Devoir surveillé n°1
CORRECTION

Exercice 1 (*)
Pour tout entier n, on note $r_9(n)$, le reste de la division euclidienne de n par 9.
Nous savons que la somme des chiffres d'un nombre est égale à sa valeur modulo 9.
Nous allons chercher cette valeur. Pour cela nous remarquons que

$$r_9(a \times b) = r_9(r_9(a) \times r_9(b))$$

(ou bien cela est directement égal à $r_9(a) \times r_9(b)$, si ce nombre est plus petit que 9).
En effet :

$$a \times b = \big(9q_9(a) + r_9(a)\big) \times \big(9q_9(b) + r_9(b)\big) = 9\big(9q_9(a)q_9(b) + q_9(b)r_9(a) + q_9(a)r_9(b)\big) + (r_9(a)r_9(b))$$

Et donc pour tout entier k, $r_9(2^{k+1}) = r_9(2 \times r_9(2^k))$. /2
On peut faire un tableau des valeurs de $r_9(2^k)$ est voir que celles-ci sont cycliques :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$r_9(2^k)$	1	2	4	8	$1+6=7$	$1+4=5$	$1+0=1$	2	...

Ainsi la suite $(r_9(2^k))$ est la suite $(1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, 4, 8, \dots)$ cyclique, avec un cycle de longueur 6. /2
Par conséquent : $r_9(2^{29}) = r_9(2^{23}) = r_9(2^{17}) = \cdots = r_9(2^5) = 5$. /2
Puis, d'après l'énoncé, 2^{29} possède 9 chiffres, s'il possédait tous les chiffres de 0 à 9, la somme des chiffres de son écriture serait :

$$0 + 1 + \cdots + 9 = \sum_{k=0}^{9} k = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

Or $r_9(45) = 0$, pour obtenir $r_9(2^{29}) = 5$, il faut que la somme des chiffres soit égale à $36+5 = 41 = 45-4$. /3
Donc nécessairement,

$$\boxed{\text{le chiffre absent dans l'écriture décimale de } 2^{29} \text{ est le } 4}$$

Remarques !
Si on a une calculatrice ou du courage, on peut vérifier : $2^{29} = 536\,870\,912$

Exercice 2
1. Soient $(x_1, \dots x_n), (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$,

   $$0 \leqslant (x_i y_j - x_j y_i)^2 = x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i x_j y_i y_j$$

   On en déduit /1

   $$\boxed{\forall\, i < j \in [\![1, n]\!], \quad 2x_i x_j y_i y_j \leqslant x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2}$$

   (b)

   $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2 y_j^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i x_j y_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i^2 y_j^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2 - \sum_{i \neq j} x_i y_i x_j y_j \\ &= \sum_{i<j} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2) - 2\sum_{i<j} x_i y_i x_j y_j \geqslant 0\end{aligned}$$

d'après l'inégalité précédente. Donc $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.
On en déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz : /2

$$\boxed{\forall\ (x_1, \ldots x_n), (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Remarques !
Comme le terme de droite est nécessairement positif, on peut prendre la racine carrée.
Et on obtient la véritable inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall\ (x_1, \ldots x_n), (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

2. Soit $P : x \mapsto x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, une fonction polynomiale de degré n.
On suppose que P a ses n racines dans $\mathbb{R}$. On peut donc supposer

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - y_1) \ldots (x - y_{n-1})(x - y_n)$$

(a) Si on développe le polynôme $(x - y_1) \ldots (x - y_{n-1})(x - y_n)$, on trouve

$$x^n - (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)x^{n-1} + (\sum_{i<j} y_i y_j)x^{n-1} + \ldots$$

On peut identifier (écriture unique à un facteur multiplicatif près, mais ici il vaut $a_n = 1$).
Donc /1

$$\boxed{y_1 + y_2 + \cdots + y_n = -a_{n-1}}$$

(b) De même, si on regarde le second coefficient (en s'intéressant au cas $j = n$) : /1

$$\boxed{a_{n-2} = \sum_{i<j} y_i y_j = (y_1 + \ldots y_{n-1})y_n + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n-1} y_i y_j}$$

(c) On a alors

$$a_{n-1}^2 = (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2 = (y_1 + \cdots + y_{n-1})^2 + y_n^2 + 2y_n(y_1 + \ldots y_{n-1})$$

$$= (y_1 + \cdots + y_{n-1})^2 + y_n^2 + 2a_{n-2} - 2 \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n-1} y_i y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} y_1^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n-1} y_i y_j + y_n^2 + 2a_{n-2} - 2 \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n-1} y_i y_j$$

Ainsi /2

$$\boxed{a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2}$$

(d) D'après la question 2.(a), $(a_{n-1} + y_n)^2 = (-y_1 - y_2 - \cdots - y_{n-1})^2 = (\sum_{i=1}^{n-1} y_i)^2$.
On applique ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(y_1, y_2 \ldots y_{n-1})$ et $(1, 1, \ldots 1)$: /1

$$(a_{n-1} + y_n)^2 = (\sum_{i=1}^{n-1} y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \sum_{i=1}^{n-1} 1^2 = (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

Puis tenant compte de la réponse à la question précédente : /1

$$\boxed{(a_{n-1} + y_n)^2 \leqslant (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y_n^2)}$$

(e) On trouve donc l'inégalité quadratique suivante vérifiée par y_n :

$$y_n^2 + (n-1)y_n^2 + 2a_{n-1}y_n + a_{n-1}^2 + 2(n-1)a_{n-2} - (n-1)a_{n-1}^2 \leqslant 0$$

En divisant tout par n : /1

$$y_n^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}y_n + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} + \frac{2-n}{n}a_{n-1}^2 \leqslant 0$$

Considérons le polynôme du second degré $P(x) = x^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}x + \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} + \frac{2-n}{n}a_{n-1}^2$.
Alors nous venons de montrer que $P(y_n) \leqslant 0$.
Or comme le coefficient devant x^2 est positif, on a
$P(y_n) \leqslant 0$ si et seulement si y_n est situé entre les deux racines de P. /2
Celles-ci se calculent ; le discriminant de P est

$$\Delta = 4\left(\frac{a_{n-1}^2}{n^2} - \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2} + \frac{n-2}{n}a_{n-1}^2\right) = 4\left(\frac{(n-1)^2}{n^2}a_{n-1}^2 - \frac{2(n-1)}{n}a_{n-2}\right)$$

$$= \frac{4(n-1)^2}{n^2}\left(a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}\right)$$

Donc les racine de P sont de la forme /1

$$\frac{-\frac{2a_{n-1}}{n} \pm \sqrt{4\frac{(n-1)^2}{n^2}\left(a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}\right)}}{2}$$

Donc

$$\boxed{y_n \in \left[-\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}; -\frac{a_{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}\right]}$$ /1

Remarques !
Ce résultat a été démontré par le mathématicien français Edmond Laguerre *(1834-1886). Il permet de localiser les racines d'un polynôme et de ne pas chercher « trop loin »lorsqu'on vise une racine par tâtonnement.*

Problème

On notera pour tout entiers p et n, $P_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$

A. Rappels de cours

1. Il s'agit de formules du cours, à savoir par coeur, et jusqu'à la fin des temps : /1,5

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

2. Donc /1

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad P_1(x) = \frac{1}{2}(x^2+x) \quad P_2(x) = \frac{1}{6}(2x^3+3x+x) \quad P_3(x) = \frac{1}{4}(x^4+2x^3+x^2)}$$

On remarque que /0,5

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \{1,2,3\}, \deg(P_k) = k+1}$$

3. Comme $\sum_{k=0}^{n} k^p = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$,
pour P_0, on peut prendre

$$\boxed{P_0(x) = x+1}$$

/1

Remarques !
On acceptera dans la correction $0^0 = 0$ (et non 1) ce qui donnerait $P_0(x) = x$

B. En exploitant un système

1. Compte-tenu de la hauteur des nombres, on va plutôt choisir les pivots de droite à gauche.

$$(S_4) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl|l}
v &+& w &+& x &+& y &+& z &=& 1 & \\
30v &+& 14w &+& 6x &+& 2y & & &=& 15 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
240v &+& 78w &+& 24x &+& 6y & & &=& 95 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\
1020v &+& 252w &+& 60x &+& 12y & & &=& 350 & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \\
3120v &+& 620w &+& 120x &+& 20y & & &=& 974 & L_5 \leftarrow L_5 - 5L_1
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl|l}
v &+& w &+& x &+& y &+& z &=& 1 & \\
30v &+& 14w &+& 6x &+& 2y & & &=& 15 & \\
150v &+& 36w &+& 6x & & & & &=& 50 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\
840v &+& 168w &+& 24x & & & & &=& 260 & L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1 \\
2820v &+& 480w &+& 60x & & & & &=& 824 & L_5 \leftarrow L_5 - 10L_1
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl|l}
v &+& w &+& x &+& y &+& z &=& 1 & \\
30v &+& 14w &+& 6x &+& 2y & & &=& 15 & \\
150v &+& 36w &+& 6x & & & & &=& 50 & \\
240v &+& 24w & & & & & & &=& 60 & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_3 \\
1320v &+& 120w & & & & & & &=& 324 & L_5 \leftarrow L_5 - 10L_3
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl|l}
v &+& w &+& x &+& y &+& z &=& 1 & \\
30v &+& 14w &+& 6x &+& 2y & & &=& 15 & \\
150v &+& 36w &+& 6x & & & & &=& 50 & \\
240v &+& 24w & & & & & & &=& 60 & \\
120v & & & & & & & & &=& 24 & L_5 \leftarrow L_5 - 5L_3
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl|l}
v &+& w &+& x &+& y &+& z &=& 1 & \\
30v &+& 14w &+& 6x &+& 2y & & &=& 15 & \\
150v &+& 36w &+& 6x & & & & &=& 50 & \\
 & & 24w & & & & & & &=& 12 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_5 \\
v & & & & & & & & &=& \frac{1}{5} & L_5 \leftarrow \frac{1}{120}L_5
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl|l}
v &+& w &+& x &+& y &+& z &=& 1 & \\
30v &+& 14w &+& 6x &+& 2y & & &=& 15 & \\
 & & & & 6x & & & & &=& 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 150L_5 - \frac{3}{2}L_4 \\
 & & w & & & & & & &=& \frac{1}{2} & L_4 \leftarrow \frac{1}{24}L_4 \\
v & & & & & & & & &=& \frac{1}{5} &
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl|l}
v &+& w &+& x &+& y &+& z &=& 1 & \\
 & & & & & & 2y & & &=& 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 30L_5 - 14L_4 - L_3 \\
 & & & & x & & & & &=& \frac{1}{3} & L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3 \\
 & & w & & & & & & &=& \frac{1}{2} & \\
v & & & & & & & & &=& \frac{1}{5} &
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl|}
v &+& w &+& x &+& y &+& z &=& \frac{-1}{30} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 - L_4 - L_5 \\
 & & & & & & 2y & & &=& 0 \\
 & & & & x & & & & &=& \frac{1}{3} \\
 & & w & & & & & & &=& \frac{1}{2} \\
v & & & & & & & & &=& \frac{1}{5}
\end{array}\right.$$

On trouve donc /3

$$\boxed{v = \frac{1}{5}, \quad w = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{1}{3}, \quad y = 0, \quad z = \frac{-1}{30}}$$

2. Il s'agit des 5 équations liant $P_4(k)$ à $R_4(k)$ si $R_4 = vX^5 + wX^4 + xX^3 + yX^2 + zX$ avec k variant de 1 à 5. /2

   $\boxed{\text{En résolvant le système, on trouve donc l'expression polynomiale de } P_4.}$

   La raison pour laquelle ce polynôme n'a pas de terme constant est expliquée plus bas.

3. On peut directement résoudre un système de $p+1$ inconnues (le coefficient constant est nul).
   Il faut donc (au moins) prendre également $p+1$ équations.
   Plus p augmente, plus le calcul est compliqué... /1

C. Recherche de P_4

Supposons que $P_4(n) = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + Fn^5$, défini avec 6 inconnues.

1. $P_4(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^4 = 0^4 = 0$ et $A + B \times 0 + C \times 0^2 + D \times 0^3 + E \times 0^4 + F \times 0^5 = A$.
   Donc avec l'hypothèse initiale, on a nécessairement
   $$\boxed{A = 0}$$
   /1

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) En exploitant formule du binôme de Newton pour $n = 4$:
   /1
   $$\boxed{\sum_{k=0}^{n+1} k^4 - \sum_{k=0}^{n} k^4 = (n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}$$
   (b) Et par ailleurs
   $$\begin{aligned} P_4(n+1) - P_4(n) &= \big(B(n+1) + C(n+1)^2 + D(n+1)^3 + E(n+1)^4 + F(n+1)^5\big) \\ &\quad - \big(Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + Fn^5\big) \\ = \big(Bn + B + Cn^2 &+ 2Cn + C + Dn^3 + 3Dn^2 + 3Dn + D + En^4 + 4En^3 + 6En^2 + 4En + E \\ &+ Fn^5 + 5Fn^4 + 10Fn^3 + 10Fn^2 + 5Fn + F\big) - \big(Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + Fn^5\big) \end{aligned}$$
   /2
   $$\boxed{\begin{aligned} P_4(n+1) - P_4(n) = \quad &(B + C + D + E + F) + (2C + 3D + 4E + 5F)n \\ &+ (3D + 6E + 10F)n^2 + (4E + 10F)n^3 + 5Fn^4 \end{aligned}}$$
   (c) Enfin, comme $P_4(n+1) - P_4(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^4 - \sum_{k=0}^{n} k^4$, on a donc :
   /1
   $$\boxed{\begin{gathered} (B + C + D + E + F) + (2C + 3D + 4E + 5F)n + (3D + 6E + 10F)n^2 + (4E + 10F)n^3 + 5Fn^4 \\ = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 \end{gathered}}$$

3. Le résultat précédent est vrai, pour tout entier n.
   Il faudrait donc écrire un système avec une infinité d'équation (liée à une infinité de valeurs pour n), il n'y a qu'une seule possibilité :
   /2
   $$\boxed{\text{faire l'identification entre les coefficients des deux polynômes précédents.}}$$

Remarques !

En fait, il faudrait :

(a) Prendre la valeur en $n = 0$

(b) Identifier les coefficients constants

(c) Soustraire de part et d'autre par ce nombre

(d) Factoriser par n les deux polynômes soustrait et simplifier

(e) Recommencer à l'étude 1 jusqu'à « vider » les polynômes

4. Par conséquent si $P_4(n) = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + Fn^5$, alors on a (identification) :
   $$(S') \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} B & + & C & + & D & + & E & + & F & = & 1 \\ & & 2C & + & 3D & + & 4E & + & 5F & = & 4 \\ & & & & 3D & + & 6E & + & 10F & = & 6 \\ & & & & & & 4E & + & 10F & = & 4 \\ & & & & & & & & 5F & = & 1 \end{array} \right.$$
   $$(S') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccccccc|r} B & + & C & + & D & + & E & & = & \frac{4}{5} & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{5}L_5 \\ & & 2C & + & 3D & + & 4E & & = & 3 & L_2 \leftarrow L_2 - L_5 \\ & & & & 3D & + & 6E & & = & 4 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_5 \\ & & & & & & 4E & & = & 2 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_5 \\ & & & & & & & F & = & \frac{1}{5} & L_5 \leftarrow \frac{1}{5}L_5 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc|l} B & + & C & + & D & = & \frac{3}{10} & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{4}L_4 \\ & & 2C & + & 3D & = & 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ & & & & 3D & = & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_4 \\ & & & & E & = & \frac{1}{2} & L_4 \leftarrow \frac{1}{4}L_4 \\ & & & & F & = & \frac{1}{5} & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc|l} B & + & C & = & \frac{-1}{30} & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3 \\ & & 2C & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ & & D & = & \frac{1}{3} & L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \\ & & E & = & \frac{1}{2} & \\ & & F & = & \frac{1}{5} & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc|l} B & = & \frac{-1}{30} & L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ C & = & 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ D & = & \frac{1}{3} & \\ E & = & \frac{1}{2} & \\ F & = & \frac{1}{5} & \end{array}\right.$$

/1,5

$$\boxed{B = \frac{-1}{30}, C = 0, D = \frac{1}{3}, E = \frac{1}{2}, F = \frac{1}{5}}$$

5. Posons pour tout entier n, $\mathcal{Q}_n$: “$P_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$”.
   — $P_4(0) = \sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$ et $\frac{1}{5}0^5 + \frac{1}{2}0^4 + \frac{1}{3}0^3 - \frac{1}{30}0 = 0$,
   donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie,
   donc $P_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = Fn^5 + En^4 + Dn^3 + Cn^2 + Bn$.
   Puis $P_4(n+1) = P_4(n) + (n+1)^4$,
   or d'après les questions 2 et 4, les coefficients B, C, D, E et F ont été choisis de telle sorte que

$$Fn^5+En^4+Dn^3+Cn^2+Bn+(n+1)^4 = F(n+1)^5+E(n+1)^4+D(n+1)^3+C(n+1)^2+B(n+1)$$

   Donc $P_4(n+1) = \frac{1}{5}(n+1)^5 + \frac{1}{2}(n+1)^4 + \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{30}(n+1)$,
   et donc $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.

   On a donc démontré par récurrence, que /2

$$\boxed{\text{pour tout entier } n : P_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n}$$

Remarques !

On retrouve les coefficients de la partie B

6.

$$\begin{aligned} P_4(-1) &= \frac{1}{5}(-1)^5 + \frac{1}{2}(-1)^4 + \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{30}(-1) \\ &= \frac{-1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1}{30} = \frac{-6+15-10+1}{30} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4(-\tfrac{1}{2}) &= \frac{1}{5}(\tfrac{-1}{2})^5 + \frac{1}{2}(\tfrac{-1}{2})^4 + \frac{1}{3}(\tfrac{-1}{2})^3 - \frac{1}{30}(\tfrac{-1}{2}) \\ &= \frac{-1}{5\times 32} + \frac{1}{32} + \frac{-1}{3\times 8} + \frac{1}{30\times 2} \\ &= \frac{-1+5}{160} + \frac{-5+2}{120} = \frac{1}{40} - \frac{1}{40} = 0 \end{aligned}$$

Donc /1

$$\boxed{P_4(-1) = 0,\ P_4(-\frac{1}{2}) = 0}$$

Comme $P_4(0) = 0$, 0, $-\frac{1}{2}$ et -1 sont des racines de P_4,
donc il existe a, b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_4(n) = n(n+1)(2n+1)(an^2+bn+c)$.
Or $n(n+1)(2n+1)(an^2+bn+c) = (2n^3+3n^2+n)(an^2+bn+c)$
$= 2an^5 + (3a+2b)n^4 + (a+3b+2c)n^3 + (b+3c)n^2 + cn$.
Puis par identification, on obtient

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & & & 2a & = & \frac{1}{5} \\ & & 3a & + & 2b & = & \frac{1}{2} \\ a & + & 3b & + & 2c & = & \frac{1}{3} \\ b & + & 3c & & & = & 0 \\ c & & & & & = & \frac{-1}{30} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & \frac{1}{10} \\ b & = & \frac{1}{10} \\ c & = & \frac{-1}{30} \end{array}\right.$$

Donc $P_4(n) = n(n+1)(2n+1)\left(\frac{1}{10}n^2 + \frac{1}{10}n - \frac{1}{30}\right)$

Puis le discriminant du polynôme de degré 2 précédent vaut $\Delta = \dfrac{1}{100} + \dfrac{4}{300} = \dfrac{7}{300}$, on pourrait donc continuer la factorisation, mais elle n'est pas très jolie (avec des $\sqrt{\frac{7}{300}}\ldots$).

Par conséquent : /2,5

$$\boxed{P_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$$

D. Avec les coefficients binomiaux

On définit les deux familles de polynômes suivants :

$$S_1(x) = x\ ;\ S_2(x) = x^2\ ;\ S_3(x) = x^3\ ;\ S_4(x) = x^4 \text{ et } S_5(x) = x^5$$

$$T_1(x) = x\ ;\ T_2(x) = x(x+1)\ ;\ T_3(x) = x(x+1)(x+2)\ ;$$

$$T_4(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) \text{ et } T_5(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, en appliquant la relation de Pascal : $\binom{k+p-1}{p} + \binom{k+p-1}{p+1} = \binom{k+p}{p+1}$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k+p-1}{p} = \sum_{k=2}^{n} \binom{k+p-1}{p} + \binom{p}{p} = \sum_{k=2}^{n} \left(\binom{k+p}{p+1} - \binom{k+p-1}{p+1} \right) + 1$$

On exploite alors un téléscopage :

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k+p-1}{p} + 1 = \binom{n+p}{p+1} - \binom{2+p-1}{p+1} + 1 = \binom{n+p}{p+1}$$

$$\boxed{\text{Bilan : } \sum_{k=1}^{n} \binom{k+p-1}{p} = \binom{n+p}{p+1}}$$

/1,5

2. Soient $p \in \mathbb{N}^*, p \leqslant 5, n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} T_p(k) = p! \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)\ldots(k+p-1)}{p!} = p! \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-1+p)!}{(k-1)!p!} = p! \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p-1}{p}$$

$$p!\binom{n+p}{p+1} = \frac{p!(n+p)!}{(n-1)!(p+1)!} = \frac{n(n+1)\ldots(n+p)}{p+1} = \frac{1}{p+1} T_{p+1}(n)$$

$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N}^*, p \leqslant 5, \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} T_p(k) = \frac{1}{p+1} T_{p+1}(n)}$$

/2,5

3.

$$\boxed{\begin{array}{c} T_1(x) = x = S_1(x),\ T_2(x) = x^2 + x = S_2(x) + S_1(x), \\ T_3(x) = x^3 + 3x^2 + 2x = S_3(x) + 3S_2(x) + 2S_1(x) \\ T_4(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x = S_4(x) + 6S_3(x) + 11S_2(x) + 6S_1(x) \\ \text{et } T_5(x) = x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x = S_5(x) + 10S_4(x) + 35S_3(x) + 50S_2(x) + 24S_1(x) \end{array}}$$

/1

4.

$$(S_T) \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & & & & & & & = & t_1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & t_2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & t_3 \\ 6x_1 & + & 11x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & & & = & t_4 \\ 24x_1 & + & 50x_2 & + & 35x_3 & + & 10x_4 & + & x_5 & = & t_5 \end{array} \right.$$

(S_T) est le système qui lie linéairement la famille des polynôme (T_i) en fonction des polynômes (S_j). Inverser ce système a pour conséquence d'exprimer linéairement les (S_j) en fonction des (T_i).

5.

$$(S_T) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc|r} x_1 & & & & & & & = & t_1 & \\ x_2 & & & & & & & = & t_2 - t_1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & t_3 - 2t_1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ 11x_2 & + & 6x_3 & + & x_4 & & & = & t_4 - 6t_1 & L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1 \\ 50x_2 & + & 35x_3 & + & 10x_4 & + & x_5 & = & t_5 - 24t_1 & L_5 \leftarrow L_5 - 24L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccl|l} x_1 & & & & & = & t_1 & \\ x_2 & & & & & = & t_2 - t_1 & \\ x_3 & & & & & = & t_3 - 3t_2 + t_1 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ 6x_3 & + & x_4 & & & = & t_4 - 11t_2 + 5t_1 & L_4 \leftarrow L_4 - 11L_2 \\ 35x_3 & + & 10x_4 & + & x_5 & = & t_5 - 50t_2 + 26t_1 & L_5 \leftarrow L_5 - 50L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccl|l} x_1 & & & = & t_1 & \\ x_2 & & & = & t_2 - t_1 & \\ x_3 & & & = & t_3 - 3t_2 + t_1 & \\ x_4 & & & = & t_4 - 6t_3 + 7t_2 - t_1 & L_4 \leftarrow L_4 - 6L_3 \\ 10x_4 & + & x_5 & = & t_5 - 35t_3 + 55t_2 - 9t_1 & L_5 \leftarrow L_5 - 35L_3 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl|l} x_1 & = & t_1 & \\ x_2 & = & t_2 - t_1 & \\ x_3 & = & t_3 - 3t_2 + t_1 & \\ x_4 & = & t_4 - 6t_3 + 7t_2 - t_1 & \\ x_5 & = & t_5 - 10t_4 + 25t_3 - 15t_2 + t_1 & L_5 \leftarrow L_5 - 10L_4 \end{array}\right.}$$ /2

6. D'après notre remarque aux questions précédentes., on peut donc affirmer : /1

$$\boxed{\begin{array}{c} S_1 = T_1, \qquad S_2 = T_2 - T_1, \qquad S_3 = T_3 - 3T_2 + T_1 \\ S_4 = T_4 - 6T_3 + 7T_2 - T_1, \qquad S_5 = T_5 - 10T_4 + 25T_3 - 15T_2 + T_1 \end{array}}$$

7. $P_4(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^4 = \sum_{k=0}^{n} S_4(k)$

   Donc

$$\begin{aligned} P_4(n) &= \sum_{k=0}^{n} \left(T_4(k) - 6T_3(k) + 7T_2(k) - T_1(k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} T_4(k) - 6\sum_{k=0}^{n} T_3(k) + 7\sum_{k=0}^{n} T_2(k) - \sum_{k=0}^{n} T_1(k) \\ &= \frac{1}{5}T_5(n) - \frac{3}{2}T_4(n) + \frac{7}{3}T_3(n) - \frac{1}{2}T_2(n) \\ &= \frac{1}{5}\left(n^5 + 10n^4 + 35n^3 + 50n^2 + 24n\right) - \frac{3}{2}\left(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n\right) \\ &\qquad + \frac{7}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 2n\right) - \frac{1}{2}\left(n^2 + n\right) \\ &= \frac{1}{5}n^5 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)n^4 + \left(7 - 9 + \frac{7}{3}\right)n^3 + \left(10 - \frac{33}{2} + 7 - \frac{1}{2}\right)n^2 + \left(\frac{24}{5} - 9 + \frac{14}{3} - \frac{1}{2}\right)n \\ &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{4-3}{2}n^4 + \frac{-6+7}{3}n^3 - \left(17 - \frac{34}{2}\right)n^2 - \frac{144 - 270 + 140 - 15}{30}n \end{aligned}$$

   Enfin /3

$$\boxed{P_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n}$$

Remarques !

La stratégie d'étude des P_p suit dans cette partie le schéma suivant

$$\begin{array}{ccc} (S_j) & \xrightarrow{(S_T)} & (T_i) \\ \Sigma_k \downarrow & & \downarrow \Sigma_k \\ P_p(n) & \xleftarrow{(S_T^{-1})} & \left(\frac{1}{i+1}T_{i+1}\right) \end{array}$$