



⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

- 3.1. Limite
- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans  $\mathbb{R}$ . Dans toute la suite,  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

**2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé**

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans  $\mathbb{R}$ . Dans toute la suite,  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

## Définition - Partie ouverte de $E$

Une partie  $\Omega$  de  $E$  est dite ouverte si  $\Omega = \emptyset$  ou si

$$\forall x \in \Omega, \exists \rho > 0 \text{ tel que } B(x, \rho) \subset \Omega$$

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Proposition - Stabilité d'ouverts

Les parties  $\emptyset$  et  $E$  sont des ouverts de  $E$ .

Une réunion d'ouverts est un ouvert.

Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Proposition - Stabilité d'ouverts

Les parties  $\emptyset$  et  $E$  sont des ouverts de  $E$ .

Une réunion d'ouverts est un ouvert.

Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

Attention - Ce n'est pas le cas d'une intersection infinie dénombrable d'ouverts

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^* ]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[ = \{0\}$ , qui n'est pas ouvert

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Définition -Partie fermée de $E$

Une partie  $F$  de  $E$  est dite fermée si  $F = \emptyset$  ou si  $E \setminus F$  est un ouvert de  $E$

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Définition -Partie fermée de $E$

Une partie  $F$  de  $E$  est dite fermée si  $F = \emptyset$  ou si  $E \setminus F$  est un ouvert de  $E$

**Exemple** Sur  $\mathbb{R}$ . Sur  $E$

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Définition -Partie fermée de $E$

Une partie  $F$  de  $E$  est dite fermée si  $F = \emptyset$  ou si  $E \setminus F$  est un ouvert de  $E$

**Exemple** Sur  $\mathbb{R}$ . Sur  $E$

### Exercice

Montrer que  $B = B_f(\alpha, r)$  est un fermé de  $E$ . On peut s'aide d'un dessin !

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

**2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé**

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

## Proposition -Stabilité de fermés

Les parties  $\emptyset$  et  $E$  sont des fermés de  $E$ .

Une intersection de fermés est un fermé.

Une réunion finie de fermé est un fermé

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

## Proposition -Stabilité de fermés

Les parties  $\emptyset$  et  $E$  sont des fermés de  $E$ .

Une intersection de fermés est un fermé.

Une réunion finie de fermé est un fermé

## Exercice

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

## Proposition -Stabilité de fermés

Les parties  $\emptyset$  et  $E$  sont des fermés de  $E$ .

Une intersection de fermés est un fermé.

Une réunion finie de fermé est un fermé

## Exercice

**Attention. Faux pour une réunion infinie dénombrable de fermés**

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[ \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] = ]0, 1[$ , qui n'est pas fermé

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Proposition - Caractérisation des fermés

$F$  est un fermé de  $E$

ssi pour toute suite  $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$  de  $F$ , convergente, on a  $\lim(x_n) \in F$

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Proposition - Caractérisation des fermés

$F$  est un fermé de  $E$

ssi pour toute suite  $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$  de  $F$ , convergente, on a  $\lim(x_n) \in F$

## Démonstration

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

**2.3. Topologie relative (induite)**

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

**2.3. Topologie relative (induite)**

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Heuristique. Dans $\mathbb{R}_+^2$

L'ensemble  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y < 1\}$  est-il ouvert ou fermé ? Cela semble compliqué.

Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $(0, 0) \in \mathbb{R}_+$ , mais il n'existe aucune boule centré en  $(0, 0)$  contenu dans  $S$  (quel que soit la norme).

Et en même temps  $(1, 0) \in \overline{S}$  mais il n'existe aucune boule centré en  $(1, 0)$  contenu dans  $\overline{S}$ .

Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $S$  n'est ni ouvert, ni fermé.

Mais ce n'est pas le cas si l'on regarde QUE dans  $\mathbb{R}_+^2$ . En effet, dans ce cas, la boule ouverte (euclidienne) centré en  $(0, 0)$  de rayon  $r = \frac{1}{10}$  n'a que des éléments dans  $S$ , puisqu'également nécessairement dans  $\mathbb{R}_+^2$ .

Donc dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $S$  est ouvert.

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si  $E$  est l'espace vectoriel normé et  $A$  est une partie de  $E$ , alors

1. on dit que  $U$  est un ouvert relatif à  $A$ , si :

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \epsilon) \cap A \subset U.$$

2. on dit que  $V$  est un fermé relatif à  $A$ , si :

$$A \setminus V \text{ est un ouvert relatif de } A.$$

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si  $E$  est l'espace vectoriel normé et  $A$  est une partie de  $E$ , alors

1. on dit que  $U$  est un ouvert relatif à  $A$ , si :

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \epsilon) \cap A \subset U.$$

2. on dit que  $V$  est un fermé relatif à  $A$ , si :

$$A \setminus V \text{ est un ouvert relatif de } A.$$

**Exemple** Ouvert relatif non ouvert

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si  $E$  est l'espace vectoriel normé et  $A$  est une partie de  $E$ , alors

1. on dit que  $U$  est un ouvert relatif à  $A$ , si :

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \epsilon) \cap A \subset U.$$

2. on dit que  $V$  est un fermé relatif à  $A$ , si :

$$A \setminus V \text{ est un ouvert relatif de } A.$$

**Exemple** Ouvert relatif non ouvert

## Proposition - Caractérisations rapides

Soit  $A$  une partie de  $E$ . On a alors les caractéristiques importantes :

- $U$  est un ouvert relatif de  $A$  si et seulement si il existe  $O$  ouvert de  $E$  tel que  $U = O \cap A$ .
- $V$  est un fermé relatif de  $A$  si et seulement si il existe  $F$  fermé de  $E$  tel que  $V = F \cap A$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si  $E$  est l'espace vectoriel normé et  $A$  est une partie de  $E$ , alors

1. on dit que  $U$  est un ouvert relatif à  $A$ , si :

$$\forall x \in U, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } B(x, \epsilon) \cap A \subset U.$$

2. on dit que  $V$  est un fermé relatif à  $A$ , si :

$$A \setminus V \text{ est un ouvert relatif de } A.$$

**Exemple** Ouvert relatif non ouvert

## Proposition - Caractérisations rapides

Soit  $A$  une partie de  $E$ . On a alors les caractéristiques importantes :

- $U$  est un ouvert relatif de  $A$  si et seulement si il existe  $O$  ouvert de  $E$  tel que  $U = O \cap A$ .
- $V$  est un fermé relatif de  $A$  si et seulement si il existe  $F$  fermé de  $E$  tel que  $V = F \cap A$ .

**Démonstration**

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

**2.4. Compacts**

2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

**2.4. Compacts**

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Définition - Compact (Bolzano-Weierstrass)

On dit qu'un ensemble  $K \subset E$  est compact,  
si pour toute suite d'éléments de  $E$ , on peut extraire une suite  
convergente dans  $E$ .

Formellement :  $\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \exists x \in E, \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow \nearrow$  tel que  
 $(x_{\varphi(n)}) \rightarrow x$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Définition - Compact (Bolzano-Weierstrass)

On dit qu'un ensemble  $K \subset E$  est compact,  
si pour toute suite d'éléments de  $E$ , on peut extraire une suite  
convergente dans  $E$ .

Formellement :  $\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \exists x \in E, \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow \nearrow$  tel que  
 $(x_{\varphi(n)}) \rightarrow x$ .

On a une caractérisation simple des compacts de  $\mathbb{R}^n$ .

## Proposition - Compact de $\mathbb{R}^n$

Les compacts de  $\mathbb{R}^n$  sont exactement les parties fermées et  
bornées de  $\mathbb{R}^n$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel  
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un  
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou  
non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications  
continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Définition - Compact (Bolzano-Weierstrass)

On dit qu'un ensemble  $K \subset E$  est compact,  
si pour toute suite d'éléments de  $E$ , on peut extraire une suite  
convergente dans  $E$ .

Formellement :  $\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, \exists x \in E, \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow \nearrow$  tel que  
 $(x_{\varphi(n)}) \rightarrow x$ .

On a une caractérisation simple des compacts de  $\mathbb{R}^n$ .

## Proposition - Compact de $\mathbb{R}^n$

Les compacts de  $\mathbb{R}^n$  sont exactement les parties fermées et  
bornées de  $\mathbb{R}^n$ .

## Démonstration

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel  
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un  
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou  
non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications  
continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

On a une propriété essentielle, comparable au lemme de Cousin :

## Théorème - Caractérisation de Borel-Lebesgue

Soit  $E$  un espace normé. Soit  $K \subset E$ .

$K$  est compact ssi pour toute famille d'ouverts recouvrant  $K$ , on peut en extraire un recouvrement fini.

Formellement :  $\forall (O_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$  telle que  $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ ,  $\exists J \subset I$

**fini** tel que  $K \subset \bigcup_{j \in J} O_j$

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

On a une propriété essentielle, comparable au lemme de Cousin :

## Théorème - Caractérisation de Borel-Lebesgue

Soit  $E$  un espace normé. Soit  $K \subset E$ .

$K$  est compact ssi pour toute famille d'ouverts recouvrant  $K$ , on peut en extraire un recouvrement fini.

Formellement :  $\forall (O_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$  telle que  $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ ,  $\exists J \subset I$

**fini** tel que  $K \subset \bigcup_{j \in J} O_j$

### Exercice

A-t-on le lemme de Cousin en toute dimension ?

Si  $K$  est compact, est-ce que pour tout  $\delta : K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , il existe

$N \in \mathbb{N}$  et  $x_1, \dots, x_N \in K$  tel que  $K \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2})$  ?

où  $B(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2})$  est la boule ouverte de centre  $x_i$  et de rayon  $\frac{\delta(x_i)}{2}$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Démonstration

On propose la démonstration avec un exercice (et beaucoup de raisonnement par l'absurde).

Corrigé en TD (les deux groupes) Exercice

1. On considère  $K$  un compact de  $E$ .

1.1 Montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  et

$$x_1, \dots, x_N \in K \text{ tel que } K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon).$$

On dit que  $K$  est précompact

1.2 Soit  $(O_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $K$  par des ouverts.

Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tels que  $\forall x \in K, \exists i \in I$  tel que  $B(x, \alpha) \subset O_i$ .

1.3 En déduire le sens direct du théorème.

2. On suppose que  $K$  vérifie la propriété d'extraction finie de recouvrement (dite de Borel-Lebesgue).

2.1 On considère une suite  $(F_n)$  décroissante de fermés non vide de  $K$ . Montrer que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ .

2.2 En déduire la réciproque du théorème.

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

- 3.1. Limite
- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

- 3.1. Limite
- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

**Remarque** Cas « pathologique »...

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

**2.5. Adhérences et intérieurs**

## 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

**Remarque** Cas « pathologique »...

## Définition - Adhérence

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

On note

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, \exists a \in A \mid \|x - a\| < \epsilon\} = \bigcap_{\epsilon > 0} \left( \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon) \right)$$

Alors  $A \subset \overline{A}$ .  $\overline{A}$  est un fermé.

En fait,  $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$ , où  $\mathcal{F}_A$  est l'ensemble de tous les fermés contenant  $A$ .

C'est une borne supérieure :  $\overline{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .

En particulier  $A$  est fermé si et seulement si  $\overline{A} = A$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

**Remarque** Cas « pathologique »...

## Définition - Adhérence

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

On note

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, \exists a \in A \mid \|x - a\| < \epsilon\} = \bigcap_{\epsilon > 0} \left( \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon) \right)$$

Alors  $A \subset \overline{A}$ .  $\overline{A}$  est un fermé.

En fait,  $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$ , où  $\mathcal{F}_A$  est l'ensemble de tous les fermés contenant  $A$ .

C'est une borne supérieure :  $\overline{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .

En particulier  $A$  est fermé si et seulement si  $\overline{A} = A$ .

## Démonstration

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Savoir-faire. Caractérisation de $x \in \overline{A}$

Soit  $A$  une partie quelconque de  $E$ . Un élément  $x \in \overline{A}$  si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- i)  $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A$  tel que  $\|x - a\| < \epsilon$
- ii)  $\forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$
- iv)  $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$  tel que  $\lim(x_n) = x$ .
- iii)  $d(x, A) = 0$

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Savoir-faire. Caractérisation de $x \in \overline{A}$

Soit  $A$  une partie quelconque de  $E$ . Un élément  $x \in \overline{A}$  si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- i)  $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A$  tel que  $\|x - a\| < \epsilon$
- ii)  $\forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$
- iv)  $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$  tel que  $\lim(x_n) = x$ .
- iii)  $d(x, A) = 0$

## Exercice

Montrer que ces assertions sont équivalentes et signifie bien que  $x \in \overline{A}$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Savoir-faire. Caractérisation de $x \in \overline{A}$

Soit  $A$  une partie quelconque de  $E$ . Un élément  $x \in \overline{A}$  si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- i)  $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A$  tel que  $\|x - a\| < \epsilon$
- ii)  $\forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$
- iv)  $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$  tel que  $\lim(x_n) = x$ .
- iii)  $d(x, A) = 0$

## Exercice

Montrer que ces assertions sont équivalentes et signifie bien que  $x \in \overline{A}$ .

## Définition - Partie dense

Une partie  $A$  est dite dense dans  $E$  si  $\overline{A} = E$

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Définition - Intérieur

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

On note :  $A^o = \{x \in E \mid \exists \epsilon > 0, \forall a : \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow a \in A\}$

Alors  $A^o \subset A$ .  $A^o$  est un ouvert.

En fait,  $A^o = \bigcup_{O \in \mathcal{O}_A} O$ , où  $\mathcal{O}_A$  est l'ensemble de tous les ouverts

de  $A$ .

C'est une borne inférieure :  $A^o$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ . En particulier  $A$  est ouvert si et seulement si  $A^o = A$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Intérieur

## Définition - Intérieur

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

On note :  $A^\circ = \{x \in E \mid \exists \epsilon > 0, \forall a : \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow a \in A\}$

Alors  $A^\circ \subset A$ .  $A^\circ$  est un ouvert.

En fait,  $A^\circ = \bigcup_{O \in \mathcal{O}_A} O$ , où  $\mathcal{O}_A$  est l'ensemble de tous les ouverts

de  $A$ .

C'est une borne inférieure :  $A^\circ$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ . En particulier  $A$  est ouvert si et seulement si  $A^\circ = A$ .

## Savoir-faire. Caractérisation de $x \in A^\circ$

Soit  $A$  une partie quelconque de  $E$ . Un élément  $x \in A^\circ$  si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- i)  $A$  est un voisinage de  $x$
- ii)  $\exists \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \subset A$

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Intérieur

## Définition - Intérieur

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

On note :  $A^\circ = \{x \in E \mid \exists \epsilon > 0, \forall a : \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow a \in A\}$

Alors  $A^\circ \subset A$ .  $A^\circ$  est un ouvert.

En fait,  $A^\circ = \bigcup_{O \in \mathcal{O}_A} O$ , où  $\mathcal{O}_A$  est l'ensemble de tous les ouverts

de  $A$ .

C'est une borne inférieure :  $A^\circ$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ . En particulier  $A$  est ouvert si et seulement si  $A^\circ = A$ .

## Savoir-faire. Caractérisation de $x \in A^\circ$

Soit  $A$  une partie quelconque de  $E$ . Un élément  $x \in A^\circ$  si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- i)  $A$  est un voisinage de  $x$
- ii)  $\exists \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \subset A$

## Démonstration

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

- 3.1. Limite
- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

# Limite en un point

## Définition - Limite (et continuité)

Soit  $f : E \rightarrow F$ , une application entre deux espaces vectoriels normés.

On dit que  $f$  admet en  $x_0 \in E$ , une limite égale à  $f(x_0)$  si l'une des propriétés suivantes (équivalentes) est vérifiée :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in E, \|x - x_0\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid f(B(x_0, \eta)) \subset B(f(x_0), \epsilon)$$

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} \text{ telle que } (x_n) \rightarrow x, \quad (f(x_n)) \rightarrow f(x)$$

On note alors  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

#### 3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Limite en un point

## Définition - Limite (et continuité)

Soit  $f : E \rightarrow F$ , une application entre deux espaces vectoriels normés.

On dit que  $f$  admet en  $x_0 \in E$ , une limite égale à  $f(x_0)$  si l'une des propriétés suivantes (équivalentes) est vérifiée :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in E, \|x - x_0\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid f(B(x_0, \eta)) \subset B(f(x_0), \epsilon)$$

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} \text{ telle que } (x_n) \rightarrow x, \quad (f(x_n)) \rightarrow f(x)$$

On note alors  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Il faudrait montrer l'équivalence entre ces définitions. La première et la seconde sont évidemment semblables, il s'agit juste d'une réécriture en terme de boules (les implications et les inégalités deviennent des inclusions).

Nous étudierons l'équivalence avec la troisième définition dans la

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Définition - Continuité en un point

Avec les notations précédentes, et si  $f$  admet une limite au point  $a$ , on dit que :

- ▶  $f$  est continue en  $a$  si  $a \in A$  et que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- ▶  $f$  se prolonge par continuité en  $a$  si  $a \notin A$  mais  $a$  est adhérent à  $A$ .  
on définit alors  $f(a) := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

#### 3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Définition - Continuité en un point

Avec les notations précédentes, et si  $f$  admet une limite au point  $a$ , on dit que :

- ▶  $f$  est continue en  $a$  si  $a \in A$  et que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- ▶  $f$  se prolonge par continuité en  $a$  si  $a \notin A$  mais  $a$  est adhérent à  $A$ .  
on définit alors  $f(a) := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

## Définition - Continuité sur une partie

On dit que  $f$  est continue sur une partie  $A$  de  $E$ , si  $f$  est continue en tout  $a \in A$

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Définition - Continuité en un point

Avec les notations précédentes, et si  $f$  admet une limite au point  $a$ , on dit que :

- ▶  $f$  est continue en  $a$  si  $a \in A$  et que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- ▶  $f$  se prolonge par continuité en  $a$  si  $a \notin A$  mais  $a$  est adhérent à  $A$ .  
on définit alors  $f(a) := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

## Définition - Continuité sur une partie

On dit que  $f$  est continue sur une partie  $A$  de  $E$ , si  $f$  est continue en tout  $a \in A$

**Remarque** Indépendance par rapport à la norme

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## **Exemples** Exemples

Les applications linéaires (en dimension finie), les applications polynomiales (algèbre ?), les normes, les applications bilinéaires (en dimension finie) sont continues.

La composition de deux fonctions continues est continue.

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

#### 3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Exemples Exemples

Les applications linéaires (en dimension finie), les applications polynomiales (algèbre ?), les normes, les applications bilinéaires (en dimension finie) sont continues.

La composition de deux fonctions continues est continue.

### Exercice

La fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$  est-elle continue sur  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  ?

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Proposition - Caractérisation séquentielle

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie, normés. Supposons que  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est base de  $F$ . Soit  $A$  une partie de  $E$ . Soit  $a$  un point adhérent de  $A$

Soit  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ . Soit  $b = \sum_{i=1}^p b_i e_i \in F$ .

On suppose que  $f = \sum_{i=1}^p f_i e_i$ .

Alors :  $f$  admet  $b$  comme limite au point  $a$ ,  
si et seulement si,  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $f_i$  admet  $b_i$  comme limite au point  $a$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

#### 3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Proposition - Caractérisation séquentielle

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie, normés. Supposons que  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est base de  $F$ . Soit  $A$  une partie de  $E$ . Soit  $a$  un point adhérent de  $A$

Soit  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ . Soit  $b = \sum_{i=1}^p b_i e_i \in F$ .

On suppose que  $f = \sum_{i=1}^p f_i e_i$ .

Alors :  $f$  admet  $b$  comme limite au point  $a$ ,  
si et seulement si,  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $f_i$  admet  $b_i$  comme limite au point  $a$ .

## Démonstration

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

#### 3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Proposition - Caractérisation séquentielle

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie, normés. Supposons que  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est base de  $F$ . Soit  $A$  une partie de  $E$ . Soit  $a$  un point adhérent de  $A$

Soit  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ . Soit  $b = \sum_{i=1}^p b_i e_i \in F$ .

On suppose que  $f = \sum_{i=1}^p f_i e_i$ .

Alors :  $f$  admet  $b$  comme limite au point  $a$ ,  
si et seulement si,  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $f_i$  admet  $b_i$  comme limite au point  $a$ .

## Démonstration

On ne s'intéressera maintenant qu'aux situations où  $\underline{F} = \mathbb{R}$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Continuité et topologie

La continuité est la meilleure façon de transformer des fermés en fermés, des ouverts en ouverts. . . : d'étudier les topologies d'ensembles.

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

### 3.1. Limite

- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

# Continuité et topologie

La continuité est la meilleure façon de transformer des fermés en fermés, des ouverts en ouverts. . . : d'étudier les topologies d'ensembles.

## Proposition - Image réciproque

Soit  $f : E \rightarrow F$ , continue, alors :

- ▶ si  $B \subset F$  est ouvert, alors  $f^{-1}(B)$  est un ouvert.
- ▶ si  $B \subset F$  est fermé, alors  $f^{-1}(B)$  est un fermé.

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

#### 3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Proposition - Image réciproque

Soit  $f : E \rightarrow F$ , continue, alors :

- ▶ si  $B \subset F$  est ouvert, alors  $f^{-1}(B)$  est un ouvert.
- ▶ si  $B \subset F$  est fermé, alors  $f^{-1}(B)$  est un fermé.

## Attention. Image directe ?

Ce résultat est vraie pour les images réciproque, mais pas les images directes.

On a par ailleurs une équivalence :  $f$  est continue, si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de  $F$  est un ouvert (resp. fermé) de  $E$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Proposition - Image réciproque

Soit  $f : E \rightarrow F$ , continue, alors :

- ▶ si  $B \subset F$  est ouvert, alors  $f^{-1}(B)$  est un ouvert.
- ▶ si  $B \subset F$  est fermé, alors  $f^{-1}(B)$  est un fermé.

## Attention. Image directe ?

Ce résultat est vraie pour les images réciproque, mais pas les images directes.

On a par ailleurs une équivalence :  $f$  est continue, si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de  $F$  est un ouvert (resp. fermé) de  $E$ .

## Démonstration

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Exercice

Soit  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid \frac{x + y}{x^2 + y^2} > 1\}$ .  $B$  est-il ouvert ?

Soit  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid \frac{x + y}{x^2 + y^2} \geq 1\}$ .  $C$  est-il ouvert ?  
fermé ?

### 1. Problèmes

#### 2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

#### 3. Continuité

##### 3.1. Limite

- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Exercice

Soit  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid \frac{x + y}{x^2 + y^2} > 1\}$ .  $B$  est-il ouvert ?

Soit  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid \frac{x + y}{x^2 + y^2} \geq 1\}$ .  $C$  est-il ouvert ?  
fermé ?

**Remarque** Contournement du problème

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

- 3.1. Limite
- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites**
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

**3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites**

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Proposition - Caractérisation séquentielle

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie, normés.

Soit  $A$  une partie de  $E$ . Soit  $a$  un point adhérent de  $A$

Soit  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ . Soit  $b \in F$ .

Alors :  $f$  admet  $b$  comme limite au point  $a$ ,  
si et seulement si,  $\forall (x_n) \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b$ .

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Proposition - Caractérisation séquentielle

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie, normés.

Soit  $A$  une partie de  $E$ . Soit  $a$  un point adhérent de  $A$

Soit  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ . Soit  $b \in F$ .

Alors :  $f$  admet  $b$  comme limite au point  $a$ ,  
si et seulement si,  $\forall (x_n) \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b$ .

## Démonstration

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Savoir-faire. Un bon critère de non continuité

Si une fonction est telle que  $f(u_n)$  et  $f(v_n)$  admettent deux limites différentes alors que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont même limite, c'est qu'elle n'est pas continue.

Ainsi avec  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , on a :

▶ avec  $(u_n) = (\frac{1}{n}, 0)$  qui converge vers  $(0, 0)$ ,  $f(u_n) = 0$  qui converge vers 0.

▶ avec  $(v_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  qui converge vers  $(0, 0)$ ,

$$f(v_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \text{ qui converge vers } \frac{1}{2}.$$

Donc  $f$  ne peut pas être continue en 0.

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Savoir-faire. Un bon critère de non continuité

Une autre méthode qui marche souvent est d'étudier le terme dominant en rendant unidimensionnel les variables, c'est-à-dire en considérant  $y = \lambda x$ .

Alors  $f(x, y) = f_\lambda(x)$ , on étudie alors les limites possibles de  $f_\lambda(x)$ , pour  $x$  tendant vers 0, selon  $\lambda$ .

Si les limites dépendent de  $\lambda$ , alors  $f$  ne peut pas être continue.

Ici :  $f_\lambda(x) = f(x, \lambda x) = \frac{\lambda x^2}{(1 + \lambda^2)x^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$ , limite qui dépend de  $\lambda$ .

Donc  $f(0, 0)$  n'a pas de valeur unique...

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Savoir-faire. Un bon critère de non continuité

Une autre méthode qui marche souvent est d'étudier le terme dominant en rendant unidimensionnel les variables, c'est-à-dire en considérant  $y = \lambda x$ .

Alors  $f(x, y) = f_\lambda(x)$ , on étudie alors les limites possibles de  $f_\lambda(x)$ , pour  $x$  tendant vers 0, selon  $\lambda$ .

Si les limites dépendent de  $\lambda$ , alors  $f$  ne peut pas être continue.

Ici :  $f_\lambda(x) = f(x, \lambda x) = \frac{\lambda x^2}{(1 + \lambda^2)x^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$ , limite qui dépend de  $\lambda$ .

Donc  $f(0, 0)$  n'a pas de valeur unique. . .

**Remarque** Autre utilisation :  $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

- 3.1. Limite
- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues**
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

- 3.1. Limite
- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues**
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

## Proposition - Application lipschitzienne

Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  une application  $k$ -lipschitzienne.

Alors  $f$  est continue

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

**3.3. Exemple d'applications continues**

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Proposition - Application lipschitzienne

Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  une application  $k$ -lipschitzienne.

Alors  $f$  est continue

Puisque  $\|\cdot\|$  est 1-lipschitzienne :

## Savoir-faire. Continuité de $\|\cdot\|$

L'application  $E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$  est continue sur  $E$ .

Soit  $x_0 \in A$ , alors  $\forall x \in A, \|f(x) - f(x_0)\| \leq k\|x - x_0\|$ .

Soit  $\epsilon > 0$ , alors avec  $\delta = \frac{\epsilon}{k}$ , on a :

$$\forall x \in A, \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq k\delta = \epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout  $x_0$ ,  $f$  est continue sur  $A$  en entier

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Proposition - Applications composées

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels de dimension finie et normés.

Soient  $f : A \subset E \rightarrow F$ ,  $g : B \subset F \rightarrow G$  continues et telles que  $f(A) \subset B$ .

Alors :  $g \circ f : A \subset E \rightarrow G$  est continue.

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Proposition - Applications composées

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels de dimension finie et normés.

Soient  $f : A \subset E \rightarrow F$ ,  $g : B \subset F \rightarrow G$  continues et telles que  $f(A) \subset B$ .

Alors :  $g \circ f : A \subset E \rightarrow G$  est continue.

## Démonstration

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Proposition - (et définition) Polynômes de plusieurs variables

On appelle fonctions polynomiales de  $n$  variables, les applications de la forme :

$$f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K},$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^p a_k x_1^{\alpha_{1,k}} \times x_2^{\alpha_{2,k}} \cdots \times x_n^{\alpha_{n,k}},$$

où  $a_k \in \mathbb{K}$  et  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}$ .

Il s'agit de combinaison linéaire de puissances des  $x_i$ .

*Cette définition étend celle des fonctions polynomiales à une seule variable.*

Les fonctions polynomiales de  $n$  variables sont continues sur  $\mathbb{K}^n$

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Proposition - (et définition) Polynômes de plusieurs variables

On appelle fonctions polynomiales de  $n$  variables, les applications de la forme :

$$f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K},$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^p a_k x_1^{\alpha_{1,k}} \times x_2^{\alpha_{2,k}} \cdots \times x_n^{\alpha_{n,k}},$$

où  $a_k \in \mathbb{K}$  et  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}$ .

Il s'agit de combinaison linéaire de puissances des  $x_i$ .

*Cette définition étend celle des fonctions polynomiales à une seule variable.*

Les fonctions polynomiales de  $n$  variables sont continues sur  $\mathbb{K}^n$

### Exemple Déterminant

⇒ Topologie

⇒ Continuité

#### 1. Problèmes

#### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

#### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Proposition - (et définition) Polynômes de plusieurs variables

On appelle fonctions polynomiales de  $n$  variables, les applications de la forme :

$$f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K},$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^p a_k x_1^{\alpha_{1,k}} \times x_2^{\alpha_{2,k}} \cdots \times x_n^{\alpha_{n,k}},$$

où  $a_k \in \mathbb{K}$  et  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}$ .

Il s'agit de combinaison linéaire de puissances des  $x_i$ .

*Cette définition étend celle des fonctions polynomiales à une seule variable.*

Les fonctions polynomiales de  $n$  variables sont continues sur  $\mathbb{K}^n$

**Exemple** Déterminant

Exercice

Montrer que  $f : (x, y, z) \mapsto (\ln(xy^2), \frac{x+y}{z}, x^2y + y^2z + z^2x)$  est continue sur une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  à préciser.

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Savoir-faire. Montrer qu'une application est continue

Lorsqu'il faut montrer qu'une fonction de plusieurs variables est continue il faut :

1. bien étudier l'ensemble de définition
2. montrer par composition de fonctions continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et de fonctions polynomiales que  $f$  est continue sur une grande partie de l'ensemble de définition
3. terminer par l'étude aux points frontières.  
En règle générale, il faut chercher les ordres maximales et les comparer (cf. exercice suivant)

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Savoir-faire. Montrer qu'une application est continue

Lorsqu'il faut montrer qu'une fonction de plusieurs variables est continue il faut :

1. bien étudier l'ensemble de définition
2. montrer par composition de fonctions continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et de fonctions polynomiales que  $f$  est continue sur une grande partie de l'ensemble de définition
3. terminer par l'étude aux points frontières.  
En règle générale, il faut chercher les ordres maximales et les comparer (cf. exercice suivant)

**Exemple**  $f : (x, y) \mapsto \frac{\ln(1 + xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

- 3.1. Limite
- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact**
- 3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

- 3.1. Limite
- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact**
- 3.5. Représentation graphique

## Proposition - Image d'un compact par une fonction continue

Si  $f$  est continue de  $E$  sur  $F$  et si  $K$  est un compact de  $E$ , alors  $f(K)$  est un compact de  $F$ .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

**3.4. Continuité sur un compact**

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Proposition - Image d'un compact par une fonction continue

Si  $f$  est continue de  $E$  sur  $F$  et si  $K$  est un compact de  $E$ , alors  $f(K)$  est un compact de  $F$ .

## Démonstration

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

**3.4. Continuité sur un compact**

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Proposition - Image d'un compact par une fonction continue

Si  $f$  est continue de  $E$  sur  $F$  et si  $K$  est un compact de  $E$ , alors  $f(K)$  est un compact de  $F$ .

### Démonstration

Comme  $f(K)$  est fermé et borné

## Proposition - Optimalité

Si  $f$  est continue sur un compact de  $E$ , alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Proposition - Image d'un compact par une fonction continue

Si  $f$  est continue de  $E$  sur  $F$  et si  $K$  est un compact de  $E$ , alors  $f(K)$  est un compact de  $F$ .

### Démonstration

Comme  $f(K)$  est fermé et borné

## Proposition - Optimalité

Si  $f$  est continue sur un compact de  $E$ , alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

### Démonstration

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

- 3.1. Limite
- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

- 3.1. Limite
- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

# « Dimension » $p$

Il faut entendre ici surface au sens large : courbe, surface, volume, hypersphère. . .

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

**3.5. Représentation graphique**

# « Dimension » $p$

Il faut entendre ici surface au sens large : courbe, surface, volume, hypersphère. . .

**Analyse** Représentation de fonctions de deux variables

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

**3.5. Représentation graphique**

## « Dimension » $p$

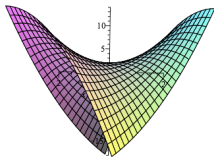
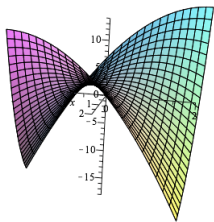
Il faut entendre ici surface au sens large : courbe, surface, volume, hypersphère. . .

**Analyse** Représentation de fonctions de deux variables

Considérons le point  $\alpha = (1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, -\frac{3}{2}) \in S$  et deux vecteurs :

▶  $u_1 = (1, 0),$

▶  $u_2 = (0, 1),$



⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# « Dimension » $p$

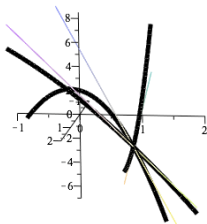
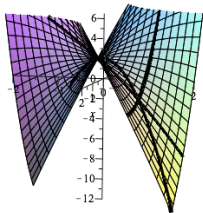
Il faut entendre ici surface au sens large : courbe, surface, volume, hypersphère...

**Analyse** Représentation de fonctions de deux variables

Considérons le point  $\alpha = (1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, -\frac{3}{2}) \in S$  et deux vecteurs :

▶  $u_1 = (1, 0),$

▶  $u_2 = (0, 1),$



⇒ Topologie

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Remarque Courbe des équipotentiels

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

**3.5. Représentation graphique**

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Remarque Courbe des équipotentiels

### Définition - Ligne de niveau zéro

Soit  $f$  une application définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

On appelle ligne de niveau zéro la courbe d'équation

$$f(x_1, \dots, x_p) = 0.$$

Il s'agit en fait de l'ensemble

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid f(x_1, \dots, x_p) = 0\}.$$

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Ligne de niveau. « Dimension » $p - 1$

## Remarque Courbe des équipotentiels

### Définition - Ligne de niveau zéro

Soit  $f$  une application définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

On appelle ligne de niveau zéro la courbe d'équation

$$f(x_1, \dots, x_p) = 0.$$

Il s'agit en fait de l'ensemble

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid f(x_1, \dots, x_p) = 0\}.$$

## Exemple Cône

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

- 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé
- 2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé
- 2.3. Topologie relative (induite)
- 2.4. Compacts
- 2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

- 3.1. Limite
- 3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites
- 3.3. Exemple d'applications continues
- 3.4. Continuité sur un compact
- 3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Remarque Courbe des équipotentiels

### Définition - Ligne de niveau zéro

Soit  $f$  une application définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

On appelle ligne de niveau zéro la courbe d'équation

$$f(x_1, \dots, x_p) = 0.$$

Il s'agit en fait de l'ensemble

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid f(x_1, \dots, x_p) = 0\}.$$

**Exemple** Cône

**Exemple** Cercle

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Bilan des représentation

Finalement, il y a à croiser différents objets selon les dimension :  
courbe, surface, volume par rapport au mode de  
(re)présentation : explicite ( $y = f(x)$ ,  $z = f(x, y)$ . . .), implicite (par  
une équation type ligne de niveau) et paramétrique ( $(x(t), y(t))$ ),  
vu au chapitre précédent).

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## 1. Problèmes

## 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

## 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

**3.5. Représentation graphique**

## Bilan des représentation

Finalement, il y a à croiser différents objets selon les dimension :  
courbe, surface, volume par rapport au mode de  
(re)présentation : explicite ( $y = f(x)$ ,  $z = f(x, y)$ ...), implicite (par  
une équation type ligne de niveau) et paramétrique ( $(x(t), y(t))$ ,  
vu au chapitre précédent).

### Proposition - « Surface »

On a les objets géométriques suivants, selon les types suivants :

	Courbe	Surface
Explicite	$M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tq $y = h(x)$ où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^0$	$M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tq $z = g(x, y)$ où $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^0$
Implicite	$M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tq $g(x, y) = 0$ où $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^1$	$M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tq $f(x, y, z) = 0$ où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^1$
Paramétrique	$M(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ où $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$M(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ où $x, y, z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Evidemment, il possible d'envisager une généralisation de ces  
définitions.

⇒ Topologie

⇒ Continuité

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel  
normé

2.2. Initiation à la topologie d'un  
espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou  
non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications  
continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique



# Conclusion

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

- ▶ Compact : généralisation de la propriété de Bolzano-Weierstrass

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

- ▶ Compact : généralisation de la propriété de Bolzano-Weierstrass
- ▶ Propriété équivalente de Borel-Lebesgue et donc du lemme de Cousin

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

- ▶ Compact : généralisation de la propriété de Bolzano-Weierstrass
- ▶ Propriété équivalente de Borel-Lebesgue et donc du lemme de Cousin
- ▶ Dans le cadre de  $\mathbb{R}^n$ , il s'agit des fermés bornés

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

- ▶ Compact : généralisation de la propriété de Bolzano-Weierstrass
- ▶ Propriété équivalente de Borel-Lebesgue et donc du lemme de Cousin
- ▶ Dans le cadre de  $\mathbb{R}^n$ , il s'agit des fermés bornés
- ▶ L'intérieur est l'intersection des ouverts contenus, l'adhérence est l'intersection des fermés contenant.

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Conclusion

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

- ▶ Définition de la limite : avec norme ou boules ou suite convergente.

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

- ▶ Définition de la limite : avec norme ou boules ou suite convergente.
- ▶ Continuité en un point, puis sur un ensemble

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

- ▶ Définition de la limite : avec norme ou boules ou suite convergente.
- ▶ Continuité en un point, puis sur un ensemble
- ▶ Utilisation de suites (surtout pour montrer la non-continuité)

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

- ▶ Définition de la limite : avec norme ou boules ou suite convergente.
- ▶ Continuité en un point, puis sur un ensemble
- ▶ Utilisation de suites (surtout pour montrer la non-continuité)
- ▶ Exemples : lipschitzienne, polynomiale, linéaire, composées

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

- ▶ Définition de la limite : avec norme ou boules ou suite convergente.
- ▶ Continuité en un point, puis sur un ensemble
- ▶ Utilisation de suites (surtout pour montrer la non-continuité)
- ▶ Exemples : lipschitzienne, polynomiale, linéaire, composées
- ▶ Application topologique : définir des fermés, des ouverts par image réciproque

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

- ▶ Définition de la limite : avec norme ou boules ou suite convergente.
- ▶ Continuité en un point, puis sur un ensemble
- ▶ Utilisation de suites (surtout pour montrer la non-continuité)
- ▶ Exemples : lipschitzienne, polynomiale, linéaire, composées
- ▶ Application topologique : définir des fermés, des ouverts par image réciproque
- ▶ Application topologique : définir des compact par image directe

⇒ Topologie

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

# Conclusion

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

### 1. Problèmes

### 2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

### 3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique

⇒ Topologie

⇒ Continuité

## Objectifs

⇒ Topologie : compacts & adhérences et intérieurs

⇒ Continuité

## Pour le prochain cours

- ▶ Lecture : 4. Différentielle et dérivées partielles
- ▶ Exercice n° 863, 864, 865 & 866

1. Problèmes

2. Topologie

2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

2.2. Initiation à la topologie d'un espace normé

2.3. Topologie relative (induite)

2.4. Compacts

2.5. Adhérences et intérieurs

3. Continuité

3.1. Limite

3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites

3.3. Exemple d'applications continues

3.4. Continuité sur un compact

3.5. Représentation graphique