le lecteur au premier chapitre, on rappelle néanmoins :

modèle (scientifique)

Le « modèle »est un concept clé en mathématiques de l'aléatoire et de manière générale en science même si ce concept a mis du temps à se dégager.
Nous renvoyons le lecteur au premier chapitre, on rappelle néanmoins :

Définition - Modèle mathématique

Un modèle est une interprétation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel ou d'une description de la réalité.

Modélisation en probabilité

Heuristique. Modélisation en probabilité

Pour obtenir un modèle pseudo-concret associé à une situation réelle, il est d'abord nécessaire (**sans quoi, on ne peut pas faire grand chose**) de recenser toutes les résultats possibles de l'expérience que l'on observe → *définition de l'univers.*
L'étape supplémentaire consiste donc à **associer** *(si possible)* **à chacune des situations possibles un nombre qui mesure la possibilité de réalisation**→ *définition de la tribu d'événements sur l'univers.*
Ces nombres (il y a plusieurs situations possibles) sont associés en une **fonction** de probabilité, elle prend ces valeurs dans un ensemble $\mathscr{A}$ qui peut être celui des sous ensembles de Ω. Pour comprendre les propriétés essentielles vérifiées par $\mathscr{A}$, il faut voir celles que l'on souhaite associer à $\mathbf{P}$.→ *définition (enfin) de la probabilité.*

⇒Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

Expérience aléatoire

La définition suivante n'est pas très mathématique. C'est plus un principe d'application qu'un cadre formalisé qui nous permettra de faire des démonstrations :

Expérience aléatoire

La définition suivante n'est pas très mathématique. C'est plus un principe d'application qu'un cadre formalisé qui nous permettra de faire des démonstrations :

Définition - Expérience aléatoire

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont le résultat dépend du **hasard** :
• lancer de dé, tirage d'une carte, jeu de pile ou face,
• observation du nombre d'appels dans un central téléphonique pendant une durée fixée,
• observation de la durée de vie d'un individu anonyme d'une population, tirage d'un nombre au hasard entre 0 et 1...
A une telle expérience on associe l'ensemble de tous les résultats observables, noté Ω et appelé **univers** (ou univers des possibles).

Expérience aléatoire

La définition suivante n'est pas très mathématique. C'est plus un principe d'application qu'un cadre formalisé qui nous permettra de faire des démonstrations :

Définition - Expérience aléatoire

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont le résultat dépend du **hasard** :
- lancer de dé, tirage d'une carte, jeu de pile ou face,
- observation du nombre d'appels dans un central téléphonique pendant une durée fixée,
- observation de la durée de vie d'un individu anonyme d'une population, tirage d'un nombre au hasard entre 0 et 1...

A une telle expérience on associe l'ensemble de tous les résultats observables, noté Ω et appelé **univers** (ou univers des possibles).

Exemple Univers possibles

⇒Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

Evénéments, événements élémentaires. . .

Définition - Issu et événement aléatoire

Un élément de Ω est usuellement noté ω et appelé **issue**.
Un **événement aléatoire** A est représenté par l'ensemble des résultats ω qui le réalisent. C'est donc une partie de Ω.

Evénéments, événements élémentaires. . .

Définition - Issu et événement aléatoire

Un élément de Ω est usuellement noté ω et appelé **issue.**
Un **événement aléatoire** A est représenté par l'ensemble des résultats ω qui le réalisent. C'est donc une partie de Ω.

Exemple « Tirer » au hasard

Evénéments, événements élémentaires. . .

Définition - Vocabulaire probabiliste

On utilise le vocabulaire probabiliste suivant pour les événements :

notation	terminologie probabiliste
$\emptyset$	**événement impossible**
Ω	**événement certain**
$\overline{A}$	**événement contraire** de A
singleton $\{\omega\}$	**événement élémentaire**
$A \cup B$	**événement** A **ou** B
$A \cap B$	**événement** A **et** B
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont **incompatibles**
$A \subset B$	A **implique** B

Décomposition de Ω

Définition - Système complet d'événements

On appelle **système complet d'événements** toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, tels que $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

Dans le cas où Ω est fini, un système complet d'événement est une famille finie $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Décomposition de Ω

Définition - Système complet d'événements

On appelle **système complet d'événements** toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, tels que $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.
Dans le cas où Ω est fini, un système complet d'événement est une famille finie $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Exemple Trivial

Décomposition de Ω

Définition - Système complet d'événements

On appelle **système complet d'événements** toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'événements deux à deux incompatibles, tels que $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.
Dans le cas où Ω est fini, un système complet d'événement est une famille finie $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Exemple Trivial
Remarque Partition

⇒Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

Probabilité sur un univers fini

On considère désormais le cas où Ω est un ensemble fini.

Probabilité sur un univers fini

On considère désormais le cas où Ω est un ensemble fini.

Définition - Probabilité sur un univers fini

Soit Ω un univers fini.
On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbf{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ tq

(i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

(ii) Pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

On appelle **espace probabilisé fini** tout couple $(\Omega, \mathbf{P})$ où $\mathbf{P}$ est une probabilité sur un univers fini Ω.

Probabilité sur un univers fini

On considère désormais le cas où Ω est un ensemble fini.

Définition - Probabilité sur un univers fini

Soit Ω un univers fini.
On appelle **probabilité** sur Ω toute application $\mathbf{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ tq

(i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

(ii) Pour tout couple (A,B) d'événements incompatibles, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

On appelle **espace probabilisé fini** tout couple $(\Omega, \mathbf{P})$ où $\mathbf{P}$ est une probabilité sur un univers fini Ω.

Attention. Addition et réunion

Notons bien que l'on réunit les événements (et **on ne les additionne pas**) En revanche, on additionne les probabilités des événements (incompatibles) (et **on ne les réunit pas**)

Vocabulaire et habitude

Définition - Evénements négligeable, presque sûr

Un événement A est dit **négligeable** si $\mathbf{P}(A) = 0$.
Un événement A est dit **presque sûr** (p.s.) si $\mathbf{P}(A) = 1$.
Une propriété $\mathscr{P}$ est dite **presque sûre** (ou **vraie presque sûrement**) si la probabilité qu'elle se réalise vaut 1.

⇒ Vocabulaire sur les événements

⇒ Propriétés nécessaires

Vocabulaire et habitude

Définition - Evénements négligeable, presque sûr

Un événement A est dit **négligeable** si $\mathbf{P}(A) = 0$.
Un événement A est dit **presque sûr** (p.s.) si $\mathbf{P}(A) = 1$.
Une propriété $\mathscr{P}$ est dite **presque sûre** (ou **vraie presque sûrement**) si la probabilité qu'elle se réalise vaut 1.

Savoir-faire. Une bonne habitude à prendre de suite

Lorsque l'on écrit $\mathbf{P}(A)$, surtout on ne *dit* pas *« P de A »* mais bien *« la probabilité de l'événement A »* ou beaucoup mieux : *« la probabilité que l'on ait obtenu un as »*.
On notera en effet : qu'il y a toujours un verbe dans une proposition relative dans ce cas là et donc qu'il manque un verbe dans la proposition principale. La dernière expression proposée invite naturellement à dire ensuite *« vaut »* ou *« est égale à »* ; ce que n'invite pas à faire *« P de A »*

⇒Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

Premières propriétés

Proposition - Premières propriétés

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. Alors

1. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
2. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
3. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
4. $A \subset B \Rightarrow (\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A))$
5. Si $A_1, \cdots, A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles alors $\mathbf{P}(\biguplus_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$.
6. Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un s.c.é. alors $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) = 1$.
7. Si $A_1, \cdots, A_n \in \Omega$ alors $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$.

Premières propriétés

Proposition - Premières propriétés

Soit $(\Omega, \mathbf{P})$ un espace probabilisé fini. Alors

1. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
2. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$
3. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
4. $A \subset B \Rightarrow (\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A))$
5. Si $A_1, \cdots, A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles alors $\mathbf{P}(\biguplus_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$.
6. Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un s.c.é. alors $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) = 1$.
7. Si $A_1, \cdots, A_n \in \Omega$ alors $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)$.

Démonstration

Détermination

Proposition - Détermination d'une probabilité

Soit Ω un univers fini. Tout événement A est fini et est donc le réunion finie des événements élémentaires le constituant, par conséquent : $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$.

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ alors l'application $\mathbf{P} : \Omega \to [0,1]$, $\{\omega_i\} \mapsto p_i$ définit une probabilité sur Ω

si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!], p_i \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Détermination

Proposition - Détermination d'une probabilité

Soit Ω un univers fini. Tout événement A est fini et est donc le réunion finie des événements élémentaires le constituant, par conséquent : $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\})$.

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ alors l'application $\mathbf{P} : \Omega \to [0,1]$, $\{\omega_i\} \mapsto p_i$ définit une probabilité sur Ω

$$\text{si et seulement si } \forall i \in [\![1,n]\!], p_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Démonstration

⇒Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

Evénements/ensembles

Ici, on souligne quelques manipulations ordinaires chez les probabilistes :

Proposition - Réunion/intersection d'événements

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements.

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall\ i \in I, \omega \in A_i\} = [\forall\ i \in I, \omega \in A_i]$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists\ i \in I, \omega \in A_i\} = [\exists\ i \in I, \omega \in A_i]$$

Evénements/ensembles

Ici, on souligne quelques manipulations ordinaires chez les probabilistes :

Proposition - Réunion/intersection d'événements

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements.

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{\omega\in\Omega \mid \forall\ i\in I, \omega\in A_i\} = [\forall\ i\in I, \omega\in A_i]$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{\omega\in\Omega \mid \exists\ i\in I, \omega\in A_i\} = [\exists\ i\in I, \omega\in A_i]$$

On remplace parfois des « il existe »(resp. « pour tout ») par des réunions (resp. par des intersections).

(Dé)croissance

Définition - Suites (dé)croissantes d'événements

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une suite croissante (respectivement décroissante) d'événements, si pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$A_i \subset A_{i+1} \text{ ou } A_i \Rightarrow A_{i+1} \text{ (resp. } A_{i+1} \subset A_i \text{ ou } A_{i+1} \Rightarrow A_i\text{)}$$

(Dé)croissance

Définition - Suites (dé)croissantes d'événements

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une suite croissante (respectivement décroissante) d'événements, si pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$A_i \subset A_{i+1} \text{ ou } A_i \Rightarrow A_{i+1} \text{ (resp. } A_{i+1} \subset A_i \text{ ou } A_{i+1} \Rightarrow A_i\text{)}$$

Exemple. $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $F_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

(Dé)croissance

Définition - Suites (dé)croissantes d'événements

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une suite croissante (respectivement décroissante) d'événements, si pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$A_i \subset A_{i+1} \text{ ou } A_i \Rightarrow A_{i+1} \text{ (resp. } A_{i+1} \subset A_i \text{ ou } A_{i+1} \Rightarrow A_i\text{)}$$

Exemple. $E_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $F_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Savoir-faire. Suite croissante d'événements et convergence

Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \nearrow$, alors on note $B_i = A_{i+1} \setminus A_i$.
Et donc on a une réunion disjointe : $A_{i+1} = A_i \cup B_i$, réunion disjointe, donc $\mathbf{P}(A_{i+1}) = \mathbf{P}(A_i) + \mathbf{P}(B_i)$.

Par télescopage : $\mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}(A_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}(B_i)$.

On passe alors à la limite monotone...

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

- On raisonne sur l'ensemble des réalisables. Cette année, cette ensemble sera fini

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

- On raisonne sur l'ensemble des réalisables. Cette année, cette ensemble sera fini
- On modélise les observations par des sous-ensembles ou événements voire issus (événements élémentaires).

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

- On raisonne sur l'ensemble des réalisables. Cette année, cette ensemble sera fini
- On modélise les observations par des sous-ensembles ou événements voire issus (événements élémentaires).
- Un peu de vocabulaire : événements impossible, certain, contraire, élémentaire, A ou B, A et B, A et B sont incompatibles, A implique B.

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

- On raisonne sur l'ensemble des réalisables. Cette année, cette ensemble sera fini
- On modélise les observations par des sous-ensembles ou événements voire issus (événements élémentaires).
- Un peu de vocabulaire : événements impossible, certain, contraire, élémentaire, A ou B, A et B, A et B sont incompatibles, A implique B.
- Système complet d'événements (partition - comme une base d'étude)

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

- $\mathbf{P}$ est définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$, ensemble de tous les événements possibles,

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

- $\mathbf{P}$ est définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$, ensemble de tous les événements possibles,
- $\mathbf{P}$ est à valeurs dans $[0, 1]$

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

- $\mathbf{P}$ est définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$, ensemble de tous les événements possibles,
- $\mathbf{P}$ est à valeurs dans $[0,1]$
- et vérifie $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ et si A et B sont incompatibles, alors $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)

⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

- $\mathbf{P}$ est définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$, ensemble de tous les événements possibles,
- $\mathbf{P}$ est à valeurs dans $[0,1]$
- et vérifie $\mathbf{P}(\Omega)=1$ et si A et B sont incompatibles, alors $\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$
- Des propriétés calculatoires :
  - $\mathbf{P}(\overline{A})=1-\mathbf{P}(A)$ $\quad$ $\mathbf{P}(\emptyset)=0$
  - $\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cap B)$
  - $A\subset B\Rightarrow(\mathbf{P}(A)\leqslant\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(B\setminus A)=\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A)$(faux si $A\not\subset B$))
  - Si $A_1,\cdots,A_n$ sont 2 à 2 incompatibles alors $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k)=\sum_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k)$. Sinon $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k)\leqslant\sum_{k=1}^n\mathbf{P}(A_k)$.

Conclusion

Objectifs

⇒ Vocabulaire sur les événements (objets dont on calcule les probabilités)
⇒ Propriétés nécessairement vérifiées par la probabilité

Pour le prochain cours

- Lecture du cours : chapitre 35 : Espaces de probabilité
  Loi uniforme et probabilité conditionnelle
- Exercice N° 742 & 745