

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation



1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Leçon 116 - Fonctions de deux (plusieurs) variables

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Plan de l'espace

Commençons par la tangente à une surface : il s'agit d'un plan.
Pour la courbe, nous ferons une analogie et retrouverons les résultats déjà connus. . .

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Heuristique. Décrire un plan de \mathbb{R}^3

Comment peut-on décrire un plan dans \mathbb{R}^3 (espace affine) ?

1. et en donnant un point du plan .
2. en décrivant sa pente, c'est-à-dire le plan parallèle qui passe par O , ou encore le plan de l'espace vectoriel parallèle.
 - ▶ celui-ci est donné soit par une équation explicite :
 $ax + by + cz = 0$.
 - ▶ Ou de manière équivalente, mais plus géométrique, par un vecteur orthogonal au plan en question (ici $\vec{u} = (a, b, c)$).
Cela correspond à *l'écriture implicite du plan*.
 - ▶ ou enfin, par la donnée de deux vecteurs formant une famille génératrice du plan (ici \vec{v}, \vec{w}).
Cela correspond à *l'écriture paramétrique du plan*.

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Proposition - Surface plane

L'écriture **explicite** d'un plan de \mathbb{R}^3 est de la forme :

$$z = ax + by + c$$

(ou dans le cas $x = x_0$ (plan perpendiculaire à (Ox)),

ou bien $y = y_0$ (plan perpendiculaire à (Oy)),

ou bien $y = ax + c$ (perpendiculaire à $y = ax + c$ de (Oxy)))

L'écriture **implicite** d'un plan de \mathbb{R}^3 est : $ax + by + cz + d = 0$

plan orthogonal à vecteur $u = (a, b, c)$ passant par $(0, 0, -\frac{d}{c})$

L'écriture **paramétrique** d'un plan de \mathbb{R}^3 est de la forme :

$$\begin{cases} x(u, v) = a_1u + b_1v + c_1 \\ y(u, v) = a_2u + b_2v + c_2 \\ z(u, v) = a_3u + b_3v + c_3 \end{cases}$$

dirigé par (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) passant par (c_1, c_2, c_3) .

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Proposition - Surface plane

L'écriture **explicite** d'un plan de \mathbb{R}^3 est de la forme :

$$z = ax + by + c$$

(ou dans le cas $x = x_0$ (plan perpendiculaire à (Ox)),

ou bien $y = y_0$ (plan perpendiculaire à (Oy)),

ou bien $y = ax + c$ (perpendiculaire à $y = ax + c$ de (Oxy)))

L'écriture **implicite** d'un plan de \mathbb{R}^3 est : $ax + by + cz + d = 0$

plan orthogonal à vecteur $u = (a, b, c)$ passant par $(0, 0, -\frac{d}{c})$

L'écriture **paramétrique** d'un plan de \mathbb{R}^3 est de la forme :

$$\begin{cases} x(u, v) = a_1u + b_1v + c_1 \\ y(u, v) = a_2u + b_2v + c_2 \\ z(u, v) = a_3u + b_3v + c_3 \end{cases}$$

dirigé par (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) passant par (c_1, c_2, c_3) .

Démonstration

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Proposition - Surface plane

L'écriture **explicite** d'un plan de \mathbb{R}^3 est de la forme :

$$z = ax + by + c$$

(ou dans le cas $x = x_0$ (plan perpendiculaire à (Ox)),

ou bien $y = y_0$ (plan perpendiculaire à (Oy)),

ou bien $y = ax + c$ (perpendiculaire à $y = ax + c$ de (Oxy)))

L'écriture **implicite** d'un plan de \mathbb{R}^3 est : $ax + by + cz + d = 0$

plan orthogonal à vecteur $u = (a, b, c)$ passant par $(0, 0, -\frac{d}{c})$

L'écriture **paramétrique** d'un plan de \mathbb{R}^3 est de la forme :

$$\begin{cases} x(u, v) &= a_1u + b_1v + c_1 \\ y(u, v) &= a_2u + b_2v + c_2 \\ z(u, v) &= a_3u + b_3v + c_3 \end{cases}$$

dirigé par (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) passant par (c_1, c_2, c_3) .

Démonstration

Remarque Point de vue et nature de la définition

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Définition - Point régulier

Un point $M(x, y, z)$ d'une surface Σ est dit **régulier** si :

- ▶ dans le cas d'une surface définie explicitement :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \text{ sont finis,}$$

- ▶ dans le cas d'une surface définie implicitement :

$$\nabla f(x, y, z) \neq 0.$$

- ▶ dans le cas d'une surface définie paramétriquement $\varphi(u, v)$:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) \text{ forment une famille libre.}$$

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Définition - Point régulier

Un point $M(x, y, z)$ d'une surface Σ est dit **régulier** si :

- ▶ dans le cas d'une surface définie explicitement :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \text{ sont finis,}$$

- ▶ dans le cas d'une surface définie implicitement :

$$\nabla f(x, y, z) \neq 0.$$

- ▶ dans le cas d'une surface définie paramétriquement $\varphi(u, v)$:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) \text{ forment une famille libre.}$$

Un point non régulier est dit critique, nous le verrons plus tard.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Voici la définition officielle du programme de seconde année

Vecteurs tangents et espace tangent

Soit X une partie de E evn. Soit $x \in X$ (point de X).

Pour tout $v \in E$ (vecteurs de E), on dit que v est tangent à X en x , s'il existe $\epsilon > 0$, et un arc $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow X$, dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

On note $T_x X$, l'ensemble des vecteurs tangents à X

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Plan tangent à une surface

Proposition - Plan tangent

Considérons une surface Σ et $M(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier de cette surface.

Alors : Σ admet en M un plan tangent :

- ▶ dans la cas où Σ a pour équation explicite $z = g(x, y)$, ce plan tangent a pour équation :

$$z - z_0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0)$$

ou $z - z_0 = \langle \nabla g(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \rangle$.

- ▶ dans la cas où Σ a pour équation implicite $f(x, y, z) = 0$, ce plan tangent a pour équation :

$$\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{M_0 M} \rangle = 0$$

- ▶ Dans le cas où Σ est définie paramétriquement par $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ le plan tangent à cette surface en $M_0(u_0, v_0)$ a pour équation :

$$M_0 + \text{vect} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Démonstration

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

**5.1. Tangente à une courbe, à
une surface**

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Démonstration

Remarque Autre écriture cas implicite

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Démonstration

Remarque Autre écriture cas implicite

Exercice

Montrer que $M(1, 1, 1)$ est un point régulier de la surface Σ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Donner une équation du plan tangent à Σ en M

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Droite tangente à une courbe

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Remarque Droite tangente à une courbe.

Droite tangente à une courbe

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Remarque Droite tangente à une courbe.

Exercice

On considère l'ellipse \mathcal{E} d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soit $M(x_0, y_0)$ un point de \mathcal{E} , donner l'équation de la droite tangente en M .

On admet :

Théorème - Paramétrage

Considérons une courbe \mathcal{C} et $M(x_0, y_0)$ un point régulier de cette surface.

On suppose que \mathcal{C} a pour équation implicite $g(x_0, y_0) = 0$.

Alors : il existe un paramétrage de classe \mathcal{C}^1 de la courbe \mathcal{C} .

Autrement : il existe $\epsilon > 0$, $x, y :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ tels que

- ▶ $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.
- ▶ La courbe paramétrée $(x(t), y(t))$ a la même représentation localement que \mathcal{C}

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

On admet :

Théorème - Paramétrage

Considérons une courbe \mathcal{C} et $M(x_0, y_0)$ un point régulier de cette surface.

On suppose que \mathcal{C} a pour équation implicite $g(x_0, y_0) = 0$.

Alors : il existe un paramétrage de classe \mathcal{C}^1 de la courbe \mathcal{C} .

Autrement : il existe $\epsilon > 0$, $x, y :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ tels que

- ▶ $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.
- ▶ La courbe paramétrée $(x(t), y(t))$ a la même représentation localement que \mathcal{C}

Analyse Fonctions implicites

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

On admet :

Théorème - Paramétrage

Considérons une courbe \mathcal{C} et $M(x_0, y_0)$ un point régulier de cette surface.

On suppose que \mathcal{C} a pour équation implicite $g(x_0, y_0) = 0$.

Alors : il existe un paramétrage de classe \mathcal{C}^1 de la courbe \mathcal{C} .

Autrement : il existe $\epsilon > 0$, $x, y :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ tels que

- ▶ $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.
- ▶ La courbe paramétrée $(x(t), y(t))$ a la même représentation localement que \mathcal{C}

Analyse Fonctions implicites

Application Thermodynamique

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

**5.2. Interprétation physique du
gradient**

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Heuristique. Interprétation géométrique du gradient

Soit $\vec{a} \in U$. Dans la direction donnée par \vec{u} , la variation donnée par f est

$$f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a}) = h\langle \nabla f(\vec{a}); \vec{u} \rangle$$

Nous savons que le produit scalaire est maximale lorsque les deux vecteurs multiplié sont colinéaires (optimisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Donc pour h donné, la variation $f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})$ est extrémale si u est colinéaire à $\nabla f(\vec{a})$.

Par conséquent, $\nabla f(\vec{a})$ indique la plus forte pente (variation) de f en a .

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

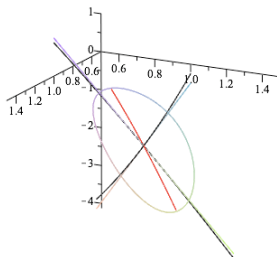
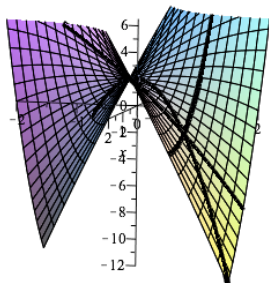
5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Exemple Retour sur la fonction $f(x, y) \rightarrow x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 4xy + 2$



1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

On peut dire encore mieux :

Proposition - Gradient

Soit \vec{a} un point régulier de f .

Supposons que $f(\vec{a}) = C$.

Alors : $\nabla f(\vec{a})$ est orthogonal à la ligne de niveau $f(\vec{x}) = C$,
dans le sens des lignes de valeurs croissantes.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Heuristique. Etude des extremum

Dans le cadre des fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} , il est légitime de chercher des extremums, puisque l'ensemble d'arrivée est \mathbb{R} muni d'une relation d'ordre.

Nous allons essayer de répondre à cette question. Souvenons que pour les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 , la nullité de la dérivée en x_0 est un critère nécessaire pour affirmer que $f(x_0)$ est un maximum (ou minimum) local de f .

Attention ce n'est pas une condition suffisante : penser à $x \mapsto x^3$ dont la dérivée s'annule en 0...

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Définition - Extremum

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\vec{a} \in U$

On dit que f admet un maximum (resp. minimum) global sur U en \vec{a}

ssi $\forall \vec{x} \in U, f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$ (resp. $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$)

On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en \vec{a}

ssi $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall \vec{x} \in U \cap B_\epsilon(\vec{a}), f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$ (resp. $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$).

Un maximum (resp. minimum) global est un maximum (resp. minimum) local.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Définition - Extremum

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\vec{a} \in U$

On dit que f admet un maximum (resp. minimum) global sur U en \vec{a}

ssi $\forall \vec{x} \in U, f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$ (resp. $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$)

On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en \vec{a}

ssi $\exists \epsilon > 0$ tel que $\forall \vec{x} \in U \cap B_\epsilon(\vec{a}), f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$ (resp. $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$).

Un maximum (resp. minimum) global est un maximum (resp. minimum) local.

Remarque Extrema

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Définition - Points critiques

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U .

On dit que \vec{a} est un point critique de f si $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Définition - Points critiques

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U .

On dit que \vec{a} est un point critique de f si $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$

Remarque Les dérivées partielles en \vec{a}

Proposition - Point critique et optimalité

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Supposons que f possède un extremum local en \vec{a} .

Alors : \vec{a} est un point critique de f

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Proposition - Point critique et optimalité

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Supposons que f possède un extremum local en \vec{a} .

Alors : \vec{a} est un point critique de f

Attention. La condition n'est que nécessaire

Penser un point-col (comme sur la figure 1 de ce chapitre), qui admet au point col un point critique (maximal selon x et minimal selon y), mais pas d'extremum

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Proposition - Point critique et optimalité

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Supposons que f possède un extremum local en \vec{a} .

Alors : \vec{a} est un point critique de f

Attention. La condition n'est que nécessaire

Penser un point-col (comme sur la figure 1 de ce chapitre), qui admet au point col un point critique (maximal selon x et minimal selon y), mais pas d'extremum

Démonstration

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Remarque Ouvert, fermé et compact

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Remarque Ouvert, fermé et compact

Savoir-faire. Recherche d'extremum

Considérons f dont on recherche un extremum.

1. On montre l'existence de cet extremum en appliquant le théorème de continuité sur un fermé borné K .
2. (a) On considère ensuite son intérieur. C'est un ouvert et on recherche les points critiques.

Localement, on regarde s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

On étudie donc $f(\vec{x}) - f(\vec{a})$.

Directement ou bien avec l'aide d'un DL d'ordre 2 (si possible) :

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \underbrace{0}_{\text{point critique}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{a})(x - a_i)^2 + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|^2)$$

qu'on étudie...

(b) On recherche les points sur la frontière.

Souvent ce sera un ensemble où chaque x_i est bloqué sauf un.

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Remarque Système d'équations, non linéaires

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Remarque Système d'équations, non linéaires

Exercice

Etudier les extremums globaux de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$
sur $U = [0, 3] \times [1, 5]$.

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Optimisation sous contrainte

Analyse Problématique

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Analyse Problématique

On a le théorème suivant, dont on donnera une démonstration l'année prochaine.

On notera qu'il s'agit d'un critère nécessaire et non suffisant :

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Analyse Problématique

On a le théorème suivant, dont on donnera une démonstration l'année prochaine.

On notera qu'il s'agit d'un critère nécessaire et non suffisant :

Théorème. Extrema lié. Optimisation sous contrainte

Soient f et g_1, \dots, g_r sont des fonctions numériques définies et de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U de E ,

Notons X l'ensemble des zéros de g_1, g_2, \dots, g_r .

Si $\vec{x} \in X$, avec $\forall i \in \mathbb{N}_r, dg_i(\vec{x}) \neq 0$ et si $f|_{g_1, \dots, g_r}$ admet un extremum en \vec{x} , alors $\nabla f(\vec{x}) \in \text{vect}(\nabla g_1(\vec{x}), \dots, \nabla g_r(\vec{x}))$.

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Analyse Problématique

On a le théorème suivant, dont on donnera une démonstration l'année prochaine.

On notera qu'il s'agit d'un critère nécessaire et non suffisant :

Théorème. Extrema lié. Optimisation sous contrainte

Soient f et g_1, \dots, g_r sont des fonctions numériques définies et de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert U de E ,

Notons X l'ensemble des zéros de g_1, g_2, \dots, g_r .

Si $\vec{x} \in X$, avec $\forall i \in \mathbb{N}_r, dg_i(\vec{x}) \neq 0$ et si $f|_{g_1, \dots, g_r}$ admet un extremum en \vec{x} , alors $\nabla f(\vec{x}) \in \text{vect}(\nabla g_1(\vec{x}), \dots, \nabla g_r(\vec{x}))$.

Remarque Si $r = 1$

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Application Maximum d'entropie

$H : (x, y) \mapsto -x \ln x - y \ln y - z \ln z$ sous les contraintes

$$x + y + z = 1 \text{ et } xE_1 + yE_2 + zE_3 = E$$

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Multiplicateur de Lagrange

Application Maximum d'entropie

$H : (x, y) \mapsto -x \ln x - y \ln y - z \ln z$ sous les contraintes
 $x + y + z = 1$ et $xE_1 + yE_2 + zE_3 = E$

Savoir-faire. Multiplicateurs de Lagrange

Soit à optimiser f sous les contraintes g_1, \dots, g_r sur le domaine U , ouvert de \mathbb{R}^p .

On considère $H : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_p, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto f(x_1, \dots, x_p) - \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_p) + \dots + \lambda_r g_r(x_1, \dots, x_p)$.

Alors si \vec{x} est un optimum sous contrainte (« optimum lié »), nécessairement \vec{x} est (la première partie d')un point critique de H .

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Multiplicateur de Lagrange

Application Maximum d'entropie

$H : (x, y) \mapsto -x \ln x - y \ln y - z \ln z$ sous les contraintes

$$x + y + z = 1 \text{ et } xE_1 + yE_2 + zE_3 = E$$

Savoir-faire. Multiplicateurs de Lagrange

Soit à optimiser f sous les contraintes g_1, \dots, g_r sur le domaine U , ouvert de \mathbb{R}^p .

On considère $H : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_p, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto f(x_1, \dots, x_p) - \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_p) + \dots + \lambda_r g_r(x_1, \dots, x_p)$.

Alors si \vec{x} est un optimum sous contrainte (« optimum lié »), nécessairement \vec{x} est (la première partie d')un point critique de H .

Application Distribution de Boltzmann

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Conclusion

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Conclusion

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

- ▶ Si G est le graphe $z = f(x, y)$ explicite, il admet un plan tangent en tout point régulier.

Son équation est $z = z_0 + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

- ▶ Si G est le graphe $z = f(x, y)$ explicite, il admet un plan tangent en tout point régulier.

Son équation est $z = z_0 + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$

- ▶ Si G est la courbe implicite $G = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\}$, elle admet une tangente en tout point régulier.

Son équation est $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

- ▶ Si G est la courbe paramétrique $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, elle admet une tangente en tout point régulier M_0

Son équation est $M_0 + \text{vect} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right)$

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Conclusion

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

- ▶ Si G est le graphe $z = f(x, y)$ explicite, il admet un plan tangent en tout point régulier.

Son équation est $z = z_0 + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$

- ▶ Si G est la courbe implicite $G = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\}$, elle admet une tangente en tout point régulier.

Son équation est $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

- ▶ Si G est la courbe paramétrique $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, elle admet une tangente en tout point régulier M_0

Son équation est $M_0 + \text{vect} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right)$

- ▶ Si $g(x_0, y_0) = 0$, de classe \mathcal{C}^1 et (x_0, y_0) régulier. Alors il existe un paramétrage $x, y :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , tels que $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ et pour tout $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $g(x(t), y(t)) = 0$.

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Conclusion

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

- ▶ Si G est le graphe $z = f(x, y)$ explicite, il admet un plan tangent en tout point régulier.

Son équation est $z = z_0 + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$

- ▶ Si G est la courbe implicite $G = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\}$, elle admet une tangente en tout point régulier.

Son équation est $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$

- ▶ Si G est la courbe paramétrique $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, elle admet une tangente en tout point régulier M_0

Son équation est $M_0 + \text{vect} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right)$

- ▶ Si $g(x_0, y_0) = 0$, de classe \mathcal{C}^1 et (x_0, y_0) régulier. Alors il existe un paramétrage $x, y :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 , tels que $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ et pour tout $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, $g(x(t), y(t)) = 0$.

- ▶ On peut aussi écrire y en fonction de x . Très souvent exploité en physique !

- ▶ Le gradient indique la plus forte pente

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Conclusion

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Conclusion

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

- ▶ Sur un compact (=fermé borné dans \mathbb{R}^n), une fonction continue est bornée et atteint ses bornes

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Conclusion

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

Conclusion

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à
une surface

5.2. Interprétation physique du
gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés

⇒ Visualisation

⇒ Optimisation

Objectifs

⇒ Visualisation de la dérivation

⇒ Optimisation

Pour le prochain cours

- ▶ Lecture : Sommabilité
- ▶ Exercice n°875, 876 & 877

1. Problèmes

2. Topologie

3. Continuité

4. Calcul différentiel

5. Visualisation

5.1. Tangente à une courbe, à une surface

5.2. Interprétation physique du gradient

5.3. Optimum libre

5.4. Optima liés