Devoir surveillé n°1

Durée de l'épreuve : 3 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé de deux exercices et d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$.
La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice 1 (*)

On affirme que le nombre 2^{29} possèdent 9 chiffres, tous distincts.
Quel est le chiffre qui manque ?
On pourra exploiter « la preuve par 9 »

Exercice 2

Dans cet exercice, on démontre l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Puis on applique cette inégalité pour localiser les racines d'un polynômes.

1. Soient $(x_1, \dots x_n), (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Soient $i < j \in [\![1, n]\!]$, montrer que $2x_i x_j y_i y_j \leqslant x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2$
   (b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\forall\ (x_1, \dots x_n), (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$
2. Soit $P : x \mapsto x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, une fonction polynomiale de degré n.
   On suppose que P a ses n racines dans $\mathbb{R}$. On peut donc écrire
$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - y_1)\dots(x - y_{n-1})(x - y_n)$$
   (a) Exprimer $y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, en fonction de a_{n-1}.
   (*On développera la factorisation de P, on pourra effectuer une identification*)
   (b) De même donner la valeur de $y_n(y_1 + \cdots + y_{n-1}) + \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} y_i y_j$
   (c) En déduire que $a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y_n^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$
   (d) En exploitant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la question précédente montrer que
$$(a_{n-1} + y_n)^2 \leqslant (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y_n^2)$$
   (e) En déduire que (*)
$$y_n \in \left[-\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}; -\frac{a_{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}\right]$$
   (*On pourra montrer que y_n est située entre deux racines d'un polynôme de degré 2*)

Problème

Le but de ce problème est d'écrire pour tout entier p, la somme $\sum_{k=0}^{n} k^p$ sous une forme plus simple, plus précisément sous la forme d'un polynôme de degré $p+1$ en n.
On notera pour tout entiers p et n,

$$P_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$$

On se contera de mettre en place trois stratégies différentes pour étudier le cas $p = 4$. On peut généraliser chacune...

A. Rappels de cours
Pour les questions suivantes, les justifications ne sont pas nécessaires, il s'agit d'appliquer directement les formules du cours.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier les expressions de $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3$
2. En déduire les expressions de P_1, P_2 et P_3 (on notera x, et non n, la variable).
   Quels sont les degrés de chacun de ces polynômes ?
3. Quelle expression peut-on donner à P_0 ?

D'après cette première partie, il semblerait que $P_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$ peut s'écrire plus simplement sous la forme d'un polynôme de degré $p+1$ (lorsque $p = 0$, 1, 2 ou 3), et dont la variable est n.

B. En exploitant un système
1. Résoudre le système suivant en fonction de λ :

$$(S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} v & + & w & + & x & + & y & + & z & = & 1 \\ 32v & + & 16w & + & 8x & + & 4y & + & 2z & = & 17 \\ 243v & + & 81w & + & 27x & + & 9y & + & 3z & = & 98 \\ 1024v & + & 256w & + & 64x & + & 16y & + & 4z & = & 354 \\ 3125v & + & 625w & + & 125x & + & 25y & + & 5z & = & 979 \end{array}\right.$$

2. Quel rapport existe-t-il entre le système (S_4) et le polynôme P_4 ?
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Proposez une méthode s'inspirant des questions précédentes, qui permet de trouver le polynôme P_p, *si l'on admet que P_p est un polynôme de degré $p+1$ en n.*

C. Recherche de P_4
Supposons donc que $P_4(n)$ est un polynôme de degré 5.
Ainsi supposons que $P_4(n) = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + Fn^5$, défini avec 6 inconnues.

1. Que vaut $P_4(0)$, en déduire la valeur de A
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Développer $\sum_{k=0}^{n+1} k^4 - \sum_{k=0}^{n} k^4$(*On utilisera la formule du binôme de Newton*).
   (b) En utilisant les inconnues B, C, D, E et F exprimer $P_4(n+1) - P_4(n)$ sous forme d'un polynôme de degré 4 de la variable n.
   (c) Déduire de ces deux questions une égalité entre deux polynômes en n
3. Pourquoi peut-on faire l'identification entre les coefficients des deux polynômes précédents ?
4. Montrer donc que si $P_4(n) = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + Fn^5$, alors B, C, D, E et F sont les solutions d'un système linéaire échelonné. Résoudre ce système
5. Montrer alors par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad P_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

6. Calculer $P_4(-1)$ et $P_4(\frac{-1}{2})$.
   Donner alors une factorisation de P_4 sous forme d'un produit d'un polynôme de degré 2 (qu'on ne cherchera pas à factoriser) et de trois polynômes de 1.

D. Avec les coefficients binomiaux

On définit les deux familles de polynômes suivants :

$$S_1(x) = x \ ; \ S_2(x) = x^2 \ ; \ S_3(x) = x^3 \ ; \ S_4(x) = x^4 \text{ et } S_5(x) = x^5$$

$$T_1(x) = x \ ; \ T_2(x) = x(x+1) \ ; \ T_3(x) = x(x+1)(x+2) \ ;$$

$$T_4(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) \text{ et } T_5(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

1. Montrer que
$$\forall\ p \in \mathbb{N}, \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \binom{k+p-1}{p} = \binom{n+p}{p+1}$$
2. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\forall\ p \in \mathbb{N}^*, p \leqslant 5, \forall\ n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} T_p(k) = \frac{1}{p+1} T_{p+1}(n)$$
3. Pour tout $i \in [\![1;5]\!]$, développer T_i, puis exprimer T_i sous forme de combinaison linéaire des S_j.
4. On note (S_T) le système suivant à paramètre (le second membre)
$$(S_T) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & & & & & & & = & t_1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & t_2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & t_3 \\ 6x_1 & + & 11x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & & & = & t_4 \\ 24x_1 & + & 50x_2 & + & 35x_3 & + & 10x_4 & + & x_5 & = & t_5 \end{array} \right.$$
Quel rapport entre le système (S_T) et la question précédente ?
5. Résoudre (S_T)
6. En déduire, pour tout $j \in [\![1;5]\!]$, l'expression de S_j sous forme de combinaison linéaire des T_i.
7. Exprimer $P_4(n)$ en fonction de $\sum_{k=0}^{n} S_4(k)$, puis des (T_i) et enfin en fonction des (S_j).
Retrouver le résultat des questions $B.5.$ et $C.4.$