



⇒ Indépendance de variables aléatoires

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## 1. Problèmes

1. Problèmes

## 2. Variable aléatoire

2. Variable aléatoire

## 3. Couples de variables aléatoires

3. Couples de  
variables aléatoires

## 4. Indépendance

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux variables aléatoires

**4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires**

4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables aléatoires indépendantes

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables aléatoires

4.4. Suite de variables  
aléatoires

## ⇒ Indépendance de variables aléatoires

### 1. Problèmes

### 2. Variable aléatoire

### 3. Couples de variables aléatoires

### 4. Indépendance

#### 4.1. Indépendance de deux variables aléatoires

#### 4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires

#### 4.3. Opération de variables aléatoires indépendantes

#### 4.4. Suite de variables aléatoires

## ⇒ Indépendance de variables aléatoires

### 1. Problèmes

### 2. Variable aléatoire

### 3. Couples de variables aléatoires

### 4. Indépendance

#### 4.1. Indépendance de deux variables aléatoires

#### 4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires

#### 4.3. Opération de variables aléatoires indépendantes

#### 4.4. Suite de variables aléatoires

# Indépendance de deux variables

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Définition - Indépendance de deux v.a.

Deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  sur l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathbf{P})$  sont dites indépendantes si, pour tout couple  $(x, y)$  de  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , les événements  $\{X = x\}$  et  $\{Y = y\}$  sont indépendants, c'est-à-dire si

$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$ .

On notera  $X \perp\!\!\!\perp Y$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Indépendance de deux variables

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Définition - Indépendance de deux v.a.

Deux variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  sur l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathbf{P})$  sont dites indépendantes si, pour tout couple  $(x, y)$  de  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , les événements  $(X = x)$  et  $(Y = y)$  sont indépendants, c'est-à-dire si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y).$$

On notera  $X \perp\!\!\!\perp Y$

C'est une relation symétrique. Elle n'est ni réflexive, ni transitive.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Indépendance de deux variables

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Proposition - Caractérisation d'indépendance

Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sur  $(\Omega, \mathbf{P})$  sont indépendantes si et seulement si, pour tout  $(A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Indépendance de deux variables

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Proposition - Caractérisation d'indépendance

Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sur  $(\Omega, \mathbf{P})$  sont indépendantes si et seulement si, pour tout  $(A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants.

## Démonstration

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Théorème - de Coalition

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathbf{P})$ ,  
indépendantes.

Alors, pour toutes fonctions  $f$  et  $g$ , les v.a. (si elles sont bien  
définies)  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

=> Indépendance de  
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Lemme de Coalition

## Théorème - de Coalition

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathbf{P})$ ,  
indépendantes.

Alors, pour toutes fonctions  $f$  et  $g$ , les v.a. (si elles sont bien  
définies)  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

## Démonstration

## ⇒ Indépendance de variables aléatoires

### 1. Problèmes

### 2. Variable aléatoire

### 3. Couples de variables aléatoires

### 4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux variables aléatoires

**4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires**

4.3. Opération de variables aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables aléatoires

## ⇒ Indépendance de variables aléatoires

### 1. Problèmes

### 2. Variable aléatoire

### 3. Couples de variables aléatoires

### 4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

**4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires**

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Définition - Indépendance mutuelle

Soient  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{P})$ .  
On dit que  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si pour tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ , on a

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = x_i)$$

c'est-à-dire si les événements  $\left(\{X_i = x_i\}\right)_{1 \leq i \leq n}$  sont mutuellement indépendants.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Proposition - Caractérisation de l'indépendance mutuelle

Soient  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $(\Omega, P)$ .  
 $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes si et seulement si  
pour tout  $(A_1, \dots, A_n) \subset X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ , les événements  
 $(X_i \in A_i)$  sont mutuellement indépendants.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Proposition - Caractérisation de l'indépendance mutuelle

Soient  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $(\Omega, P)$ .  
 $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes si et seulement si  
pour tout  $(A_1, \dots, A_n) \subset X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ , les événements  
 $(X_i \in A_i)$  sont mutuellement indépendants.

## Démonstration

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Indépendance mutuelle

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Proposition - Caractérisation de l'indépendance mutuelle

Soient  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{P})$ .  
 $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes si et seulement si  
pour tout  $(A_1, \dots, A_n) \subset X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ , les événements  
 $(X_i \in A_i)$  sont mutuellement indépendants.

## Démonstration

## Proposition - Indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux

$n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sur  $(\Omega, \mathcal{P})$  mutuellement  
indépendantes sont indépendantes deux à deux.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Indépendance mutuelle

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Proposition - Caractérisation de l'indépendance mutuelle

Soient  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{P})$ .  
 $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes si et seulement si  
pour tout  $(A_1, \dots, A_n) \subset X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ , les événements  
 $(X_i \in A_i)$  sont mutuellement indépendants.

## Démonstration

## Proposition - Indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux

$n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sur  $(\Omega, \mathcal{P})$  mutuellement  
indépendantes sont indépendantes deux à deux.

## Démonstration

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Coalitions à $n$ variables

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Théorème - Coalitions ( $n$ variables)

Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires définies sur  $(\Omega, P)$  mutuellement indépendantes. Alors :

- ▶ pour toutes fonctions  $g_1, \dots, g_n$ , les v.a. (si elles sont bien définies)  $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$  sont mutuellement indépendantes ;
- ▶ pour toutes fonctions  $\varphi$  et  $\psi$ , les deux variables aléatoires (si elles sont définies)  $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_p)$  et  $\psi(X_{p+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes ;
- ▶ plus généralement si  $Y_1, \dots, Y_k$  sont  $k$  variables aléatoires telles que  $Y_i$  soit fonction des  $X_j$  pour  $j \in J_i$ , avec les ensembles  $J_i$  deux à deux disjoints, alors  $Y_1, \dots, Y_k$  sont mutuellement indépendantes.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Coalitions à $n$ variables

## Théorème - Coalitions ( $n$ variables)

Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires définies sur  $(\Omega, P)$  mutuellement indépendantes. Alors :

- ▶ pour toutes fonctions  $g_1, \dots, g_n$ , les v.a. (si elles sont bien définies)  $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$  sont mutuellement indépendantes ;
- ▶ pour toutes fonctions  $\varphi$  et  $\psi$ , les deux variables aléatoires (si elles sont définies)  $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_p)$  et  $\psi(X_{p+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes ;
- ▶ plus généralement si  $Y_1, \dots, Y_k$  sont  $k$  variables aléatoires telles que  $Y_i$  soit fonction des  $X_j$  pour  $j \in J_i$ , avec les ensembles  $J_i$  deux à deux disjoints, alors  $Y_1, \dots, Y_k$  sont mutuellement indépendantes.

On ne fait pas la première démonstration, il suffit d'aptes le cas de deux variables. On ne fait pas non plus la dernière, très pénible.

⇒ Indépendance de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires

4.3. Opération de variables aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables aléatoires

## Démonstration

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

**4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires**

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

## Démonstration

**Exemple** Une pièce qui n'en finit pas d'être tirée

On considère une pièce que l'on lance infiniment, elle retombe avec une probabilité  $p$  sur pile et  $q = 1 - p$  sur face.

On note  $X$ , la v.a.r. qui mesure le première fois que l'on obtient pile.

On note  $Y$ , la v.a.r. qui mesure le seconde fois que l'on obtient pile.

On considère que les résultats des lancers sont indépendants les uns les autres (modélisation).

Chercher la loi conjointe et les lois de chacune des v.a.r.

Ces deux lois sont-elles indépendantes ?

=> Indépendance de  
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Démonstration

## Démonstration

**Exemple** Une pièce qui n'en finit pas d'être tirée

On considère une pièce que l'on lance infiniment, elle retombe avec une probabilité  $p$  sur pile et  $q = 1 - p$  sur face.

On note  $X$ , la v.a.r. qui mesure le première fois que l'on obtient pile.

On note  $Y$ , la v.a.r. qui mesure le seconde fois que l'on obtient pile.

On considère que les résultats des lancers sont indépendants les uns les autres (modélisation).

Chercher la loi conjointe et les lois de chacune des v.a.r.

Ces deux lois sont-elles indépendantes ?

On considère avec le même modèle, non plus  $(X, Y)$  mais le couple  $(X, Z)$ ,

où  $Z$  indique le nombre de lancers supplémentaires pour obtenir le second pile.

=> Indépendance de  
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

## ⇒ Indépendance de variables aléatoires

### 1. Problèmes

### 2. Variable aléatoire

### 3. Couples de variables aléatoires

### 4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires

**4.3. Opération de variables aléatoires indépendantes**

4.4. Suite de variables aléatoires

## ⇒ Indépendance de variables aléatoires

### 1. Problèmes

### 2. Variable aléatoire

### 3. Couples de variables aléatoires

### 4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

**4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes**

4.4. Suite de variables  
aléatoires

## Théorème - Stabilité de la loi binomiale pour la somme

Soit  $(\Omega, \mathbf{P})$  un espace de probabilité fini.

- ▶ Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.r. indépendantes sur  $(\Omega, P)$  telles que  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ , alors  $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$ .
- ▶ Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des v.a.r. mutuellement indépendantes sur  $(\Omega, P)$  telles que pour tout  $i$ ,  $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_i, p)$ , alors  $\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n n_i, p\right)$ .

⇒ Indépendance de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires

4.3. Opération de variables aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables aléatoires

## Théorème - Stabilité de la loi binomiale pour la somme

Soit  $(\Omega, \mathbf{P})$  un espace de probabilité fini.

- ▶ Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.r. indépendantes sur  $(\Omega, P)$  telles que  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ , alors  $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$ .
- ▶ Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des v.a.r. mutuellement indépendantes sur  $(\Omega, P)$  telles que pour tout  $i$ ,  $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_i, p)$ , alors  $\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n n_i, p\right)$ .

La loi de Bernoulli étant un cas particulier de la loi binomiale ( $n = 1$ ), on a

## Corollaire - Addition de Bernoulli

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des v.a.r. mutuellement indépendantes sur  $(\Omega, \mathbf{P})$ , toutes de loi  $\mathcal{B}(p)$ , alors  $\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

$\Rightarrow$  Indépendance de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires

4.3. Opération de variables aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables aléatoires

## Attention - Le même coefficient $p$

On soulignera qu'il faut que ce soit la même probabilité  $p$  en paramètre aux lois additionnées

⇒ Indépendance de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires

**4.3. Opération de variables aléatoires indépendantes**

4.4. Suite de variables aléatoires

## Attention - Le même coefficient $p$

On soulignera qu'il faut que ce soit la même probabilité  $p$  en paramètre aux lois additionnées

## Démonstration

⇒ Indépendance de variables aléatoires

1. Problèmes
2. Variable aléatoire
3. Couples de variables aléatoires
4. Indépendance
  - 4.1. Indépendance de deux variables aléatoires
  - 4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires
  - 4.3. Opération de variables aléatoires indépendantes
  - 4.4. Suite de variables aléatoires

# Modélisation

## Attention - Le même coefficient $p$

On soulignera qu'il faut que ce soit la même probabilité  $p$  en paramètre aux lois additionnées

## Démonstration

### Savoir-faire. Modélisation

Une suite finie  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  de variables aléatoires indépendantes fournit un moyen de modéliser une succession de  $n$  épreuves dont les résultats sont indépendants, en particulier les répétitions indépendantes d'une même épreuve se modélisent par la donnée de  $n$  v.a. indépendantes **équidistribuées** (c'est-à-dire de même loi).

Une suite de  $n$  lancers de pile ou face aux résultats indépendants se modélise par la donnée de  $n$  v.a. indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  de loi  $\mathcal{B}(p)$ ,  $X_i$  étant le résultat du  $i$ -ième lancer.

$\Rightarrow$  Indépendance de variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires

4.3. Opération de variables aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables aléatoires

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Exercice

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -uplet de v.a.r. indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(100, \frac{1}{5})$ .

On note  $N$  la variable aléatoire égale à  $\text{Card}\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid X_k = 99\}$ . Déterminer la loi de  $N$ .

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Exercice

Une urne contient  $n$  boules indiscernables numérotées de 1 à  $n$ .  
On prélève deux boules successivement et on note  $X_1$  (resp.  $X_2$ )  
la valeur du numéro de la première boule tirée (resp. deuxième).  
On note  $Z = \max(X_1, X_2)$ .

Déterminer la loi du couple  $(X_1, X_2)$ , les lois marginales, ainsi  
que la loi de  $Z$  dans les deux cas suivants :

- ▶ le tirage se fait avec remise
- ▶ le tirage se fait sans remise

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

## Savoir faire pour le max

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

Truc et Astuce pour le calcul. Etude du  $\max(X_i)$ , où les  $X_i$  sont indépendantes

On note  $Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . En deux temps :

1. On constate que  $Z \leq k \iff \forall i \leq n, X_i \leq k$ .

Par indépendance : 
$$\mathbf{P}(Z \leq k) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \leq k)$$

2. Revenir au cas  $Z = k$  :

$[Z \leq k] = [Z = k] \cup [Z \leq k - 1]$ , événements incompatibles,

Donc  $\mathbf{P}(Z \leq k) = \mathbf{P}(Z = k) + \mathbf{P}(Z \leq k - 1)$ ,

et  $\mathbf{P}(Z = k) = \mathbf{P}(Z \leq k) - \mathbf{P}(Z \leq k - 1)$

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes4.4. Suite de variables  
aléatoires

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

# Savoir faire pour le max

Truc et Astuce pour le calcul. Etude du  $\max(X_i)$ , où les  $X_i$  sont indépendantes

On note  $Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . En deux temps :

1. On constate que  $Z \leq k \iff \forall i \leq n, X_i \leq k$ .

Par indépendance : 
$$\mathbf{P}(Z \leq k) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \leq k)$$

2. Revenir au cas  $Z = k$  :

$[Z \leq k] = [Z = k] \cup [Z \leq k - 1]$ , événements incompatibles,

Donc  $\mathbf{P}(Z \leq k) = \mathbf{P}(Z = k) + \mathbf{P}(Z \leq k - 1)$ ,

et  $\mathbf{P}(Z = k) = \mathbf{P}(Z \leq k) - \mathbf{P}(Z \leq k - 1)$

## Exercice

Retrouver la loi de  $Z$  de l'exercice précédent.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes4.4. Suite de variables  
aléatoires

## ⇒ Indépendance de variables aléatoires

### 1. Problèmes

### 2. Variable aléatoire

### 3. Couples de variables aléatoires

### 4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires

4.3. Opération de variables aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables aléatoires

## ⇒ Indépendance de variables aléatoires

### 1. Problèmes

### 2. Variable aléatoire

### 3. Couples de variables aléatoires

### 4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

**4.4. Suite de variables  
aléatoires**

# Indépendance pour une suite

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Définition - Indépendance pour une suite de v.a.

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathbf{P})$ .  
 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de v.a. mutuellement indépendantes  
si, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement  
indépendantes.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

=> Indépendance de  
variables aléatoires

# Indépendance pour une suite

## Définition - Indépendance pour une suite de v.a.

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathbf{P})$ .  
 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de v.a. mutuellement indépendantes  
si, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement  
indépendantes.

Nous reviendrons plus loin sur cette notion de suite de variables  
aléatoires.

Elle est très importante en probabilité (et analyse) mais  
*relativement* hors programme.

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Indépendance

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Indépendance

- ▶  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si  $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  
 $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Indépendance

- ▶  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si  $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  
 $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$
- ▶ de manière équivalente : ssi  $\forall (A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants.

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Indépendance

- ▶  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si  $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  
 $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$
- ▶ de manière équivalente : ssi  $\forall (A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants.
- ▶ Lemme des coalition : Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors,  $\forall f$  et  $g$ , les v.a. ,  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Indépendance

- ▶  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si  $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  
 $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$
- ▶ de manière équivalente : ssi  $\forall (A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants.
- ▶ Lemme des coalition : Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors,  $\forall f$  et  $g$ , les v.a. ,  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.
- ▶ Indépendance mutuelle

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

# Conclusion

## Objectifs

### ⇒ Indépendance

- ▶  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si  $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  
 $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$
- ▶ de manière équivalente : ssi  $\forall (A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants.
- ▶ Lemme des coalition : Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors,  $\forall f$  et  $g$ , les v.a. ,  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.
- ▶ Indépendance mutuelle
- ▶ Lemme des coalitions généralisés.

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires

⇒ Indépendance de  
variables aléatoires

## Objectifs

⇒ Indépendance

## Pour le prochain cours

- ▶ Lecture : 5. Moments
- ▶ Exercice n°790 & 793
- ▶ TD mardi :  
N° 781, 782, 780, 784, 791, 794

1. Problèmes

2. Variable aléatoire

3. Couples de  
variables aléatoires

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux  
variables aléatoires

4.2. Indépendance de plusieurs  
variables aléatoires

4.3. Opération de variables  
aléatoires indépendantes

4.4. Suite de variables  
aléatoires