Devoir à la maison n°1

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice 1

Soient a, b et c, les longueurs de trois côtés d'un triangle.

1. Comment traduire avec les nombres a, b et c l'inégalité triangulaire, qui consiste à dire que la chemin le plus court entre deux points est la longueur du segment qui relie ces deux points ?
2. En déduire l'inégalité :
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leqslant 2$$
3. Cette inégalité est-elle optimale ?
4. Montrer également que
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant \frac{3}{2}$$
Quelle hypothèse n'a pas servi dans cette seconde inégalité ?

Exercice 2

1. Sans calcul, justifier que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t)\mathrm{d}t=0$
2. En physique, on doit calculer la valeur I de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2(t)\mathrm{d}t$.
   (a) Rapidement, expliquer pourquoi
$$\int_0^{\pi}\cos^2(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\sin^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{0}\cos^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{0}\sin^2(t)\mathrm{d}t$$
   En déduire la valeur de I
   (b) Retrouver par le calcul la valeur de I.
   Pour trouver une primitive de $t\mapsto\cos^2(t)$, on peut exploiter la relation trigonométrique qui lie cette fonction aux fonctions $t\mapsto\cos(2t)$...

Problème

« *Si tu es appliqué et sage, ô étrange, calcule le nombre de têtes du troupeau du soleil qui, il y a bien longtemps, paissaient dans les prairies e la trincrienne île de Sicile...* »
(d'Archimède (-287,-212) à Erathostène de Cyrène (-284, -192), le bibliothécaire en chef à Alexandrie).

Pour Archimède, le troupeau est composé de
— B taureaux blancs et b vaches blanches ;
— N taureaux noirs et n vaches noires ;
— J taureaux jaunes et j vaches jaunes ;
— T taureaux tachetés et t vaches tachetés

L'énoncé stipule :
$$\begin{cases} B &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)N &+J\\ N &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)T &+J\\ T &= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)B &+J\\ b &= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(N+n)\\ n &= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(T+t)\\ j &= \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(B+b)\\ t &= \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(J+j)\end{cases}$$

1. Montrer que les 8 inconnues présentées par Archimède sont solution d'un système de 7 équations linéaires.
2. Résoudre ce système, en montrant que chacune des inconnues est multiple d'un même entier positif k.
   On donnera ces 8 relations (on trouvera, par exemple, que $n = 4\,893\,246k\ldots$)
3. Archimède ajoute les taureaux blancs et noirs sont en nombre carré et les taureaux jaunes et tachetés sont en nombre triangulaire.
   Cela signifie qu'il existe $m, p \in \mathbb{N}$ tel que $B + N = m^2$ (1) et $J + T = \frac{1}{2}p(p+1)$ (2).
   (a) Montrer que la conditions (2) impose alors que $92\,059\,576k + 1$ est un carré.
   On admet que la plus petite valeur de k qui vérifie cela est $k = 117\,423$. Pour une telle valeur, quel serait l'effectif du troupeau ?
   (b) Avec une telle valeur de k, l'équation (1) est-elle vérifiée ?
   (c) En 1880, le mathématicien allemand A. Amthor a montré que pour vérifier (2) et (1), il faudrait et il suffit que k soit égal à $4\,456\,749p^2$ avec p solution de l'équation de Pell i.e. : $410\,286\,423\,278\,424p^2 + 1$ est un carré.
   Il existe une méthode pour évaluer la plus petite valeur de p (fractions continues), mais Amthor n'est pas venu à bout du calcul...mais il a montré que le nombre total de bovins est un nombre de 206 545 chiffres.
   En 1981, H. Nelson a publié le nombre total de bovins, après un calcul de 10 min. sur son superordinateur (de l'époque) CRAY-1.
   Donner un encadrement du logarithme (naturel) du nombre de bovins du troupeau du soleil.
4. Selon Homère, de combien de boeuf était composé le troupeau du grand Hélios ?