

- ⇒ Variables aléatoires (et loi d'une v.a.)
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Problème Variable aléatoire

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Problème Variable aléatoire

Problème Lois de probabilités fréquemment rencontrées

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Problème Variable aléatoire

Problème Lois de probabilités fréquemment rencontrées

Problème Espérance, variance. . .

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Problème Citation de Poincaré

« Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste. »

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Problème Citation de Poincaré

« Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste. »

Problème Deux variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Problème Citation de Poincaré

« Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste. »

Problème Deux variables aléatoires

Problème Produit scalaire

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

- ⇒ Variables aléatoires (et loi d'une v.a.)
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Soit Ω un univers fini lié à une expérience aléatoire.

Définition - Variable aléatoire

On appelle variable aléatoire (v.a.) sur Ω toute application $X : \Omega \rightarrow E$, où E est un ensemble. Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.

$X(\Omega)$ désigne donc l'ensemble image, c'est-à-dire les valeurs que prend l'application X . Cet ensemble est ici fini (car Ω fini), on dit alors que X est une v.a. discrète finie.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

La stabilité linéaires des applications permet d'affirmer :

Proposition - Stabilité linéaire

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω , $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $X + Y, XY$ et λX sont des variables aléatoires sur Ω .

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Loix usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

La stabilité linéaires des applications permet d'affirmer :

Proposition - Stabilité linéaire

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω , $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $X + Y, XY$ et λX sont des variables aléatoires sur Ω .

Proposition - Composition

Soit X une v.a. sur Ω et g une application définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans un ensemble E' , alors $g \circ X$ est une v.a. sur Ω , notée $g(X)$:

$$\begin{aligned} g(X) : \quad \Omega &\rightarrow E' \\ \omega &\mapsto g(X(\omega)) \end{aligned}$$

\Rightarrow V.A. et loi d'une v.a.

\Rightarrow Exemple classique de loi de variables aléatoires

\Rightarrow Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

La stabilité linéaires des applications permet d'affirmer :

Proposition - Stabilité linéaire

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω , $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $X + Y, XY$ et λX sont des variables aléatoires sur Ω .

Proposition - Composition

Soit X une v.a. sur Ω et g une application définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans un ensemble E' , alors $g \circ X$ est une v.a. sur Ω , notée $g(X)$:

$$\begin{aligned} g(X) : \quad \Omega &\rightarrow E' \\ \omega &\mapsto g(X(\omega)) \end{aligned}$$

Démonstration

\Rightarrow V.A. et loi d'une v.a.

\Rightarrow Exemple classique de loi de variables aléatoires

\Rightarrow Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Définition - variable aléatoire constante ou certaine

Si X est une application constante sur Ω , on dit que c'est une variable aléatoire constante ou certaine.

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Définition - variable aléatoire constante ou certaine

Si X est une application constante sur Ω , on dit que c'est une variable aléatoire constante ou certaine.

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Définition - Notations

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire sur Ω .

Alors, pour $A \subset E$, $X^{-1}(A)$ est un événement (car $X^{-1}(A) \in \mathcal{P}(\Omega)$) noté

$$(X \in A) \text{ ou } \{X \in A\} \quad (= X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}).$$

Dans le cas d'une variable aléatoire réelle, pour $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$(X \leq x) = X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\},$$

$$(X < x) = X^{-1}(]-\infty, x[),$$

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\})$$

de même pour $(X \geq x), (X > x), (a \leq X \leq b) \dots$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Points de vue sur les v.a.

Heuristique. Deux points de vue sur X^{-1}

De manière générale, ce que l'on a c'est une famille d'événement paramétrée par une variable réelle et pour laquelle on cherche des probabilités de réalisation.

Par exemple, on s'intéresse à l'évolution de la température (moyenne ou sur un point du globe) sur 10 ans. On note H , la variable qui indique cette évolution. On sait que $H \in \mathbb{R}$ (même si toutes les valeurs réelles ne sont pas réalistes).

Ce que l'on cherche : la probabilité d'une hausse \geq à 2° : $\mathbf{P}(H \geq 2)$.

Il faut donc que l'ensemble $H^{-1}([2, +\infty[)$ soit un événement mesurable en probabilité.

Donc ce qui nous intéresse, dans la pratique, c'est plutôt $H^{-1}(I)$, comme élément de Ω et dont on cherche une probabilité.

On fera bien attention à la manière de lire les expressions mathématiques du type $\mathbf{P}(H = 0)$

\Rightarrow V.A. et loi d'une v.a.

\Rightarrow Exemple classique de loi de variables aléatoires

\Rightarrow Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Points de vue sur les v.a.

Heuristique. Deux points de vue sur X^{-1}

On a alors deux points de vue

- ▶ H est une application et H^{-1} est une application réciproque, en règle générale non bijective, donc une application de l'ensemble des parties de E (ou de \mathbb{R} pour une var) sur l'ensemble des parties de Ω (ou une tribu de Ω). C'est le point de vue choisi dans le cours.
- ▶ H^{-1} fait la partition de Ω en classes d'équivalence.

$$\omega \mathcal{R}_H \omega' \iff H(\omega) = H(\omega')$$

De ce point de vue, le théorème suivant sur le système complet d'événements est trivial.

⇒ V.A. et loi d'une v.a.

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

- ⇒ Variables aléatoires (et loi d'une v.a.)
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

3. Couples de variables aléatoires

Définition de la loi de probabilité

On se place désormais sur un espace probabilisé fini (Ω, \mathbf{P}) .

Définition - Loi (de probabilité) d'une variable aléatoire

Soit X une v.a. sur Ω . Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X : X(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{aligned}$$

s'appelle la loi (de probabilité) de X .

\Rightarrow V.A. et loi d'une
v.a.

\Rightarrow Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

\Rightarrow Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Définition de la loi de probabilité

On se place désormais sur un espace probabilisé fini (Ω, \mathbf{P}) .

Définition - Loi (de probabilité) d'une variable aléatoire

Soit X une v.a. sur Ω . Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X : X(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{aligned}$$

s'appelle la loi (de probabilité) de X .

Remarque Changement d'espace

\Rightarrow V.A. et loi d'une
v.a.

\Rightarrow Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

\Rightarrow Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Définition de la loi de probabilité

On se place désormais sur un espace probabilisé fini (Ω, \mathbf{P}) .

Définition - Loi (de probabilité) d'une variable aléatoire

Soit X une v.a. sur Ω . Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X : X(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{aligned}$$

s'appelle la loi (de probabilité) de X .

Remarque Changement d'espace

Savoir-faire. Définir la loi d'une variable aléatoire

Définir la loi de probabilité d'une v.a. X finie, c'est donc donner $X(\Omega)$ ainsi que les probabilités $\mathbf{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Définition de la loi de probabilité

On se place désormais sur un espace probabilisé fini (Ω, \mathbf{P}) .

Définition - Loi (de probabilité) d'une variable aléatoire

Soit X une v.a. sur Ω . Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X : X(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{aligned}$$

s'appelle la loi (de probabilité) de X .

Remarque Changement d'espace

Savoir-faire. Définir la loi d'une variable aléatoire

Définir la loi de probabilité d'une v.a. X finie, c'est donc donner $X(\Omega)$ ainsi que les probabilités $\mathbf{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Remarque Notation

⇒ V.A. et loi d'une v.a.

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Définition - Relation d'équivalence sur les variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω .

On dit que X suit la même loi que Y , et on note $X \sim Y$ si

$$\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y.$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

⇒ V.A. et loi d'une v.a.

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Variables équivalentes

Définition - Relation d'équivalence sur les variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω .

On dit que X suit la même loi que Y , et on note $X \sim Y$ si

$$\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y.$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Attention. Les variables X et Y peuvent être différentes

Pour une pièce bien équilibrée, si X indique le nombre de piles pour n lancers et Y le nombre de faces. Alors $X \sim Y$, alors que $Y = n - X$ (et donc $X \neq Y$).

⇒ V.A. et loi d'une v.a.

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Variables équivalentes

Définition - Relation d'équivalence sur les variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω .

On dit que X suit la même loi que Y , et on note $X \sim Y$ si

$$\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y.$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Attention. Les variables X et Y peuvent être différentes

Pour une pièce bien équilibrée, si X indique le nombre de piles pour n lancers et Y le nombre de faces. Alors $X \sim Y$, alors que $Y = n - X$ (et donc $X \neq Y$).

Démonstration

⇒ V.A. et loi d'une v.a.

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Variables équivalentes

Définition - Relation d'équivalence sur les variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω .

On dit que X suit la même loi que Y , et on note $X \sim Y$ si

$$\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y.$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Attention. Les variables X et Y peuvent être différentes

Pour une pièce bien équilibrée, si X indique le nombre de piles pour n lancers et Y le nombre de faces. Alors $X \sim Y$, alors que $Y = n - X$ (et donc $X \neq Y$).

Démonstration

Exercice

Montrer que si $X \sim Y$, alors pour tout $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(X) \sim f(Y)$.

La réciproque est-elle vraie ?

⇒ V.A. et loi d'une v.a.

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

$(X = k)$ comme système complet d'événements

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Proposition - Variable aléatoire et système complet d'événements

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω .

Alors la famille $\left((X = x) \right)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé système complet d'événements associé à X . En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = 1.$$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

$(X = k)$ comme système complet d'événements

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Proposition - Variable aléatoire et système complet d'événements

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω .

Alors la famille $\left((X = x) \right)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé système complet d'événements associé à X . En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = 1.$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Proposition - Existence d'une v.a. a priori

Soient E un ensemble fini, $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et p_1, \dots, p_n des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Alors, si Ω est un ensemble fini tel que $\text{Card}\Omega \geq n$,

il existe une probabilité \mathbf{P} sur Ω et une v.a. X définie sur Ω vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = x_i) = p_i$$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Existence d'une v.a. sous contrainte

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Proposition - Existence d'une v.a. a priori

Soient E un ensemble fini, $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et p_1, \dots, p_n des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Alors, si Ω est un ensemble fini tel que $\text{Card}\Omega \geq n$,

il existe une probabilité \mathbf{P} sur Ω et une v.a. X définie sur Ω vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = x_i) = p_i$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Proposition - Loi d'une fonction de X

Soient X v.a. sur Ω et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.

Alors la loi de probabilité de $Y = g(X)$ est donnée par

$Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ et

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} \mathbf{P}(X = x) = \sum_{x|g(x)=y} \mathbf{P}(X = x)$$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Proposition - Loi d'une fonction de X

Soient X v.a. sur Ω et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.
Alors la loi de probabilité de $Y = g(X)$ est donnée par
 $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ et

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} \mathbf{P}(X = x) = \sum_{x | g(x) = y} \mathbf{P}(X = x)$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Définition - Fonction de répartition

Soit X une v.a.r sur Ω . L'application

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$
$$x \mapsto \mathbf{P}(X \leq x)$$

s'appelle la fonction de répartition de X ; si

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \sum_{i|x_i \leq x} \mathbf{P}(X = x_i).$$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Fonction de répartition

Définition - Fonction de répartition

Soit X une v.a.r sur Ω . L'application

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mathbf{P}(X \leq x)$$

s'appelle la fonction de répartition de X ; si

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \sum_{i | x_i \leq x} \mathbf{P}(X = x_i).$$

Exemple Fonction de répartition du max

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Fonction de répartition

Définition - Fonction de répartition

Soit X une v.a.r sur Ω . L'application

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mathbf{P}(X \leq x)$$

s'appelle la fonction de répartition de X ; si

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \sum_{i|x_i \leq x} \mathbf{P}(X = x_i).$$

Exemple Fonction de répartition du max

Exercice

On lance deux dés à six faces parfaitement équilibrés. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus. Donner la loi de X , sa fonction de répartition ainsi que la loi de $Y = |X - 7|$.

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

- ⇒ Variables aléatoires (et loi d'une v.a.)
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

(Ω, \mathbf{P}) désigne un espace probabilisé fini.

Définition - Loi uniforme

On dit qu'une v.a. X suit une loi uniforme sur $X(\Omega)$ si

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{\text{Card}(X(\Omega))}.$$

Dans le cas particulier où $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_n$ et on a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

\Rightarrow V.A. et loi d'une
v.a.

\Rightarrow Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

\Rightarrow Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Loi uniforme

(Ω, \mathbf{P}) désigne un espace probabilisé fini.

Définition - Loi uniforme

On dit qu'une v.a. X suit une loi uniforme sur $X(\Omega)$ si

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{\text{Card}(X(\Omega))}.$$

Dans le cas particulier où $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_n$ et on a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Remarque Modèle pour la loi uniforme \mathcal{U}_n

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Définition - Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une v.a.r. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbf{P}(X = 1) = p$, et donc

$$\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

\Rightarrow V.A. et loi d'une
v.a.

\Rightarrow Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

\Rightarrow Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Définition - Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une v.a.r. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbf{P}(X = 1) = p$, et donc $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Remarque Modèle pour la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

\Rightarrow V.A. et loi d'une
v.a.

\Rightarrow Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

\Rightarrow Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Définition - Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une v.a.r. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbf{P}(X = 1) = p$, et donc

$$\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Remarque Modèle pour la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Savoir-faire. Exploitation d'indicatrice (1)

Très souvent, on associera à l'événement $A \subset \Omega$, la variable aléatoire $X = \mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$

\Rightarrow V.A. et loi d'une v.a.

\Rightarrow Exemple classique de loi de variables aléatoires

\Rightarrow Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Définition - Loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On dit qu'une v.a.r. suit une loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Définition - Loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On dit qu'une v.a.r. suit une loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque Modèle pour la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

- ⇒ Variables aléatoires (et loi d'une v.a.)
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Définition du couple ou 2-uplet

Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini. On a déjà rencontré cette situation dans le cas du lancer de dés.

Définition - Couple de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω , à valeurs respectivement dans les ensembles E et F .

L'application

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\rightarrow E \times F \\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

est appelée couple de variables aléatoires, c'est donc une v.a. à valeurs dans $E \times F$. On note $Z = (X, Y)$.

On a $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Si X et Y sont des v.a.r. on parle de couple de v.a.r.

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Loi conjointe, lois marginales

Définition - Loi conjointe, lois marginales

On appelle loi conjointe de X et Y la loi du couple $Z = (X, Y)$, c'est-à-dire l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(X,Y)} : Z(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\mapsto \mathbf{P}\left((X, Y) = (x, y)\right) = \mathbf{P}\left((X = x) \cap (Y = y)\right) \end{aligned}$$

On appelle lois marginales du couple (X, Y) les deux lois de probabilité, respectivement de X et Y .

On a $\mathbf{P}_X : x \mapsto \sum_{Y=y} \mathbf{P}\left((X, Y) = (x, y)\right)$ (et de même pour P_Y).

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Loi conjointe, lois marginales

Définition - Loi conjointe, lois marginales

On appelle loi conjointe de X et Y la loi du couple $Z = (X, Y)$, c'est-à-dire l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(X,Y)} : Z(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\mapsto \mathbf{P}\left((X, Y) = (x, y)\right) = \mathbf{P}\left((X = x) \cap (Y = y)\right) \end{aligned}$$

On appelle lois marginales du couple (X, Y) les deux lois de probabilité, respectivement de X et Y .

On a $\mathbf{P}_X : x \mapsto \sum_{Y=y} \mathbf{P}\left((X, Y) = (x, y)\right)$ (et de même pour P_Y).

Attention. Lien entre les deux lois

A partir de la loi conjointe d'un couple de v.a. on peut déterminer les lois marginales. La réciproque est fautive.

⇒ V.A. et loi d'une v.a.

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Définition - Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires.

Pour $x \in X(\Omega)$ fixé tel que $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$, on appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ la loi de Y pour la probabilité $\mathbf{P}_{(X=x)}$, c'est-à-dire l'application :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ y &\mapsto \mathbf{P}(Y = y | X = x) \end{aligned}$$

De même on peut définir, pour $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(Y = y) \neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Exercice

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Soient X_1 la v.a. qui vaut 1 si le premier jet donne "pile" et 0 sinon, et X_2 la v.a. égale au nombre de "face" obtenu.

Déterminer la loi conjointe et les lois marginales du couple (X_1, X_2) .

Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $(X_2 = 1)$.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Exercice

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules avec remise et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus. On pose $X = X_1$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.

Déterminer la loi conjointe ainsi que les lois marginales du couple (X_1, X_2) . Déterminer la loi conjointe ainsi que les lois marginales du couple (X, Y) . Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 2)$.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Condition nécessaire et suffisante de loi de couple

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Proposition - Caractérisation de loi de couple de v.a.

Soient E et F deux ensembles.

$\left\{ \left((x_i, y_j), p_{ij} \right) \in (E \times F) \times \mathbb{R} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s \right\}$ est la loi d'un couple de v.a. si et seulement si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, s \rrbracket, p_{ij} \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s p_{ij} = 1.$$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Condition nécessaire et suffisante de loi de couple

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

Proposition - Caractérisation de loi de couple de v.a.

Soient E et F deux ensembles.

$\left\{ \left((x_i, y_j), p_{ij} \right) \in (E \times F) \times \mathbb{R} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s \right\}$ est la loi d'un couple de v.a. si et seulement si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, s \rrbracket, p_{ij} \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s p_{ij} = 1.$$

Démonstration

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Généralisation à des n -uplets

Les définitions peuvent se généraliser à des n -uplets de v.a.

Proposition - Vecteur aléatoire

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E_1, \dots, E_n des ensembles et X_1, \dots, X_n n v.a. sur Ω . La variable aléatoire à valeurs dans $E_1 \times \dots \times E_n$

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow E \times \dots \times E_n \\ \omega &\mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{aligned}$$

est appelée n -uplet de variables aléatoires noté

$$X = (X_1, \dots, X_n).$$

On a $X(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$.

Si les X_i sont des v.a.r. on parle de n -uplet de v.a.r. ou de vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n .

La loi conjointe de X_1, \dots, X_n est la loi du n -uplet

$X = (X_1, \dots, X_n)$ Les lois marginales de $X = (X_1, \dots, X_n)$ sont les n lois de probabilité des v.a. X_1, \dots, X_n , elles peuvent se déduire de la loi conjointe.

⇒ V.A. et loi d'une v.a.

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Variables aléatoires
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- ▶ Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- ▶ Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- ▶ Deux points de vue

⇒ V.A. et loi d'une v.a.

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- ▶ Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- ▶ Deux points de vue :
 - ▶ $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et on s'intéresse aux événements
 $[X = k] = X^{-1}(\{k\})$ image réciproque de $\{k\} \subset \mathbb{R}$ par X

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- ▶ Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- ▶ Deux points de vue :
 - ▶ $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et on s'intéresse aux événements
 $[X = k] = X^{-1}(\{k\})$ image réciproque de $\{k\} \subset \mathbb{R}$ par X
 - ▶ X crée une partition de Ω

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- ▶ Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- ▶ Deux points de vue :
 - ▶ $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et on s'intéresse aux événements
 $[X = k] = X^{-1}(\{k\})$ image réciproque de $\{k\} \subset \mathbb{R}$ par X
 - ▶ X crée une partition de Ω
- ▶ Les variables aléatoires peuvent être composée avec des fonctions réelles

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- ▶ Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- ▶ Deux points de vue
- ▶ Les variables aléatoires peuvent être composée avec des fonctions réelles
- ▶ La loi de X est la donnée des $\mathbf{P}(X = k)$, pour $k \in X(\Omega)$.

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- ▶ Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- ▶ Deux points de vue
- ▶ Les variables aléatoires peuvent être composée avec des fonctions réelles
- ▶ La loi de X est la donnée des $\mathbf{P}(X = k)$, pour $k \in X(\Omega)$.
- ▶ $([X = k])_{k \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- ▶ Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- ▶ Deux points de vue
- ▶ Les variables aléatoires peuvent être composée avec des fonctions réelles
- ▶ La loi de X est la donnée des $\mathbf{P}(X = k)$, pour $k \in X(\Omega)$.
- ▶ $([X = k])_{k \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements
- ▶ Si $Y = g(X)$ alors $\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{h \mid g(h)=k} \mathbf{P}(X = h)$

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

- ▶ Une variable aléatoire est un « **nombre potentiel** » !
- ▶ Deux points de vue
- ▶ Les variables aléatoires peuvent être composée avec des fonctions réelles
- ▶ La loi de X est la donnée des $\mathbf{P}(X = k)$, pour $k \in X(\Omega)$.
- ▶ $([X = k])_{k \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements
- ▶ Si $Y = g(X)$ alors $\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{h \mid g(h)=k} \mathbf{P}(X = h)$
- ▶ Fonctions de répartition : $F_X : t \mapsto \mathbf{P}(X \leq t)$

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Variables aléatoires
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

- ▶ Si toutes les valeurs prises par X sont équiprobables, on dit que X suit une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, \#(X(\Omega))])$.

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

- ▶ Si toutes les valeurs prises par X sont équiprobables, on dit que X suit une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, \#(X(\Omega))])$.
- ▶ Si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ (seulement deux issues vues par X), en notant $p = \mathbf{P}(X = 1)$, on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

⇒ Variables aléatoires

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

- ▶ Si toutes les valeurs prises par X sont équiprobables, on dit que X suit une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, \#(X(\Omega))])$.
- ▶ Si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ (seulement deux issues vues par X), en notant $p = \mathbf{P}(X = 1)$, on dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
- ▶ Si X est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes ou X compte le nombre de succès lorsqu'on répète n fois de façon indépendante une même opération élémentaires de probabilité de succès p , on dit que X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Variables aléatoires
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Variables aléatoires
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires
 - ▶ Définition : $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$

⇒ V.A. et loi d'une v.a.

⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires

⇒ Couple de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Variables aléatoires
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires
 - ▶ Définition : $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$
 - ▶ Loi conjointe : loi de Z (représentée dans un tableau).
Lois marginales : lois de X et Y (on exploite souvent la FPT)

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Variables aléatoires
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires
 - ▶ Définition : $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$
 - ▶ Loi conjointe : loi de Z (représentée dans un tableau).
Lois marginales : lois de X et Y (on exploite souvent la FPT)
 - ▶ Lois conditionnelles : $\mathbf{P}_{(X=x)}(Y = y) \dots$

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Conclusion

Objectifs

- ⇒ Variables aléatoires
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires
 - ▶ Définition : $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$
 - ▶ Loi conjointe : loi de Z (représentée dans un tableau).
Lois marginales : lois de X et Y (on exploite souvent la FPT)
 - ▶ Lois conditionnelles : $\mathbf{P}_{(X=x)}(Y = y) \dots$
 - ▶ Généralisation à un vecteur de toute taille...

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

- 2.1. Quelques définitions
- 2.2. Loi de probabilité
- 2.3. Lois usuelles

3. Couples de variables aléatoires

Objectifs

- ⇒ Variables aléatoires
- ⇒ Exemple classique de loi de variables aléatoires
- ⇒ Couple de variables aléatoires

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture : 3. Indépendance
- ▶ Exercice n°779 & 787

⇒ V.A. et loi d'une
v.a.

⇒ Exemple classique
de loi de variables
aléatoires

⇒ Couple de
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

2.1. Quelques définitions

2.2. Loi de probabilité

2.3. Lois usuelles

3. Couples de
variables aléatoires