MPSI 3 - Fermat 2017-2018 Le 12.09.17

Devoir à la maison n°1
CORRECTION

Exercice 1

Soient a, b et c, les longueurs de trois côtés d'un triangle.

1. Notons A, B, C les sommets du triangles avec BC de longueur a...
   Alors le chemin le plus cours pour aller de A à B, ne passe pas par C, donc $AB < AC + CB$, ce qui se traduit par

$$\boxed{c \leqslant b+a \quad \text{de même : } a \leqslant b+c, \quad b \leqslant a+c}$$

2.

Piste de recherche...
Si l'on cherche une majoration (ou minoration), on peut toujours commencer par majorer le plus simplement possible. Si cela ne conduit pas au résultat attendu, il faut bien noter où on peut améliorer la majoration.
Ici, on a envie d'écrire (surtout qu'il est écrit : en déduire) :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leqslant \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} = 3$$

mais le résultat n'est pas le bon. Il faut donc être plus fin ; l'inégalité triangulaire sera sûrement exploitée, mais plus tard !

Par positivité de tous les nombres (longueur de côtés), on a la suite d'équivalence :

$$\frac{a}{b+c} \leqslant \frac{a+a}{a+(b+c)} \Longleftrightarrow a(a+b+c) \leqslant 2a(b+c) \Longleftrightarrow a^2+ab+ac \leqslant 2ab+2ac \Longleftrightarrow a(b+c-a) \geqslant 0$$

Or la dernière inégalité est vraie d'après la question précédente. La première l'est donc également.
On a de même : $\dfrac{b}{c+a} \leqslant \dfrac{2b}{a+b+c}$ et $\dfrac{c}{a+b} \leqslant \dfrac{2c}{a+b+c}$ Ainsi

$$\boxed{\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leqslant \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2}$$

3. OUI.

Piste de recherche...
Pour que l'inégalité soit optimale, il faut être dans une situation où chacune des inégalités rencontrées soient en fait des égalités.
Il faudrait donc que $a(b+c-a) = 0$ et donc $a = 0$ ou $a = b+c$.
De même, il faut que $b = 0$ ou $b = a+c$ et $c = 0$ ou $c = a+b$.
On ne peut pas avoir $a = b+c$ et $b = a+c$, sauf à avoir $c = 0$.
Le cas limite est donc donné par un triangle tout particulier : $c = 0$, donc $A = B$ et ainsi $b = AC = BC = a$.

En prenant (par exemple) le cas particulier : $c = 0$ et $a = b$, on trouve l'égalité :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + 0 = 2$$

$$\boxed{\text{L'inégalité est donc optimale}}$$

4. **Première méthode : avec l'inégalité arithmético-géométrique (cachée ici).**
   On a l'égalité :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(a+b)+(a+c)}{b+c} + \frac{(a+b)+(b+c)}{c+a} + \frac{(a+c)+(b+c)}{a+b} - 3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} + \frac{a+b}{a+c} - 3\right)$$

Or, par exemple, $\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{b+c}{a+b}=\dfrac{(a+b)^2+(b+c)^2}{(a+b)(b+c)}$.
Et comme $0 \leqslant [(a+b)-(b+c)]^2=(a+b)^2+(b+c)^2-2(a+b)(b+c)$,
on a donc l'inégalité arithmético-géométrique :

$$(a+b)^2+(b+c)^2 \geqslant 2(a+b)(b+c) \Longrightarrow \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b} \geqslant 2$$

Par conséquent

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}}$$

Deuxième méthode : avec l'inégalité de réarrangement (démontrée ici).
On peut supposer sans perdre de généralité que $a \leqslant b \leqslant c$.
On a alors $a+b \leqslant a+c$ et $a+c \leqslant b+c$ et donc $\dfrac{1}{b+c} \leqslant \dfrac{1}{a+c} \leqslant \dfrac{1}{a+b}$.
Le calcul que l'on minimise est donc un calcul bien ordonné (*addition de termes dont les plus petits sont ensembles, et les plus grands ensemble*)
Montrons que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$$

Puis, on additionnera ces inégalités.
Commençons par la première inégalité,
Comme $c \geqslant b$ et $\dfrac{1}{a+b} \geqslant \dfrac{1}{c+a}$, alors

$$\left(\frac{c}{a+b}+\frac{b}{c+a}\right)-\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+a}\right)=\frac{c-b}{a+b}-\frac{c-b}{a+c}=(c-b)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}\right) \geqslant 0 \quad \text{(produit de termes positifs)}$$

Donc

$$\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b}{c+a} \geqslant \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+a}$$

<u>exactement</u> de même, comme $c \geqslant a$ et $\dfrac{1}{c+a} \geqslant \dfrac{1}{b+c}$, alors

$$\frac{a}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{b}{a+b} \geqslant \frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}$$

Et donc par transitivité d'inégalité :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$$

De même, on démontre :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{b}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$$

On additionne les deux inégalités :

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geqslant \frac{c+b}{b+c}+\frac{a+c}{c+a}+\frac{b+a}{a+b}=3$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}}$$

Cette dernière inégalité s'appelle l'inégalité de Nesbitt (mathématicien américan , 1912 -1991).
Elle ne dépend pas de l'inégalité triangulaire et est valable pour tout réels positifs a, b et c.

Remarques !
La fonction qu'on étudie est symétrique en a, b et c. Le cas d'égalité $a=b=c$ est un cas critique.
Dans ce cas $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=3\times\dfrac{a}{2a}=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.
L'inégalité que l'on doit trouver ici est donc optimale, elle est minimale dans ce cas critique.

Exercice 2

1. La fonction cos vérifie : $\cos(t) = -\cos(\pi - t)$,

   donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t\mathrm{d}t = -\int_{\pi/2}^{\pi} \cos t\mathrm{d}t$ (voir l'aire sous la courbe),

   donc par relation de Chasles : $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos t\mathrm{d}t = 0$ de même $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \cos t\mathrm{d}t = 0$.

   A nouveau, par relation de Chasles :

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\mathrm{d}t = 0}$$

2. En physique, on doit calculer la valeur I de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t$.

   (a) Comme, pour $t \in [0, \pi]$, $\cos(-t) = \cos t$, $\cos^2(-t) = \cos^2(t)$

   et donc $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{0} \cos^2(t)\mathrm{d}t$.

   De même pour $t \in [0, \pi]$, $\sin(-t) = -\sin t$, $\sin^2(-t) = \sin^2(t)$

   et donc $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{0} \sin^2(t)\mathrm{d}t$.

   Par la suite, on précisera cela en faisant un « changement de variable »dans l'intégrale.

   Enfin, comme pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\mathrm{d}t$;

   et pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(\frac{\pi}{2} + t) = -\cos(\pi - t)$, $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t$.

   En additionnant (Relation de Chasles) : $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin^2(t)\mathrm{d}t$.

   On peut donc conclure :

$$\boxed{\int_0^{\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{0} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{0} \sin^2(t)\mathrm{d}t}$$

Remarques !

On pourra faire, dans quelques semaines, une intégration par parties.

On sait que $(uv)' = u'v + uv'$, *donc* $\int u'v + \int uv' = [uv]$, *ou encore* $\int u'v = [uv] - \int uv'$.

Ainsi avec $v = \cos$ *et* $u' = \cos$, *donc* $u = \sin$ *et* $v' = -\sin$ *:*

$$\int_0^{\pi} \cos^2(t)\,dt = [\sin t \cos t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin t(-\sin t)\,dt = 0 + \int_0^{\pi} \sin^2(t)\,dt$$

   En déduire la valeur de I On a donc

$$\int_0^{\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \sin^2(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2(t) + \sin^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 1\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

   (b) $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1$. Ainsi $\cos^2 t = \dfrac{1}{2}(\cos(2t) + 1)$.

   Donc

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(2t) + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t) + t\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}}$$

Problème

1. Les inconnues sont, d'après l'énoncé solution du système

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccccccc}
B & = & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)N & +J & = & \frac{5}{6}N & +J \\
N & = & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)T & +J & = & \frac{9}{20}T & +J \\
T & = & \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)B & +J & = & \frac{13}{42}B & +J \\
b & = & \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(N+n) & & = & \frac{7}{12}N & +\frac{7}{12}n \\
n & = & \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(T+t) & & = & \frac{9}{20}T & +\frac{9}{20}t \\
j & = & \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(B+b) & & = & \frac{13}{42}B & +\frac{13}{42}b \\
t & = & \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(J+j) & & = & \frac{11}{30}J & +\frac{11}{30}j
\end{array}\right.}$$

2. Les trois premières équations sont indépendantes des suivantes. Les variables B, N, T s'expriment en fonction de J.
Le système de ces trois premières équations est équivalent aux suivants :

$$\mathcal{S}_1\left\{\begin{array}{rrrcl}
B & -\frac{5}{6}N & & = & J \\
 & N & -\frac{9}{20}T & = & J \\
-\frac{13}{42}B & & +T & = & J
\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcl}
B & -\frac{5}{6}N & & = & J \\
 & N & -\frac{9}{20}T & = & J \\
 & -\frac{65}{6}N & +42T & = & 55J
\end{array}\right| L_3 \leftarrow 42L_3+13L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl}
B & -\frac{5}{6}N & & = & J \\
 & N & -\frac{9}{20}T & = & J \\
 & & \frac{891}{4}T & = & 395J
\end{array}\right| L_3 \leftarrow 6L_3+65L_2 \qquad \iff \left\{\begin{array}{rrrcl}
6B & -5N & & = & 6J \\
 & 20N & -9T & = & 20J \\
 & & 891T & = & 1580J
\end{array}\right.$$

Pour simplifier, on doit chercher un facteur commun ; mais $891 = 3^4 \times 11$, *et que ni* 3 *ni* 11 *ne divise* 1580, *cela est vain.*

$$\mathcal{S}_1 \iff \left\{\begin{array}{rrrcl}
6B & -5N & & = & 6J \\
 & 99N & & = & 178J \\
 & & 891T & = & 1580J
\end{array}\right| L_2 \leftarrow \frac{1}{20}(99L_2+L_3) \quad \iff \left\{\begin{array}{rcl}
297B & = & 742J \\
99N & = & 178J \\
891T & = & 1580J
\end{array}\right| L_1 \leftarrow \frac{1}{2}(99L_1+5L_2)$$

On remarquera là encore que la dernière équation est sans facteur commun. Maintenant que l'on peut exprimer les variables B, N, T et fonction de J, on peut étudier le second système

$$\mathcal{S}_2\left\{\begin{array}{rrrrcl}
b & -\frac{7}{12}n & & & = & \frac{7}{12}N = \frac{7\times178}{12\times99}J = \frac{623}{594}J \\
 & n & & -\frac{9}{20}t & = & \frac{9}{20}T = \frac{9\times1580}{20\times891} = \frac{79}{99}J \\
-\frac{13}{42}b & & +j & & = & \frac{13}{42}B = \frac{13\times742}{42\times297} = \frac{4823}{6237}J \\
 & & -\frac{11}{30}j & +t & = & \frac{11}{30}J
\end{array}\right.$$

On a alors $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ ET $\mathcal{S}_2$ On peut commencer par écrire ce système $\mathcal{S}_2$ avec des coefficients entiers à gauche

$$\mathcal{S}_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcl}
12b & -7n & & & = & \frac{1246}{99}J \\
 & 20n & & -9t & = & \frac{1580}{99}J \\
-13b & & +42j & & = & \frac{9646}{297}J \\
 & & -11j & +30t & = & 11J
\end{array}\right.$$

Il reste à résoudre le système, on applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\mathcal{S}_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcl}
12b & -7n & & & = & \frac{1246}{99}J \\
 & 20n & & -9t & = & \frac{1580}{99}J \\
 & -91n & +504j & & = & \frac{54782}{99}J \\
 & & -11j & +30t & = & 11J
\end{array}\right| L_3 \leftarrow 12L_3+13L_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcl}
12b & -7n & & & = & \frac{1246}{99}J \\
 & 20n & & -9t & = & \frac{1580}{99}J \\
 & & 10080j & -819t & = & \frac{1\,239\,420}{99}J \\
 & & -11j & +30t & = & 11J
\end{array}\right| L_3 \leftarrow 20L_3+91L_2$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcl}
12b & -7n & & & = & \frac{1246}{99}J \\
 & 20n & & -9t & = & \frac{1580}{99}J \\
 & & 10080j & -819t & = & \frac{1\,239\,420}{99}J \\
 & & & 293\,391t & = & \frac{2\,237\,340}{9}J
\end{array}\right| L_3 \leftarrow 10080L_4+11L_3$$

On multiplie les équations par 9 ou 99 afin d'avoir des coefficients d'entiers :

$$\mathcal{S}_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcl}
12b & -7n & & & = & \frac{1246}{99}J \\
 & 20n & & -9t & = & \frac{1580}{99}J \\
 & & 10080j & -819t & = & \frac{1\,239\,420}{99}J \\
 & & & 2\,640\,519t & = & 2\,237\,340J
\end{array}\right.$$

On constate ensuite que $819 = 7 \times 9 \times 13$, alors que $2\,640\,519 = 7 \times 9 \times 41913$.

$$\mathcal{S}_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcl} 12b & -7n & & & = & \frac{1246}{99}J \\ & 5\,867\,820n & & & = & \frac{76\,117\,160}{11}J \\ & & 422\,483\,040j & & = & \frac{6\,091\,918\,560}{11}J \\ & & & 2\,640\,519t & = & 2\,237\,340J \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 293391L_2 + L_4 \\ L_3 \leftarrow 41913L_3 + 13L_4 \\ \\ \end{array}\right.$$

En multipliant par 11 les équations 2 et 3, et en simplifiant par les facteurs communs (140 et respectivement 10080) :

$$\mathcal{S}_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcl} 12b & -7n & & & = & \frac{1246}{99}J \\ & 461\,043n & & & = & 543\,694J \\ & & 29\,045\,709j & & = & 38\,074\,491J \\ & & & 2\,640\,519t & = & 2\,237\,340J \end{array}\right. \Bigg| \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5\,532\,516b & = & 9\,608\,480J \\ 461\,043n & = & 543\,694J \\ 29\,045\,709j & = & 38\,074\,491J \\ 2\,640\,519t & = & 2\,237\,340J \end{array}\right.$$

en faisant pour ce dernier système l'opération élémentaire : $L_1 \leftarrow 461\,043L_1 + 7L_2$.
Ce système se simplifie enfin en prenant le PGCD de chacun des termes de chaque égalité.
On obtient alors

$$\boxed{\mathcal{S} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 297B & = & 742J \\ 99N & = & 178J \\ J & = & J \\ 891T & = & 1580J \\ 1\,383\,129b & = & 2\,402\,120J \\ 461\,043n & = & 543\,694J \\ 461\,043j & = & 604\,357J \\ 125\,739t & = & 106\,540J \end{array}\right.}$$

Toutes les variables B, N, J, T, b, n, j, t s'écrivent donc comme une fraction de J.
Or tous ces nombres sont entiers, il ne faut donc pas trouver de dénominateurs et considérer J comme un multiple d'un entier k, ce multiple étant divisible par chacun des termes : 297, 99, 1, 891...125 739,. Il s'agit donc de considérer le PPCM de chacun de ces nombres.
Or celui-ci vaut : 4 149 387 Donc

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Il existe un entier } k \text{ tel que } J = 4\,149\,387k, \text{ et donc les termes sont multiples de } k \\ B = 10\,366\,482k,\ N = 7\,460\,514k,\ J = 4\,149\,387k,\ T = 7\,358\,060 \\ b = 7\,206\,360k,\ n = 4\,893\,246k,\ j = 5\,439\,213k \text{ et } t = 3\,515\,820 \end{array}}$$

3. Archimède ajoute les taureaux blancs et noirs sont en nombre carré et les taureaux jaunes et tachetés sont en nombre triangulaire.
Cela signifie qu'il existe $m, p \in \mathbb{N}$ tel que $B + N = m^2$ (1) et $J + T = \frac{1}{2}p(p+1)$ (2).
   (a) Avec les valeurs trouvées précédemment, on a, si la condition (2) est respectée :

$$2 \times (J + T) = 2(4\,149\,387 + 7\,358\,060)k = 2 \times 11\,507\,447k = 23\,014\,894k = p(p+1)$$

   Ainsi en multipliant par 4 :

$$92\,059\,576k + 1 = 4p(p+1) + 1 = 4p^2 + 4p + 1 = (2p+1)^2$$

   Donc

$$\boxed{\text{la condition (2) impose que } 92\,059\,576k + 1 \text{ est un carré}}$$

   On admet que la plus petite valeur de k qui vérifie cela est $k = 117\,423$.
   L'effectif du troupeau est alors égal à

$$\boxed{B + N + J + T + b + n + j + t = (10\,366\,482 + \cdots + 3\,515\,820) \times 117\,423 = 5\,916\,837\,175\,686}$$

   (b) Dans ce cas, l'équation (1) devient :

$$B + N = (10\,366\,482 + 7\,460\,514) \times 117\,423 = 2\,093\,299\,351\,308$$

   Ce qui n'est pas un carré, d'après l'ordinateur (on trouve comme racine : $1\,446\,823,884\ldots$).

$$\boxed{\text{Ainsi, avec une telle valeur de } k, \text{ l'équation (1) n'est pas vérifiée}}$$

   (c) D'après l'énoncé, le nombre total de bovin est compris entre $[10^{206\,541}, 10^{206\,542}[$.
   Donc, comme la fonction logarithme est croissante, le logarithme (naturel) du nombre de bovins du troupeau du soleil est compris

$$\boxed{\text{entre } 206\,541 \times \ln(10) = 475\,578,2 \text{ (par défaut) et } 206\,542 \times ln10 = 475\,580,6 \text{ (par excès).}}$$

4. Dans l'Odyssée d'Homère (p.227 de la traduction de Jaccottet),

   $\boxed{\text{on lit que le nombre de bovins du troupeau d'Helios était 350 : 7 troupeaux de 50 têtes}}$

   (ce qui est plus raisonnable…)