



⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

## Heuristique. Comment définir alors une dérivée de $f$ ?

Si notre motivation est de généraliser la démarche de dérivation d'une fonction à une variable : le signe de  $f'$  indique les variations de  $f$ , alors il faut se demander ce que signifie que la fonction est croissante ?

Dans  $\mathbb{R}^2$ , cela n'a plus aucun sens.

Il ne faut donc pas s'attacher à cette approche des choses : dérivée = variations, mais plutôt à l'autre approche beaucoup plus essentielle : dérivée = DL<sub>1</sub>.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

## Définition - Différentielle

Soient  $a \in U$ , ouvert de  $E$  et  $f : U \rightarrow F$ .

On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire  $L_a : E \rightarrow F$  telle que :  $\forall h$  tel que  $a + h \in U$ ,  
 $f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|)$ .

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

## Définition - Différentielle

Soient  $a \in U$ , ouvert de  $E$  et  $f : U \rightarrow F$ .

On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire  $L_a : E \rightarrow F$  telle que :  $\forall h$  tel que  $a + h \in U$ ,  
 $f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|)$ .

**Remarque** Sens du  $o(h)$

⇒ Dérivée partielle  
⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
  - 4.1. Développement limité. Différentiabilité
  - 4.2. Dérivées partielles
  - 4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$
  - 4.4. Règle de la chaîne

# Différentielle

## Définition - Différentielle

Soient  $a \in U$ , ouvert de  $E$  et  $f : U \rightarrow F$ .

On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire  $L_a : E \rightarrow F$  telle que :  $\forall h$  tel que  $a + h \in U$ ,  
 $f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|)$ .

**Remarque** Sens du  $o(h)$

## Proposition - Unicité de la différentielle

Si  $f : U \subset E \rightarrow F$  est différentiable en  $a$ , alors la différentielle est unique.

On note alors  $\partial f(a)(h)$  le vecteur  $L_a(h)$ .

⇒ Dérivée partielle  
⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
  - 4.1. Développement limité. Différentiabilité
  - 4.2. Dérivées partielles
  - 4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$
  - 4.4. Règle de la chaîne

# Différentielle

## Définition - Différentielle

Soient  $a \in U$ , ouvert de  $E$  et  $f : U \rightarrow F$ .

On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire  $L_a : E \rightarrow F$  telle que :  $\forall h$  tel que  $a + h \in U$ ,  
 $f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|)$ .

**Remarque** Sens du  $o(h)$

## Proposition - Unicité de la différentielle

Si  $f : U \subset E \rightarrow F$  est différentiable en  $a$ , alors la différentielle est unique.

On note alors  $\partial f(a)(h)$  le vecteur  $L_a(h)$ .

## Attention. Nature des objets

Que sont  $\partial f$ ,  $\partial f(a)$  et  $\partial f(a)(h)$  ?

Dans l'ordre inverse : un vecteur, une application linéaire et une application de  $E$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$  ?

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

**Application** Fonction  $f$  linéaire. Exemple de la trace.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Exemple

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

**Application** Fonction  $f$  linéaire. Exemple de la trace.

**Exemple** Fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Exemple

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

**Application** Fonction  $f$  linéaire. Exemple de la trace.

**Exemple** Fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exemple** Fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy^2 + 3 \ln x + \frac{x}{y}$ .

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Exemple

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

**Application** Fonction  $f$  linéaire. Exemple de la trace.

**Exemple** Fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exemple** Fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy^2 + 3 \ln x + \frac{x}{y}$ .

Il reste à faire la démonstration de l'unicité

**Démonstration**

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Définition

On se concentre uniquement ici sur des fonctions de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque** Fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

**4.2. Dérivées partielles**

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

## Définition

On se concentre uniquement ici sur des fonctions de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque** Fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Selon ce que l'on a déjà vu en sciences physiques :

### Définition. Dérivée partielle (d'ordre 1)

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $\vec{a} \in U$ .

Notons  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ , la base canonique orthonormée de  $\mathbb{R}^p$ .

On appelle dérivées partielles de  $f$  la famille :

$(\partial_1 f(\vec{a}), \partial_2 f(\vec{a}), \dots, \partial_p f(\vec{a}))$  :

$$\forall i \in \mathbb{N}_p, \quad \partial_i f(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h}$$

Pour tout  $i \in \mathbb{N}_p$ , on peut noter également ce nombre  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$

**Exemple**  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + (y - z)x + y^z$

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

## Truc & Astuce pour le calcul - Calculer les dérivées partielles

La dérivée partielle selon le vecteur de base  $\vec{e}_i$  s'obtient en calculant la dérivée de  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto f(\vec{a} + t\vec{e}_i)$ .

Cela consiste donc souvent, lorsque les variables associés aux ( $\vec{e}_j$ ) sont clairement définissables, à dériver la fonction  $f$  en **tenant pour constante** toutes les variables  $x_j$  associés aux vecteurs  $\vec{e}_j \neq \vec{e}_i$ .

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

## Truc & Astuce pour le calcul - Calculer les dérivées partielles

La dérivée partielle selon le vecteur de base  $\vec{e}_i$  s'obtient en calculant la dérivée de  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto f(\vec{a} + t\vec{e}_i)$ .

Cela consiste donc souvent, lorsque les variables associés aux ( $\vec{e}_j$ ) sont clairement définissables, à dériver la fonction  $f$  en **tenant pour constante** toutes les variables  $x_j$  associés aux vecteurs  $\vec{e}_j \neq \vec{e}_i$ .

**Exemple** Calcul des dérivées partielles de  $f : (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$  en  $(1, 2)$ .

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

## Exercice

Calculer les dérivées partielles de la fonction  $f$  précédentes par rapport à la seconde et la troisième variable en  $\vec{a}$ .

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

**4.2. Dérivées partielles**

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

## Exercice

Calculer les dérivées partielles de la fonction  $f$  précédentes par rapport à la seconde et la troisième variable en  $\vec{a}$ .

**Remarque** Si  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

- ⇒ Dérivée partielle
- ⇒ Règle de la chaîne

## Exercice

Calculer les dérivées partielles de la fonction  $f$  précédentes par rapport à la seconde et la troisième variable en  $\vec{a}$ .

**Remarque** Si  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable

## Attention. Nature des objets

Supposons que  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ .

Alors  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$  est un nombre ( $a$  est un vecteur) et donc  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  est une application de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ .

- 1. Problèmes
- 2. Topologie
- 3. Continuité
- 4. Calcul différentiel
  - 4.1. Développement limité. Différentiabilité
  - 4.2. Dérivées partielles
  - 4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$
  - 4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

**4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$**

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

**4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$**

4.4. Règle de la chaîne

Nous cherchons un critère réciproque : l'existence des dérivées partielles implique-t-elle la différentiabilité ?

Un critère *suffisant* à ce que « tout se passe bien » est le fait que l'application soit de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . Un exemple illustrera ce qui peut (mal) se passer lorsque la fonction n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

Nous cherchons un critère réciproque : l'existence des dérivées partielles implique-t-elle la différentiabilité ?

Un critère *suffisant* à ce que « tout se passe bien » est le fait que l'application soit de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . Un exemple illustrera ce qui peut (mal) se passer lorsque la fonction n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .

## Définition - Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  ou continûment différentiable sur  $U$  (ouvert),

si toutes les fonctions dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  sont continues de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ .

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# A savoir !

Nous admettons déjà le résultat suivant (les explications suivront, ainsi que le critère de composition)

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

**4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$**

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

Nous admettons déjà le résultat suivant (les explications suivront, ainsi que le critère de composition)

## Proposition - Exemples de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

- ▶ Les fonctions polynomiales (à  $p$  variables) sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^p$ .
- ▶ Toute combinaison linéaire de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  donc  $\mathcal{C}^1(U)$ , l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  est un espace vectoriel

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

Nous admettons déjà le résultat suivant (les explications suivront, ainsi que le critère de composition)

## Proposition - Exemples de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

- ▶ Les fonctions polynomiales (à  $p$  variables) sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^p$ .
- ▶ Toute combinaison linéaire de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  donc  $\mathcal{C}^1(U)$ , l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  est un espace vectoriel

**Remarque** Fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Attention !

La dérivabilité n'implique pas la continuité !

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

**4.3. Application de classe** ☺<sup>1</sup>

4.4. Règle de la chaîne

## Attention !

La dérivabilité n'implique pas la continuité !

### Attention. Fonction dérivable mais non continûment

La condition de continuité des dérivées de  $f$  est nécessaire comme le montre le contre-exemple suivant :

Soit  $f : (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$  prolongé en  $f(0, 0) = 0$ .

Ici, les dérivées partielles en  $\vec{0} = (0, 0)$  donnent :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\text{de même } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Et plus généralement, pour tout  $\vec{u} = (a, b)$ ,

$$\varphi_{\vec{u}}(h) = \frac{1}{h} (f(\vec{0} + h\vec{u}) - f(\vec{0})) = \frac{h^3 ab^2}{h(h^2(a^2 + b^2))} = \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \neq 0$$

Donc on n'a pas  $D_{\vec{u}}(f)(0, 0) \neq a \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) + b \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0)$ .

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Attention !

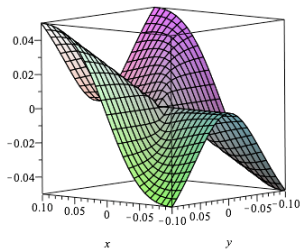
La dérivabilité n'implique pas la continuité !

## Attention. Fonction dérivable mais non continûment

Donc on n'a pas  $D_{\vec{u}}(f)(0,0) \neq a \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) + b \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$ .

Ici les dérivées partielles ne sont pas continues en  $(0,0)$ .

La représentation graphique montre que la fonction  $f$  n'est pas « totalement lisse » mais semble comme froissée.



⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

## Théorème - Développement limité

Soit  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ .

Alors :

1.  $f$  est continue sur  $U$ .
2.  $f$  admet en tout point  $\vec{a}$  de  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  un développement limité :

$$f(\vec{a} + \vec{u}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^p u_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) + \|u\| \times \epsilon(u)$$

où le vecteur  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  et  $\epsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ , tel que  $\epsilon(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$ .

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

## Théorème - Développement limité

Soit  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ .

Alors :

1.  $f$  est continue sur  $U$ .
2.  $f$  admet en tout point  $\vec{a}$  de  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  un développement limité :

$$f(\vec{a} + \vec{u}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^p u_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) + \|u\| \times \epsilon(u)$$

où le vecteur  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  et  $\epsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ , tel que  $\epsilon(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$ .

## Démonstration

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

## Théorème - Développement limité

Soit  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ .

Alors :

1.  $f$  est continue sur  $U$ .
2.  $f$  admet en tout point  $\vec{a}$  de  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  un développement limité :

$$f(\vec{a} + \vec{u}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^p u_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) + \|u\| \times \epsilon(u)$$

où le vecteur  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  et  $\epsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ , tel que  $\epsilon(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$ .

## Démonstration

**Exemple**  $f(x, y) \mapsto (\ln(\frac{x+y}{2}), \arctan(x^2 - y^2 + 1))$ .

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

## Théorème - Développement limité

Soit  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ .

Alors :

1.  $f$  est continue sur  $U$ .
2.  $f$  admet en tout point  $\vec{a}$  de  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  un développement limité :

$$f(\vec{a} + \vec{u}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^p u_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) + \|u\| \times \epsilon(u)$$

où le vecteur  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  et  $\epsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ , tel que  $\epsilon(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$ .

## Démonstration

**Exemple**  $f(x, y) \mapsto (\ln(\frac{x+y}{2}), \arctan(x^2 - y^2 + 1))$ .

**Remarque** Notation physique

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

**Remarque** Pourquoi  $df(\vec{a}) : u \mapsto \dots$  est-ce bien une application linéaire ?

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

**4.3. Application de classe**  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

**Remarque** Pourquoi  $df(\vec{a}) : u \mapsto \dots$  est-ce bien une application linéaire ?

D'après le théorème de représentation de Riesz en dimension finie :

## Définition - Gradient

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

On appelle gradient de  $f$ , l'application vectorielle :

$$\nabla f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, \vec{a} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

On a alors, pour tout  $\vec{u} \in \mathbb{R}^p$ ,  $df(\vec{a}) \cdot \vec{u} = \langle \nabla f(\vec{a}); \vec{u} \rangle$ .

Et aussi (approx. au 1<sup>er</sup> ordre) :

$$f(\vec{a} + h\vec{u}) = f(\vec{a}) + h \langle \nabla f(\vec{a}); \vec{u} \rangle + o(h)$$

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité. Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Dérivation d'une composition

Il s'agit ici d'étudier l'impact de la composition dans le calcul différentiel.

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

**4.4. Règle de la chaîne**

# Dérivation d'une composition

Il s'agit ici d'étudier l'impact de la composition dans le calcul différentiel.

**Analyse** Composition :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Dérivation d'une composition

Il s'agit ici d'étudier l'impact de la composition dans le calcul différentiel.

**Analyse** Composition :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

## Proposition - Règle de la chaîne

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $U$ . Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  ouvert de  $\mathbb{R}$ , avec  $\varphi(I) \subset U$ .

Alors  $g : f \circ \varphi$  est une fonction numérique de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et

$$\forall t \in I \quad g'(t) = \sum_{j=1}^p x'_j(t) \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(\vec{t}))$$

- ⇒ Dérivée partielle
- ⇒ Règle de la chaîne

- 1. Problèmes
- 2. Topologie
- 3. Continuité
- 4. Calcul différentiel
  - 4.1. Développement limité. Différentiabilité
  - 4.2. Dérivées partielles
  - 4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$
  - 4.4. Règle de la chaîne

# Truc pour le calcul

L'application physique suivante explique le nom donné à cette règle :

**Exemple** Fondamental !

- ⇒ Dérivée partielle
- ⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

**4.4. Règle de la chaîne**

## Truc pour le calcul

L'application physique suivante explique le nom donné à cette règle :

**Exemple** Fondamental !

### Truc & Astuce pour le calcul. Comment dériver des fonctions composées ?

Si vous devez dériver la suite de composition  $f \circ \varphi$  :

$$t \xrightarrow{\varphi} (x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f \circ \varphi(t)$$

- ▶  $t$  a une influence sur tout  $x_k = \varphi_k(t)$  égale à  $\varphi'_k(t) = \frac{dx_k}{dt}$
- ▶ Puis, tout  $x_k$  a une influence sur tout  $f$  égale à  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$

Puis on regarde tous les chemins possibles !! (somme)

$$\frac{d(f \circ \varphi)}{dt} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t)) \times \frac{dx_j}{dt}(t)$$

C'est la formule générale, mais penser à l'appliquer directement.

- ⇒ Dérivée partielle
- ⇒ Règle de la chaîne

- 1. Problèmes
- 2. Topologie
- 3. Continuité
- 4. Calcul différentiel
  - 4.1. Développement limité. Différentiabilité
  - 4.2. Dérivées partielles
  - 4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$
  - 4.4. Règle de la chaîne

## Attention - Autour de la formule de la chaîne

Même si en physique on a tendance à oublier le point (vecteur) pour lequel on effectue le calcul de la différentielle, il ne faut pas l'oublier ici !!

Noter également qu'il est préférable (au moins mnémotechniquement) d'écrire d'abord les dérivées de  $f$  (à gauche), puis celles des  $x_k$  à droite. Cela correspond bien à l'écriture de la dérivation. C'est aussi avec cette écriture qu'on peut faire des vraies/fausses simplifications rapides par  $\partial x_j \dots$

- ⇒ Dérivée partielle
- ⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
  - 4.1. Développement limité. Différentiabilité
  - 4.2. Dérivées partielles
  - 4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$
  - 4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

## Attention - Autour de la formule de la chaîne

Même si en physique on a tendance à oublier le point (vecteur) pour lequel on effectue le calcul de la différentielle, il ne faut pas l'oublier ici !!

Noter également qu'il est préférable (au moins mnémotechniquement) d'écrire d'abord les dérivées de  $f$  (à gauche), puis celles des  $x_k$  à droite. Cela correspond bien à l'écriture de la dérivation. C'est aussi avec cette écriture qu'on peut faire des vraies/fausses simplifications rapides par  $\partial x_j \dots$

### Exercice

Exprimer la dérivée de  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  en fonction de  $r$  et de  $\theta$  si l'on admet le paramétrage :  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

Nous nous appuyons sur le document *Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité [bac-3,bac+3]*.

**Remarque** Relation numérique. Différence entre la fonction mathématique et la loi physique.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

Nous nous appuyons sur le document *Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité [bac-3,bac+3]*.

**Remarque** Relation numérique. Différence entre la fonction mathématique et la loi physique.

**Exemple** Thermodynamique

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

Nous nous appuyons sur le document *Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité [bac-3,bac+3]*.

**Remarque** Relation numérique. Différence entre la fonction mathématique et la loi physique.

**Exemple** Thermodynamique

**Remarque** Notation de dérivation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

Nous nous appuyons sur le document *Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité [bac-3,bac+3]*.

**Remarque** Relation numérique. Différence entre la fonction mathématique et la loi physique.

**Exemple** Thermodynamique

**Remarque** Notation de dérivation

**Exemple** Formule de la chaîne physicienne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Conclusion

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

## Objectifs

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Dérivée partielle

- ▶ Définition : à autres variables fixés

⇒ Dérivée partielle  
⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

## Objectifs

### ⇒ Dérivée partielle

- ▶ Définition : à autres variables fixés
- ▶ Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $f$  admet un  $DL_1$ .

- ⇒ Dérivée partielle
- ⇒ Règle de la chaine

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaine

## Objectifs

### ⇒ Dérivée partielle

- ▶ Définition : à autres variables fixés
- ▶ Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $f$  admet un  $DL_1$ .
- ▶ Attention aux cas pathologiques (on ne généralise pas simplement dans  $\mathbb{R}^2$  les résultats dans  $\mathbb{R}$ )

- ⇒ Dérivée partielle
- ⇒ Règle de la chaine

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
  - 4.1. Développement limité. Différentiabilité
  - 4.2. Dérivées partielles
  - 4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$
  - 4.4. Règle de la chaine

## Objectifs

### ⇒ Dérivée partielle

- ▶ Définition : à autres variables fixés
- ▶ Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $f$  admet un  $DL_1$ .
- ▶ Attention aux cas pathologiques (on ne généralise pas simplement dans  $\mathbb{R}^2$  les résultats dans  $\mathbb{R}$ )
- ▶ Utilisation des  $DL_1$  comme approximation numérique : cf. Physique

- ⇒ Dérivée partielle
- ⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes
2. Topologie
3. Continuité
4. Calcul différentiel
  - 4.1. Développement limité. Différentiabilité
  - 4.2. Dérivées partielles
  - 4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$
  - 4.4. Règle de la chaîne

# Conclusion

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

## Objectifs

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Conclusion

## Objectifs

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

- ▶ Formule de dérivation d'un produit

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Conclusion

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

## Objectifs

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

- ▶ Formule de dérivation d'un produit
- ▶ Application à la physique

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne

# Conclusion

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

## Objectifs

⇒ Dérivée partielle

⇒ Règle de la chaîne

## Pour le prochain cours

- ▶ Lecture : Visualisation (et optimisation)
- ▶ Exercice n°869 & 870

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

4.1. Développement limité.  
Différentiabilité

4.2. Dérivées partielles

4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$

4.4. Règle de la chaîne