

⇒ Normes équivalentes et cie.

⇒ Topologie : ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Problème Suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}^p$

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Problème Suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}^p$

Problème Si la valeur absolue est remplacée par une norme. . .

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Problème Suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}^p$

Problème Si la valeur absolue est remplacée par une norme. . .

Problème Continuité et représentation de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Problème Dérivation de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$?

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Problème Dérivation de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$?

Problème Dérivation \Rightarrow continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Problème Dérivation de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$?

Problème Dérivation \Rightarrow continuité

Problème « Tout problème mathématique est le calcul d'un maximum »

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes équivalentes et cie.

⇒ Topologie : ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Heuristique. Pourquoi la topologie ?

Selon Wikipédia, l'étymologie du mot « topologie » (en grec *τοπολογία*) procède de l'association de deux noms grecs *τοπος* (topos, masculin) et *λογία* (logia, féminin) qui signifient respectivement « le lieu » et « l'étude ». Littéralement, topologie signifie l'« étude d'un lieu » ou « étude topique ».

Elle s'intéresse donc à définir ce qu'est un lieu (appelé aussi « espace ») et quelles peuvent en être les propriétés. Une ancienne dénomination fut *analysis situs*, c'est-à-dire « l'étude du lieu ».

La topologie est une branche des mathématiques concernant l'étude des déformations spatiales par des transformations continues (sans arrachages ni recollement des structures). La topologie s'intéresse plus précisément aux espaces topologiques et aux applications qui les lient, dites « continues ».

En analyse, grâce aux informations qu'elle fournit sur l'espace considéré, elle permet d'obtenir un certain nombre de résultats (existence ou unicité de solutions d'équations différentielles, notamment).

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Espace vectoriel normé

On se place dans des espaces vectoriels : on a besoin de pouvoir additionner les éléments (vecteurs) et les multiplier par des nombres.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Espace vectoriel normé

On se place dans des espaces vectoriels : on a besoin de pouvoir additionner les éléments (vecteurs) et les multiplier par des nombres.

Définition - Norme

Soit E , un \mathbb{K} e.v. (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

$N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est un norme si :

1. $\forall x \in E, N(x) \geq 0$
2. $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$
3. $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda \cdot x) = |\lambda|N(x)$
4. $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (I.T.)

Un *espace vectoriel* muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Espace vectoriel normé

On se place dans des espaces vectoriels : on a besoin de pouvoir additionner les éléments (vecteurs) et les multiplier par des nombres.

Définition - Norme

Soit E , un \mathbb{K} e.v. (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

$N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est un norme si :

1. $\forall x \in E, N(x) \geq 0$
2. $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$
3. $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda \cdot x) = |\lambda|N(x)$
4. $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (I.T.)

Un *espace vectoriel* muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé

Remarque Norme et produit scalaire

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Inégalité triangulaire

Savoir-faire. Renverser l'inégalité triangulaire

Dans beaucoup d'exercices, il faut utiliser l'inégalité triangulaire pour également minorer $d(x, y) = \|x - y\|$.

Comme $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$,

donc $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$, et de même $\|y - x\| \geq \|y\| - \|x\|$,

or $\|x - y\| = \|y - x\|$, donc

$$\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|$$

Rappelons que l'on a la majoration :

$$\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|$$

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Inégalité triangulaire

Savoir-faire. Renverser l'inégalité triangulaire

Dans beaucoup d'exercices, il faut utiliser l'inégalité triangulaire pour également minorer $d(x, y) = \|x - y\|$.

Comme $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$,

donc $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$, et de même $\|y - x\| \geq \|y\| - \|x\|$,

or $\|x - y\| = \|y - x\|$, donc

$$\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|$$

Rappelons que l'on a la majoration :

$$\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|$$

Remarque Notation

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Définition - Distance

Soit E un \mathbb{K} ev. $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ est un distance si :

1. $\forall x, y \in E, d(x, y) \geq 0$
2. $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
4. $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Un espace vectoriel muni d'une distance est appelé espace métrique.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Définition - Distance

Soit E un \mathbb{K} ev. $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une distance si :

1. $\forall x, y \in E, d(x, y) \geq 0$
2. $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
4. $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Un espace vectoriel muni d'une distance est appelé espace métrique.

Exercice

Montrer que si N est une norme sur E , alors $d : (x, y) \mapsto N(x - y)$ est une distance sur E

Exemple de normes (espaces vectoriels de dimension finie)

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Proposition - Exemple de normes de \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 ou \mathbb{K}^n

Considérons l'espace vectoriel \mathbb{K}^n .

Alors, Les applications suivantes en sont des normes

- ▶ $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- ▶ $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = \max_i (|x_i|)$
- ▶ $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Cette dernière norme dérive du produit scalaire

$$(x|y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Exemple de normes (espaces vectoriels de dimension finie)

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Proposition - Exemple de normes de \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 ou \mathbb{K}^n

Considérons l'espace vectoriel \mathbb{K}^n .

Alors, Les applications suivantes en sont des normes

- ▶ $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- ▶ $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = \max_i (|x_i|)$
- ▶ $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Cette dernière norme dérive du produit scalaire

$$(x|y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Il est important de savoir démontrer cela.

Démonstration

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Convergence dans E

On retrouve la même définition que pour la convergence de suites réelles, mais où la valeur absolue est remplacée par la norme.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Convergence dans E

On retrouve la même définition que pour la convergence de suites réelles, mais où la valeur absolue est remplacée par la norme.

Définition - Convergence d'un espace vectoriel normé

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

On dit que (x_n) converge vers x dans $(E, \|\cdot\|)$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \|x_n - x\| \leq \epsilon$$

Comme pour le cas réel : si la suite (x_n) converge, sa limite est unique, elle est notée $\lim(x_n)$.

On dit alors simplement que (x_n) est une suite convergente.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Définition - Convergence d'un espace vectoriel normé

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'élément de E .

On dit que (x_n) converge vers x dans $(E, \|\cdot\|)$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \|x_n - x\| \leq \epsilon$$

Comme pour le cas réel : si la suite (x_n) converge, sa limite est unique, elle est notée $\lim(x_n)$.

On dit alors simplement que (x_n) est une suite convergente.

Exercice

Montrer l'unicité de la limite

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Définition - Convergence d'un espace vectoriel normé

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

On dit que (x_n) converge vers x dans $(E, \|\cdot\|)$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \|x_n - x\| \leq \epsilon$$

Comme pour le cas réel : si la suite (x_n) converge, sa limite est unique, elle est notée $\lim(x_n)$.

On dit alors simplement que (x_n) est une suite convergente.

Exercice

Montrer l'unicité de la limite

Exercice Convergence de $\left(\begin{array}{cc} (1 + \frac{1}{n})^n & n \sin \frac{1}{n} \\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \arctan n \end{array} \right)$

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Attention. Résultat qui dépend de la norme

A priori ce résultat dépend de la norme considérée ! Ce qui est un vrai et grave problème, en particulier pour les suites (ou séries) de fonctions que vous verrez en seconde année.

Mais nous verrons plus loin que souvent ce problème se résout : il suffit que E soit de dimension finie

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Normes équivalentes

Heuristique. Une même limite pour deux normes différentes

Pour **un même espace vectoriel**, nous pouvons avoir **plusieurs normes** en présence.

Or celles-ci ont pour vocation de définir la limite de suite (en remplaçant la valeur absolue).

Est-il possible qu'une même suite de nombres de E converge vers des limites différentes, selon la norme considérée ?

Pour s'assurer que la limite est identique, il faut que pour deux normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$, on ait :

$$\begin{aligned} & \left(\forall \epsilon_1, \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_1, \|x_n - \ell\|_1 < \epsilon_1 \right) \implies \\ & \left(\forall \epsilon_2, \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_2, \|x_n - \ell\|_2 < \epsilon_2 \right) \\ & \text{et} \\ & \left(\forall \epsilon_2, \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_2, \|x_n - \ell\|_2 < \epsilon_1 \right) \implies \\ & \left(\forall \epsilon_1, \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_1, \|x_n - \ell\|_1 < \epsilon_2 \right) \end{aligned}$$

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Heuristique. Une même limite pour deux normes différentes

Pour cela il faut que $\|x_n - \ell\|_1$ soit petite en même temps que $\|x_n - \ell\|_2$, pour tout (x_n) et ℓ bien choisie.

Notre habitude pour démontrer une convergence est d'utiliser des majorations et minoration, il faut et il suffit ici que les normes soient comparables (majorer et minorer) avec de constante de proportionnalité :

$$\exists A, B \text{ tels que } \forall X \in E \quad \|X\|_1 \leq A \|X\|_2 \text{ et } \|X\|_2 \leq B \|X\|_1$$

Que l'on peut résumer en une formule

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Remarque Autre interprétation (visuelle).

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Remarque Autre interprétation (visuelle).

Proposition - Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel normé, muni de deux normes N et N' .

On dit que N et N' sont équivalentes si il existe a et b tel que :

$$\forall x \in E, \quad aN'(x) \leq N(x) \leq bN'(x).$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Remarque Autre interprétation (visuelle).

Proposition - Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel normé, muni de deux normes N et N' .

On dit que N et N' sont équivalentes si il existe a et b tel que :

$$\forall x \in E, \quad aN'(x) \leq N(x) \leq bN'(x).$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Exercice

Montrer que N' et N sont équivalentes si et seulement si :

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, (x_n) \rightarrow 0_E \text{ pour } N \Leftrightarrow (x_n) \rightarrow 0_E \text{ pour } N'.$$

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Notons que tout \mathbb{K} espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n . L'isomorphisme (réciproque) peut aisément transférer la norme. . .

Proposition - Equivalence des normes usuelles

Soit $E = \mathbb{K}^n$, un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Alors, pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty$.

Autrement écrit : les normes usuelles sont équivalentes.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Notons que tout \mathbb{K} espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n . L'isomorphisme (réciproque) peut aisément transférer la norme. . .

Proposition - Equivalence des normes usuelles

Soit $E = \mathbb{K}^n$, un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Alors, pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty$.

Autrement écrit : les normes usuelles sont équivalentes.

Démonstration

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Notons que tout \mathbb{K} espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n . L'isomorphisme (réciproque) peut aisément transférer la norme. . .

Proposition - Equivalence des normes usuelles

Soit $E = \mathbb{K}^n$, un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Alors, pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty$.

Autrement écrit : les normes usuelles sont équivalentes.

Démonstration

Exercice

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Ces normes sont équivalentes, est-ce un hasard ?

Non, le résultat suivant est très puissant, nous verrons une démonstration en fin de chapitre (en exploitant un autre résultat admis, non trivial lui aussi).

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Ces normes sont équivalentes, est-ce un hasard ?

Non, le résultat suivant est très puissant, nous verrons une démonstration en fin de chapitre (en exploitant un autre résultat admis, non trivial lui aussi).

Proposition - Norme équivalentes dans \mathbb{R}^2

Toutes les normes de \mathbb{R}^2 sont équivalentes.

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Ces normes sont équivalentes, est-ce un hasard ?

Non, le résultat suivant est très puissant, nous verrons une démonstration en fin de chapitre (en exploitant un autre résultat admis, non trivial lui aussi).

Proposition - Norme équivalentes dans \mathbb{R}^2

Toutes les normes de \mathbb{R}^2 sont équivalentes.

Démonstration

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Avec des boules

On raisonne parfois en terme de boules (pour élargir la notion d'intervalles) :

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Avec des boules

On raisonne parfois en terme de boules (pour élargir la notion d'intervalles) :

Définition - Boules ouvertes / fermées

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $x \in E$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle :

- boule ouverte de centre x et de rayon ρ , l'ensemble

$$B(x, \rho) = \{y \in E \mid \|x - y\| < \rho\}.$$

- boule fermé de centre x et de rayon ρ , l'ensemble

$$B_f(x, \rho) = \{y \in E \mid \|x - y\| \leq \rho\}$$

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Avec des boules

On raisonne parfois en terme de boules (pour élargir la notion d'intervalles) :

Définition - Boules ouvertes / fermées

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $x \in E$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle :

- boule ouverte de centre x et de rayon ρ , l'ensemble

$$B(x, \rho) = \{y \in E \mid \|x - y\| < \rho\}.$$

- boule fermé de centre x et de rayon ρ , l'ensemble

$$B_f(x, \rho) = \{y \in E \mid \|x - y\| \leq \rho\}$$

Proposition - Suite - en terme de boule

Dans $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé,
 $(x_n) \rightarrow x$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, x_n \in B_f(x, \epsilon)$$

$$(x_n) \rightarrow x \Leftrightarrow \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} B(x_n, \epsilon) = \{x\}$$

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes équivalentes et cie.

⇒ Topologie : ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans \mathbb{R} . Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans \mathbb{R} . Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition - Partie ouverte de E

Une partie Ω de E est dite ouverte si $\Omega = \emptyset$ ou si

$$\forall x \in \Omega, \exists \rho > 0 \text{ tel que } B(x, \rho) \subset \Omega$$

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans \mathbb{R} . Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition - Partie ouverte de E

Une partie Ω de E est dite ouverte si $\Omega = \emptyset$ ou si

$$\forall x \in \Omega, \exists \rho > 0 \text{ tel que } B(x, \rho) \subset \Omega$$

Exemple Sur \mathbb{R}

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans \mathbb{R} . Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition - Partie ouverte de E

Une partie Ω de E est dite ouverte si $\Omega = \emptyset$ ou si

$$\forall x \in \Omega, \exists \rho > 0 \text{ tel que } B(x, \rho) \subset \Omega$$

Exemple Sur \mathbb{R}

Exemple Sur \mathbb{R}^2

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans \mathbb{R} . Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition - Partie ouverte de E

Une partie Ω de E est dite ouverte si $\Omega = \emptyset$ ou si

$$\forall x \in \Omega, \exists \rho > 0 \text{ tel que } B(x, \rho) \subset \Omega$$

Exemple Sur \mathbb{R}

Exemple Sur \mathbb{R}^2

Savoir-faire. Montrer qu'une partie est un ouvert. Avec des voisinages i

Pour montrer que O est ouvert, en règle générale on exploite directement la définition et donc des voisinages.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Ouverts et fermés

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans \mathbb{R} . Dans toute la suite, $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition - Partie ouverte de E

Une partie Ω de E est dite ouverte si $\Omega = \emptyset$ ou si

$$\forall x \in \Omega, \exists \rho > 0 \text{ tel que } B(x, \rho) \subset \Omega$$

Exemple Sur \mathbb{R}

Exemple Sur \mathbb{R}^2

Savoir-faire. Montrer qu'une partie est un ouvert. Avec des voisinages i

Pour montrer que O est ouvert, en règle générale on exploite directement la définition et donc des voisinages.

Exercice

Montrer que $A :=]0, 1[\times]0, 1[$ n'est pas une partie ouverte de \mathbb{R}^2

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Proposition - Stabilité d'ouverts

Les parties \emptyset et E sont des ouverts de E .

Une réunion d'ouverts est un ouvert.

Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Proposition - Stabilité d'ouverts

Les parties \emptyset et E sont des ouverts de E .

Une réunion d'ouverts est un ouvert.

Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

Attention - Ce n'est pas le cas d'une intersection infinie
dénombrable d'ouverts

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$, qui n'est pas ouvert

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Proposition - Stabilité d'ouverts

Les parties \emptyset et E sont des ouverts de E .

Une réunion d'ouverts est un ouvert.

Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

Attention - Ce n'est pas le cas d'une intersection infinie
dénombrable d'ouverts

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$, qui n'est pas ouvert

Démonstration

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Définition -Partie fermée de E

Une partie F de E est dite fermée si $F = \emptyset$ ou si $E \setminus F$ est un ouvert de E

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Définition -Partie fermée de E

Une partie F de E est dite fermée si $F = \emptyset$ ou si $E \setminus F$ est un ouvert de E

Exemple Sur \mathbb{R} . Sur E

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

Définition -Partie fermée de E

Une partie F de E est dite fermée si $F = \emptyset$ ou si $E \setminus F$ est un ouvert de E

Exemple Sur \mathbb{R} . Sur E

Exercice

Montrer que $B = B_f(\alpha, r)$ est un fermé de E . On peut s'aide d'un dessin !

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

**2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé**

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

Proposition -Stabilité de fermés

Les parties \emptyset et E sont des fermés de E .

Une intersection de fermés est un fermé.

Une réunion finie de fermé est un fermé

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

Proposition -Stabilité de fermés

Les parties \emptyset et E sont des fermés de E .

Une intersection de fermés est un fermé.

Une réunion finie de fermé est un fermé

Exercice

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

Proposition -Stabilité de fermés

Les parties \emptyset et E sont des fermés de E .

Une intersection de fermés est un fermé.

Une réunion finie de fermé est un fermé

Exercice

Attention. Faux pour une réunion infinie dénombrable de fermés

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[=]0, 1[$, qui n'est pas fermé

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Proposition - Caractérisation des fermés

F est un fermé de E

ssi pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ de F , convergente, on a
 $\lim(x_n) \in F$

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Proposition - Caractérisation des fermés

F est un fermé de E

ssi pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ de F , convergente, on a
 $\lim(x_n) \in F$

Démonstration

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Proposition - Caractérisation des fermés

F est un fermé de E

ssi pour toute suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ de F , convergente, on a
 $\lim(x_n) \in F$

Démonstration

Savoir-faire. Montrer qu'une partie est un fermé. Avec des suites !

Pour montrer que F est fermé, en règle générale on exploite des suites convergentes à limite assurément dans F .

Exemple : montrer qu'un sev de dimension finie est fermé (à l'aide d'une écriture sur une base).

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes équivalentes et cie.

⇒ Topologie : ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Heuristique. Dans \mathbb{R}_+^2

L'ensemble $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y < 1\}$ est-il ouvert ou fermé ? Cela semble compliqué.

Dans \mathbb{R}^2 , $(0, 0) \in \mathbb{R}_+$, mais il n'existe aucune boule centré en $(0, 0)$ contenu dans S (quel que soit la norme).

Et en même temps $(1, 0) \in \overline{S}$ mais il n'existe aucune boule centré en $(1, 0)$ contenu dans \overline{S} .

Dans \mathbb{R}^2 , S n'est ni ouvert, ni fermé.

Mais ce n'est pas le cas si l'on regarde QUE dans \mathbb{R}_+^2 . En effet, dans ce cas, la boule ouverte (euclidienne) centré en $(0, 0)$ de rayon $r = \frac{1}{10}$ n'a que des éléments dans S , puisqu'également nécessairement dans \mathbb{R}_+^2 .

Donc dans \mathbb{R}^2 , S est ouvert.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si E est l'espace vectoriel normé et A est une partie de E , alors

1. on dit que U est un ouvert relatif à A , si :

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \epsilon) \cap A \subset U.$$

2. on dit que V est un fermé relatif à A , si :

$$A \setminus V \text{ est un ouvert relatif de } A.$$

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si E est l'espace vectoriel normé et A est une partie de E , alors

1. on dit que U est un ouvert relatif à A , si :

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \epsilon) \cap A \subset U.$$

2. on dit que V est un fermé relatif à A , si :

$$A \setminus V \text{ est un ouvert relatif de } A.$$

Exemple Ouvert relatif non ouvert

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si E est l'espace vectoriel normé et A est une partie de E , alors

1. on dit que U est un ouvert relatif à A , si :

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \epsilon) \cap A \subset U.$$

2. on dit que V est un fermé relatif à A , si :

$$A \setminus V \text{ est un ouvert relatif de } A.$$

Exemple Ouvert relatif non ouvert

Proposition - Caractérisations rapides

Soit A une partie de E . On a alors les caractéristiques importantes :

- U est un ouvert relatif de A si et seulement si il existe O ouvert de E tel que $U = O \cap A$.
- V est un fermé relatif de A si et seulement si il existe F fermé de E tel que $V = F \cap A$.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si E est l'espace vectoriel normé et A est une partie de E , alors

1. on dit que U est un ouvert relatif à A , si :

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \epsilon) \cap A \subset U.$$

2. on dit que V est un fermé relatif à A , si :

$$A \setminus V \text{ est un ouvert relatif de } A.$$

Exemple Ouvert relatif non ouvert

Proposition - Caractérisations rapides

Soit A une partie de E . On a alors les caractéristiques importantes :

- U est un ouvert relatif de A si et seulement si il existe O ouvert de E tel que $U = O \cap A$.
- V est un fermé relatif de A si et seulement si il existe F fermé de E tel que $V = F \cap A$.

Démonstration

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes équivalentes et cie.

⇒ Topologie : ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Définition - Compact (Bolzano-Weierstrass)

On dit qu'un ensemble $K \subset E$ est compact,
si pour toute suite d'éléments de E , on peut extraire une suite
convergente dans E .

Formellement : $\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \exists x \in E, \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow \nearrow$ tel que
 $(x_{\varphi(n)}) \rightarrow x$.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Définition - Compact (Bolzano-Weierstrass)

On dit qu'un ensemble $K \subset E$ est compact,
si pour toute suite d'éléments de E , on peut extraire une suite
convergente dans E .

Formellement : $\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \exists x \in E, \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow \nearrow$ tel que
 $(x_{\varphi(n)}) \rightarrow x$.

On a une caractérisation simple des compacts de \mathbb{R}^n .

Proposition - Compact de \mathbb{R}^n

Les compacts de \mathbb{R}^n sont exactement les parties fermées et
bornées de \mathbb{R}^n .

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Définition - Compact (Bolzano-Weierstrass)

On dit qu'un ensemble $K \subset E$ est compact,
si pour toute suite d'éléments de E , on peut extraire une suite
convergente dans E .

Formellement : $\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \exists x \in E, \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow \nearrow$ tel que
 $(x_{\varphi(n)}) \rightarrow x$.

On a une caractérisation simple des compacts de \mathbb{R}^n .

Proposition - Compact de \mathbb{R}^n

Les compacts de \mathbb{R}^n sont exactement les parties fermées et
bornées de \mathbb{R}^n .

Démonstration

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

On a une propriété essentielle, comparable au lemme de Cousin :

Théorème - Caractérisation de Borel-Lebesgue

Soit E un espace normé. Soit $K \subset E$.

K est compact ssi pour toute famille d'ouverts recouvrant K , on peut en extraire un recouvrement fini.

Formellement : $\forall (O_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$ telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, $\exists J \subset I$

fini tel que $K \subset \bigcup_{j \in J} O_j$

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

On a une propriété essentielle, comparable au lemme de Cousin :

Théorème - Caractérisation de Borel-Lebesgue

Soit E un espace normé. Soit $K \subset E$.

K est compact ssi pour toute famille d'ouverts recouvrant K , on peut en extraire un recouvrement fini.

Formellement : $\forall (O_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$ telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, $\exists J \subset I$

fini tel que $K \subset \bigcup_{j \in J} O_j$

Exercice

A-t-on le lemme de Cousin en toute dimension ?

Si K est compact, est-ce que pour tout $\delta : K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, il existe

$N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_N \in K$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2})$?

où $B(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2})$ est la boule ouverte de centre x_i et de rayon $\frac{\delta(x_i)}{2}$.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

On propose la démonstration avec un exercice (et beaucoup de raisonnement par l'absurde).

Corrigé en TD (les deux groupes) Exercice

1. On considère K un compact de E .

1.1 Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et

$$x_1, \dots, x_N \in K \text{ tel que } K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon).$$

On dit que K est précompact

1.2 Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement de K par des ouverts.

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tels que $\forall x \in K, \exists i \in I$ tel que $B(x, \alpha) \subset O_i$.

1.3 En déduire le sens direct du théorème.

2. On suppose que K vérifie la propriété d'extraction finie de recouvrement (dite de Borel-Lebesgue).

2.1 On considère une suite (F_n) décroissante de fermés non vide de K . Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

2.2 En déduire la réciproque du théorème.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Conclusion

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Conclusion

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

- ▶ Les définitions de la continuité, convergence... nécessite une mesure de distance :
 - ⇒ Etude dans les espaces vectoriels normés

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Conclusion

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

- ▶ Les définitions de la continuité, convergence... nécessitent une mesure de distance :
⇒ Etude dans les espaces vectoriels normés
- ▶ Nécessité de l'équivalence des normes :
 $\exists a, b \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E, aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

- ▶ Les définitions de la continuité, convergence... nécessite une mesure de distance :
⇒ Etude dans les espaces vectoriels normés
- ▶ Nécessité de l'équivalence des normes :
 $\exists a, b \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E, aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_2(x)$.
- ▶ Dans \mathbb{R}^2 (et \mathbb{R}^n généralement), toutes les normes sont équivalentes

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Conclusion

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Conclusion

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Conclusion

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Conclusion

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

Objectifs

⇒ Normes équivalentes et cie.

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture : 2. Topologie (fin)
3. Continuité
- ▶ Exercice du cours : N°859
- ▶ TD de jeudi :
8h-10h : 783, 785, 792, 794, 860, 861, 867 exercice
Caractérisation Borel-Lebesgue,
10h-12 : 786, 789, 795, 860, 862, 868 exercice
Caractérisation Borel-Lebesgue,

⇒ Normes

⇒ Topologie :
ouverts, fermés

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts