Devoir à la maison n°2

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Problème

Dans ce problème, on cherche à retrouver un résultat obtenu par Gauss (1777-1855) lorsqu'il avait 17 ans : « *il est possible de couper un disque en 17 parts égales uniquement avec une règle et un compas* ».

Pour l'ensemble du problème, on note

$$\xi_k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{17}\right)$$

On considère également $r_{17} : x \mapsto$ le reste de la division euclidienne de x par 17.
Une autre notation apparaîtra par la suite en fin de première partie.

0. Montrer que

$$\forall\ h, k \in \mathbb{Z}, \qquad \xi_h \times \xi_k = \xi_{h+k}$$

A. Une racine primitive 17ᵉ

1. Pour tout $s \in [\![0, 16]\!]$, exprimer $r_{17}(3^s)$.
   On pourra faire un tableau, sur la première ligne figure s et sur la seconde figure $r_{17}(3^s)$.

On définit

$$f : \begin{array}{ccc} [\![0, 15]\!] & \longrightarrow & [\![1, 16]\!] \\ s & \longmapsto & r_{17}(3^s) \end{array}$$

2. Montrer que f est une application bijective.

Par la suite, on notera

$$\forall\ s \in [\![0, 15]\!], \xi_{[s]} = \xi_{f(s)} \text{ où } f(s) \in [\![1, 16]\!]$$

B. Factorisation de $z^{17} - 1$

On considère maintenant les nombres $\sigma_{i,j}$ définie par :

$$\forall\ i \in \mathbb{N}, \forall\ j \in [\![0, i-1]\!], \qquad \sigma_{i,j} = \sum_{s \equiv j[i]} \xi_{[s]}$$

Seuls les nombres $\sigma_{2,j}$, $\sigma_{4,j}$ et $\sigma_{8,j}$ nous seront vraiment utiles.

1. Ecriture polynomiale
   (a) Donner le polynôme $R(z)$ tel que

   $$\forall\ z \in \mathbb{C}, \qquad z^{17} - 1 = (z-1) \times R(z)$$

   On cherche à factoriser R
   (b) Quelles sont les racines (complexes) de R ?
   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{s=0}^{15} \xi_{[s]} = -1$.
   (d) Que vaut $\displaystyle\prod_{s=0}^{15} \xi_{[s]}$?
   Ce résultat ne nous servira pas pour la suite du problème
2. Etude de $\sigma_{2,j}$
   (a) Calculer $\sigma_{2,0} + \sigma_{2,1}$.
   (b) Calculer $\sigma_{2,0} \times \sigma_{2,1}$.

(c) En déduire que $\sigma_{2,0}$ et $\sigma_{2,1}$ sont les racines du polynômes à coefficients entiers :

$$z^2 + z - 4$$

En déduire une expression (avec $\sqrt{17}$) de $\sigma_{2,0}$ et $\sigma_{2,1}$

3. Etude de $\sigma_{4,j}$

(a) Comme précédemment, montrer que $\sigma_{4,0}$ et $\sigma_{4,2}$ sont les deux racines du polynôme

$$z^2 - \sigma_{2,0} z - 1$$

(b) En déduire que

$$\sigma_{4,0} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right)$$

Exprimer de même $\sigma_{4,2}$

(c) Avec un raisonnement équivalent, donner les expressions de $\sigma_{4,1}$ et $\sigma_{4,3}$.

4. Etude de $\sigma_{8,j}$

(a) Montrer que $\sigma_{8,0} = \xi_1 + \xi_{16}$, puis que $\sigma_{8,0} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$

(b) Exprimer le polynôme dont $\sigma_{8,0}$ et $\sigma_{8,4}$ sont les deux racines.

(c) En déduire

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}$$

C. Un peu de géométrie

1. Etant donné un cercle de rayon 1, dont on connait le centre, comment peut-on obtenir la longueur $\sqrt{17}$, en se servant uniquement d'un compas et d'une règle ?
2. Etant donné un cercle de rayon 1, comment peut-on obtenir la longueur $\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$, en se servant uniquement d'un compas et d'une règle ?
3. (...)