

## Equations polynomiales. Développement, factorisation, racines

**Place dans le cours :**

- Cette activité se situe en prolongement du **chapitre 1 : Calculs et opérations avec des sommes ou des produits**.
- Elle prépare les résultats sur les polynômes **VI Polynômes et fractions rationnelles**.
- Les résultats démontrés dans cette activité seront à considérer comme des résultats de cours.

**Notations et définitions :**

- $n$  est un entier naturel donné.
- On dit que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application polynomiale s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  (voire  $\mathbb{C}$ ) tels que :  
pour tout réel  $x$ ,  $f(x)$  est obtenu par le calcul  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ .
- Pour une telle application  $f$ , on appelle degré de  $f$ , le nombre  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $a_m \neq 0$  et pour tout  $k > m$ .

### 1 Ecriture polynomiale

#### ▷ 1.1. Unicité d'écriture

Soient  $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  et  $g : x \mapsto \sum_{k=0}^m b_k x^k$ , deux applications polynomiales.

On suppose que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = g(x)$ . On souhaite démontrer par l'absurde que l'écriture polynomiale est unique.

1. Pourquoi peut-on supposer qu'il existe  $r \in \llbracket 0, \max(n, m) \rrbracket$  tel que  $a_r \neq b_r$ .
2. Montrer qu'il existe une application polynomiale  $h$  de degré inférieur ou égal à  $r - 1$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) - g(x) = (a_r - b_r)x^r + h(x)$ .
3. En étudiant la limite pour  $x \rightarrow +\infty$  de  $\frac{f(x) - g(x)}{x^r}$ , montrer qu'on a une contradiction.

On en conclut que l'écriture polynomiale d'une telle application est unique.

Autrement dit, étant donné une application polynomiale  $f$ , il existe un nombre  $n$  égal au degré de  $f$  et un unique

$(n+1)$ -uplet  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

- Le nombre entier  $n$  s'appelle le degré de la fonction polynomiale  $f$ .
- $a_n x^n$  s'appelle le terme dominant de la fonction polynomiale  $f$ .
- Et on aura pour habitude de noter  $[f]_k$ , le  $k$  coefficient  $a_k$  (devant  $x^k$ ) dans l'écriture de  $f$ .

#### ▷ 1.2. Stabilité

1. Soient  $f : x \mapsto 2 + x - x^2 + 3x^3$  et  $g : x \mapsto 1 + x - x^2 + x^4$  définies sur  $\mathbb{R}$ .  
Evaluer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(f + g)(x)$  et  $(f \times g)(x)$
2. Soient  $f : x \mapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$  et  $g : x \mapsto b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$  définies sur  $\mathbb{R}$ .
  - (a) Evaluer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(f + g)(x)$  et  $(f \times g)(x)$ . En déduire que  $f + g$  et  $f \times g$  sont des applications polynomiales
  - (b) Exprimer alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $[f + g]_k$  en fonction des  $[f]_i$  et  $[g]_j$ .
  - (c) Exprimer alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $[f \times g]_k$  en fonction des  $[f]_i$  et  $[g]_j$ .

#### ▷ 1.3. Développer malin

On veut développer en un coup le calcul algébrique (polynomial)  $(a + b + c)^3$ . On sait que le calcul sera de la forme  $\sum A_{i,j,k} a^i b^j c^k$  avec  $i + j + k = 3$ . Reste à trouver la valeur de  $A_{i,j,k}$

1. Montrer qu'il y a 6 façons d'obtenir le monôme  $a^1 b^1 c^1$ . En déduire la valeur de  $A_{1,1,1}$
2. De même en déduire la valeur de  $A_{1,2,0}$ .

3. Conclure que  $(a + b + c)^3 = 6abc + 3(a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b)$

▷ **1.4. Réduire le nombre de calculs. Formule de Hörner**

1. On considère la fonction polynomiale  $f(x) = x^{10} - 10x^9 + 7x^8$ .

(a) Combien de calculs sont nécessaires pour évaluer (naïvement)  $9^{10}$ , puis  $f(9)$  ?

(b) Calculer plus rapidement  $f(9)$ .

2. Ecrire autrement l'expression de  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ , de sorte que pour tout  $x$ , l'évaluation de  $f$  en  $x$  se fasse en  $2n$  calculs uniquement.

3. Evaluer rapidement  $f(2)$  si  $f : x \mapsto 4x^3 - 7x^2 + 3x - 5$

▷ **1.5. Ne pas se perdre dans les calculs**

Démontrer :

$$4[(a^2 - b^2)cd + (c^2 - d^2)ab]^2 + [(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) - 4abcd]^2 = (a^2 + b^2)^2(c^2 + d^2)^2$$

On pourra y voir la forme  $A = B^2 - C^2 \dots$

Dans un calcul (surtout si la question est ouverte), il faut néanmoins toujours savoir vers où l'on va.

*Par exemple, lorsqu'on dérive une fonction, ce qui nous intéresse souvent c'est de connaître son signe. Il faut donc donner une forme factorisée. . .* Pour apprendre à se projeter vers l'avant, il faut ne pas écrire trop de calculs intermédiaires. De nombreuses petites réécritures doivent être simplement pensées, sans être écrites.

Le prix à payer : une insécurité forte pour l'élève.

Le prix à gagner : une plus grande concentration et une meilleure vitesse d'exécution !

Deux ans avant les concours, il faut investir dans cette stratégie.

## 2 Factoriser

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{R}$ , on note :  $b_a^n : x \mapsto x^n + ax^{n-1} + \dots + a^{n-1}x + a^n = \sum_{i=0}^n ia^{n-i}x^i$ .

Il s'agit d'une fonction polynomiale de degré  $n$ .

On appelle la famille des fonctions polynomiales  $(b_a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ , les petits Bernoullis.

▷ **2.1. Petits Bernoullis**

Deux méthodes pour calculer la formule de factorisation qui nous intéresse. Le nombre  $a \in \mathbb{K}$  est fixé.

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_a^{n+1} = ab_a^n + x^{n+1}$ . En déduire par récurrence la factorisation de Bernoulli :  
 $\forall x \in \mathbb{K}, (x - a)b_a^n(x) = x^{n+1} - a^{n+1}$

2. Montrer directement que pour tout  $x \in \mathbb{K}$ ,

$$(x - a) \times b_a^n(x) = x^{n+1} - a^{n+1}$$

▷ **2.2. Factorisation**

Soit  $f$  une fonction polynomiale de degré  $n$ .

1. Montrer (en exploitant les petits Bernoullis) que pour tout  $a \in \mathbb{K}$ , il existe  $g_a$ , fonction polynomiale de degré  $n - 1$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) - f(a) = (x - a)g_a(x)$$

2. En déduire que si  $x_0 \in \mathbb{K}$  tel que  $f(x_0) = 0$ , alors il existe  $g$ , application polynomiale de degré  $n - 1$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x - x_0) \times g(x)$$

3. En déduire l'expression d'un algorithme de factorisation si possible complet d'une fonction polynomiale.

Si  $x_0$  est une solution de l'équation  $f(x) = 0$ , on dit que  $x_0$  est une racine de  $f$ .

Si l'on cherche à trouver l'expression de la fonction polynomiale  $g$  comme à l'exercice précédent, il faudrait réarranger les petits Bernoullis. Ce n'est vraiment pas pratique.

Nous allons plutôt exploiter une division euclidienne entre polynômes.

Mais avant de définir et d'exploiter la division euclidienne entre n'importe quel polynôme, nous allons en ce début d'année nous concentrer sur la division par une fonction polynomiale de degré 1 uniquement. Dans ce cas, on peut exploiter l'algorithme de Ruffini-Hörner.

### ▷ 2.3. Algorithme de Ruffini-Hörner

Soit  $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  et  $x_0$  une racine de  $f$ .

On peut donc supposer qu'il existe  $g : x \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{K}$ ,  $f(x) = (x - x_0) \times g(x)$ .

1. Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $b_{k-1} = a_k + x_0 b_k$  (avec  $b_{-1} = 0$ )
2. En déduire un algorithme à l'aide d'un tableau sur deux lignes à construire, qui permet d'obtenir simplement et rapidement  $g$
3. Quel lien avec le calcul de l'exercice 1.5 ?
4. Factoriser  $f : x \mapsto x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x$  par  $x - 2$  après avoir démontré que  $f(2) = 0$ .
5. Factoriser  $g : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x - 2$  par  $x + 1$  après avoir démontré que  $g(-1) = 0$ .

La factorisation permet de décomposer un problème en plusieurs sous-problèmes.

On exploite l'intégrité de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  :  $a \times b = 0$  si et seulement si  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

### ▷ 2.4. Factorisation complète et nombre de racines

1. Factoriser complètement  $f : x \mapsto x^4 - 5x^2 + 4$ .
2. (Question difficile !) Démontrer par récurrence que si  $f$  une fonction polynomiale de degré  $n$  et  $p \leq n$  avec  $x_1, x_2, \dots, x_p$ ,  $p$  solutions différentes de l'équation  $f(x) = 0$  (i.e.  $p$  racines distincts de  $f$ ). Alors il existe  $g_p$ , fonction polynomiale de degré  $n - p$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p) \times g_p(x)$$

3. En déduire que  $f$  admet au plus  $n$  racines distinctes.

## 3 Expliciter formellement les racines

### ▷ 3.1. Polynôme de degré 2

1. Démontrer que les racines de  $f(x) = ax^2 + bx + c$  s'obtiennent par le calcul du discriminant bien connu
2. Montrer que si  $x_1$  et  $x_2$  sont les racines de  $f$ , alors  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  et  $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ .
3. Résoudre le système (non linéaire)  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x \times y = -14 \end{cases}$

### ▷ 3.2. Polynôme de degré 3. Formule de Tartaglia-Cardan

On cherche une formule explicite des racines de  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ .

*Il suffit de connaître les solutions de cette équation, pour résoudre toute équation polynomiale de degré 3.*

1. En posant  $y = x + \frac{a}{3}$ , on a l'équivalence  $f(x) = 0 \iff g(y) = 0$  avec  $g$  de la forme :  $g : x \mapsto x^3 + px + q$ .
2. On suppose que  $z$  est une racine de  $g$  qui vérifie : il existe  $u, v \in \mathbb{K}$  tel que  $z = u + v$  et la condition  $u \times v = -\frac{p}{3}$ .

Montrer que si  $p \neq 0$ ,  $u^3$  et  $v^3$  sont les racines de  $x^2 + qx - \frac{p^3}{27}$ . En déduire les expressions possibles de  $z$ .

(On trouve  $j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27})} + j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27})}$  où  $k \in \{0, 1, 2\}$ )

3. Résoudre  $x^3 - 2x = 4$ , sans chercher de « racine évidente ».

## 4 Mathématiciens rencontrés

La motivation historiquement première de l'étude des équations polynomiales est la motivation ludique. La plupart des résultats ici a été obtenu dans le cadre de joutes mathématiques, de défis si l'on préfère.

Les révolutions successives qui marquent la mathématiques européennes consistent souvent en l'installation de nouvelles notations. Cela crée des ponts ! C'est François VIÈTE qui donne le premier mouvement ici. Il a l'idée fondamentale d'écrire des lettres  $A, B, C, \dots, X$  pour les inconnues et les données d'un problème (ie. les connus !) et de faire les calculs algébriques. Dès lors, aucun problème des anciens Grecs ne semble résister au schéma :

Problème géométrique  $\xrightarrow{\text{mêmes lettres}}$  Problème algébrique  $\xrightarrow{\text{calculs}}$  Solution

et Viète écrit en majuscules : « *NVLLVM NON PROBLEMA SOLVERE* ». MONTUCLA dans Histoire des mathématiques :  
 « Il est peu de mathématiciens à qui l'algèbre doive plus qu'à cet homme célèbre... On doit d'abord à M. Viète d'avoir établi l'usage des lettres pour désigner, non seulement les quantités inconnues, mais même celles qui sont connues, ce qui fit donner à son algèbre le nom de spécieuse, nom qu'elle a gardé longtemps, à cause que tout y est représenté par des symboles...  
 C'est nous osons le dire à ce changement que l'algèbre est redevable d'une grande partie de ces progrès. »

▷ 4.1. Comment énoncer aisément la règle du discriminant pour les fonctions polynomiales de degré 2 ou 3 sans employer les lettres  $a$ ,  $b$  et  $c$ , comme le faisaient les mathématiciens italiens Jérôme CARDAN (1501-1576) ou Niccolo Fontana dit TARTAGLIA (1499-1557) ?

Il existe également une formule pour l'équation de degré 4. Vous la trouverez sans problème sur internet. Vous y trouverez également l'histoire de la découverte de ces formules. C'est assez intéressant.

Nous ne démontrons pas le théorème suivant de Ruffini-Abel (1824)

Pour tout entier  $n \geq 5$ , il n'existe pas de formule générale exprimant « par radicaux » les racines d'un polynôme quelconque de degré  $n$ .

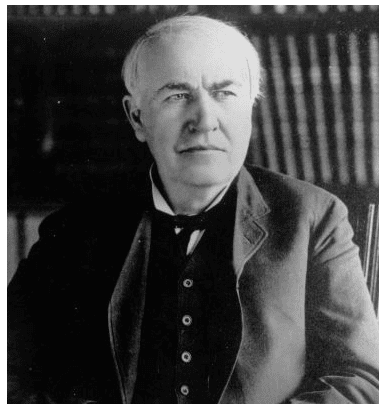
C'est-à-dire de formule n'utilisant que les coefficients, la valeur 1, les quatre opérations et l'extraction des racines  $n$ -ièmes.



Viète



Cardan



Paolo RUFFINI (1765-1822) est un mathématicien italien.

William Georges HÖRNER (1786-1837) est un mathématicien britannique.

Niels Henrik ABEL (1802-1829) est un mathématicien norvégien génial, mort très jeune. Une météorite dans le ciel septentrional.

# Correction des exercices

## ▷ Corrigé de l'exercice 1.1

1. Considérons deux fonctions polynomiales  $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  et  $g : x \mapsto \sum_{k=0}^m b_k x^k$ .

Supposons qu'il s'agisse bien de deux écritures différentes, donc  $\{h \in \llbracket 0, \max(n, m) \rrbracket \mid a_h \neq b_h\}$  est non vide. Comme tout ensemble inclus dans  $\mathbb{N}$ , fini (ou majoré) est non vide, il admet un plus grand élément, noté  $r$ .

2. On a donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) - g(x) = (a_r - b_r)x^r + \sum_{k=0}^{r-1} (a_k - b_k)x^k = (a_r - b_r)x^r + h(x)$$

3. On note pour tout  $k < r$ ,  $c_k = a_k - b_k$ .

$$\frac{f(x) - g(x)}{x^h} = a_h - b_h + \sum_{k=0}^{h-1} \frac{c_k}{x^{h-k}}$$

Pour tout  $k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ ,  $\frac{c_k}{x^{r-k}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

Il existe donc  $X_k \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\forall x \geq X_k$ ,  $\left| \frac{c_k}{x^{r-k}} \right| \leq \frac{|a_r - b_r|}{2h}$ .

Il suffit de prendre  $X_k = \sqrt[r-k]{2r \frac{|c_k|}{|a_r - b_r|}}$  Et donc pour  $x \geq X := \max(X_0, X_1, \dots, X_{r-1})$  (inégalité triangulaire) :

$$\left| \frac{f(x) - g(x)}{x^r} - (a_r - b_r) \right| = \left| \sum_{k=0}^{r-1} \frac{c_k}{x^{r-k}} \right| \leq \sum_{k=0}^{r-1} \frac{|a_r - b_r|}{2r} = \frac{|a_r - b_r|}{2}$$

Ainsi, comme  $|\alpha| \leq \beta \iff -\beta \leq \alpha \leq \beta$ , on a donc pour  $x \geq X$  :

$$-\frac{|a_r - b_r|}{2} \leq \frac{f(x) - g(x)}{x^r} - (a_r - b_r) \leq \frac{|a_r - b_r|}{2}$$

Et donc si  $a_r - b_r > 0$  :  $\frac{f(x) - g(x)}{x^r} \geq -\frac{a_r - b_r}{2} + (a_r - b_r) = +\frac{a_r - b_r}{2} > 0$

Et si  $a_r - b_r < 0$  :  $\frac{f(x) - g(x)}{x^r} \leq \frac{b_r - a_r}{2} + (a_r - b_r) = -\frac{b_r - a_r}{2} < 0$

Or  $f(x) = g(x)$ , donc en tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) - g(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

On a bien une contradiction, donc  $\{k \mid a_k \neq b_k\} = \emptyset$  et l'écriture est unique.

## ▷ Corrigé de l'exercice 1.2

1.  $f + g : x \mapsto 3 + 2x - 2x^2 + 3x^3 + x^4$  et  $f \times g : x \mapsto 2 + 3x - 2x^2 + x^3 + 6x^4$ .
2. (a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , (en notant  $a_k = 0$  si  $k > n$  et  $b_k = 0$  si  $k > m$ ) ;

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + \sum_{k=0}^m b_k x^k = \sum_{k=0}^{\max(n, m)} (a_k + b_k) x^k$$

$$\begin{aligned} (f \times g)(x) &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \times \sum_{h=0}^m b_h x^h = \sum_{(k, h) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, m \rrbracket} a_k b_h x^{k+h} \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} \left( \sum_{(k, h) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, m \rrbracket} a_k b_h x^{k+h} [k+h=i] \right) = \sum_{i=0}^{n+m} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{i-k} \right) x^i \end{aligned}$$

On a appliqué la sommation par paquets. Ce sont bien des applications polynomiales

(b) On trouve  $[f + g]_k = [f]_k + [g]_k$ , et de manière générale, cette opération est linéaire.

(c) On a le produit de Cauchy :  $[f \times g]_k = \sum_{i=0}^k [f]_i [g]_{k-i} = \sum_{i+j=k} [f]_i [g]_j$ , valable même si les coefficients sont nuls.

### ▷ Corrigé de l'exercice 1.3

1. Pour obtenir, par exemple, le nombre  $A_{1,1,1}$ , il faut prendre un  $a$ , un  $b$  et un  $c$ , il y a  $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$  possibilités.
2. Pour obtenir, par exemple, le nombre  $A_{1,2,0}$ , il faut prendre un  $a$ , deux  $b$  et 0  $c$ , il y a  $3 \times 1 \times 1 = 3 = 3$  possibilités.
3. Ensuite il y a une symétrie entre  $a$ ,  $b$  et  $c$  qui commutent :  $A_{1,2,0} = A_{0,2,1} = \dots = A_{0,1,2}$ .  
Finalement :  $(a + b + c)^3 = 6abc + 3(a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b)$

### ▷ Corrigé de l'exercice 1.4

1. (a) A priori, il y a besoin de 9 calculs :  $(\dots((9 \times 9) \times 9) \times 9 \dots) \times 9$ .  
De même pour évaluer  $10 \times 9^9$ , il y a besoin de  $1 + 8 = 9$  calculs et 8 calculs pour évaluer  $7 \times 9^8$ .  
Ensuite, il faut faire deux additions. Il y a donc  $9 + 9 + 8 + 2 = 28$  calculs pour évaluer naïvement  $f(9)$ .  
(b) On peut noter aussi que  $f(x) = x^8(x^2 - 10x + 7) = ((x^2)^2)(x^2 - 10x + 7)$ . Le calcul de  $f(9) = 9^8(81 - 90 + 7) = 2 \times 9^8$  se calcule en  $3 + 2 + 1 + 1 = 7$  calculs (en gardant en mémoire  $9^2$ ).  
2.  $f(x) = (((a_n \times x + a_{n-1}) \times x + a_{n-2}) \times x + \dots) \times x + a_0$ .  
Il y a alors  $2n$  calculs. Cela peut se démontrer aisément par récurrence (on ajoute 2 calculs par degré, c'est une suite arithmétique).  
3.  $f(x) = ((4x - 7)x + 3)x - 5$ , ce qui donne (successivement) :

$$f(2) = ((8 - 7) \times 2 + 3) \times 2 - 5 = (2 + 3) \times 2 - 5 = 10 - 5 = 5$$

### ▷ Corrigé de l'exercice 1.5

Notons  $B = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$  et  $C = (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) - 4abcd$ . Alors  
 $B^2 - C^2 = (B - C)(B + C)$   
 $= [(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + 4abcd] [(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + (a^2 - b^2)(c^2 - d^2) - 4abcd]$   
 $= [2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 4abcd] [2a^2c^2 + 2b^2d^2 + 4abcd] = 4[(ad + bc)^2][(ac - bd)^2]$

On reconnaît une fois  $E^2 + F^2 + 2EF$  et une fois  $F^2 + G^2 - 2FG$ . Donc

$$B^2 - C^2 = 4((ad + bc)(ac - bd))^2 = 4(a^2dc + c^2ab - b^2cd - d^2ab)^2 = 4[(a^2 - b^2)cd + (c^2 - d^2)ab]^2$$

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.1

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_a^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} a^{n+1-i} x^i = \sum_{i=0}^n a^{n+1-i} x^i + x^{n+1} = a \sum_{i=0}^n a^{n-i} x^i + x^{n+1} = ab_a^n(x) + x^{n+1}$ .

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}_n$  : «  $\forall x \in \mathbb{K}, (x - a)b_a^n(x) = x^{n+1} - a^{n+1}$  ».

— Pour  $n = 0$ ,  $b_a^0 = \sum_{i=0}^0 a^{0-i} x^i = 1$  et  $(x - a)b_a^0 = x - a$ . Donc  $\mathcal{P}_0$  est vraie

— Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\mathcal{P}_n$  est vraie.

$$(x - a)b_a^{n+1} = (x - a)[ab_a^n + x^{n+1}] = a(x - a)b_a^n + x^{n+2} - ax^{n+1} = a(x^{n+1} - a^{n+1}) + x^{n+2} - ax^{n+1} = x^{n+2} - a^{n+2}$$

Donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

2. On fait le calcul, il apparaît un télescopage qu'on va redémontrer :

$$\begin{aligned} (x - a)b_a^n(x) &= (x - a) \sum_{i=0}^n a^{n-i} x^i = \sum_{i=0}^n a^{n-i} x^{i+1} - \sum_{i=0}^n a^{n-i+1} x^i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a^{n-(i-1)} x^i - \sum_{i=0}^n a^{n-i+1} x^i = \sum_{i=1}^n a^{n-i+1} x^i + a^0 x^{n+1} - \sum_{i=1}^n a^{n-i+1} x^i - a^{n+1} x^0 = x^{n+1} - a^{n+1} \end{aligned}$$

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.2

1. Supposons que  $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$  avec  $c_n \neq 0$ .

Alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{k=0}^n c_k x^k - \sum_{k=0}^n c_k a^k = \sum_{k=1}^n c_k (x^k - a^k) + c_0 - c_0 \\ &= \sum_{k=1}^n c_k (x - a) b_a^{k-1}(x) = (x - a) \times \underbrace{\sum_{k=1}^n c_k b_a^{k-1}(x)}_{=g_a(x)} \end{aligned}$$

On note bien que  $g_a : x \mapsto \sum_{k=1}^n c_k b_a^{k-1}(x)$  est une fonction polynomiale.

Pour tout  $s \geq n$ , par linéarité :

$$[g_a]_s = \left[ \sum_{k=1}^n c_k b_a^{k-1} \right]_s = \sum_{k=1}^n c_k [b_a^{k-1}]_s = \sum_{k=1}^n c_k \times 0 = 0$$

car pour tout  $k \leq n$ ,  $\deg(b_a^{k-1}) = k-1 < n$ .

Et avec les mêmes calculs :  $[g_a]_{n-1} = \sum_{k=1}^n c_k [b_a^{k-1}]_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \times 0 + c_n [b_a^{n-1}]_{n-1} = c_n \neq 0$ . Donc  $g_a$  est une application polynomiale de degré  $n-1$ .

- On a donc de même en  $a \leftarrow x_0$ , pour tout  $x \in \mathbb{K}$ ,  $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)g(x)$  avec  $\deg g < n-1$ . Mais ici, en outre  $f(x_0) = 0$ .
- On applique ensuite la factorisation à  $g$ , si on connaît une de ses racines... On applique la propriété d'intégrité des corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  : si  $a(x) \times b(x) = 0$  alors  $a(x) = 0$  ou  $b(x) = 0$ . On notera que l'ensemble des matrices carrées de taille  $n > 1$  n'est pas intègre.

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.3

- Le développement de  $(x - x_0)g(x)$  donne pour tout  $x \in \mathbb{K}$  :

$$f(x) = (x - x_0)g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{i+1} - x_0 b_i x^i = \sum_{i=1}^n b_{i-1} x^i + \sum_{i=0}^{n-1} x_0 b_i x^i = -x_0 b_0 + \sum_{i=1}^n (b_{i-1} - x_0 b_i) x^i$$

Or l'écriture d'un polynôme est unique, on peut donc identifier :

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_i = b_{i-1} - x_0 b_i$ , donc  $b_{i-1} = a_i + x_0 b_i$  et  $a_0 = -x_0 b_0$  donc  $b_{-1} = 0 = a_0 + x_0 b_0$ .

- L'idée est de calculer de proche en proche les nombres  $b_i$  pour  $i$  de  $n-1$  à 0.

| $a_i$     | $a_n$                           | $a_{n-1}$                         | $a_{n-2}$ | $\dots$ | $a_1$                 | $a_0$               |
|-----------|---------------------------------|-----------------------------------|-----------|---------|-----------------------|---------------------|
| $b_{i+1}$ | $b_{n-1} = a_n + x_0 b_n = a_n$ | $b_{n-2} = a_{n-2} + x_0 b_{n-1}$ |           | $\dots$ | $b_0 = a_1 + x_0 b_1$ | $a_0 + x_0 b_0 = 0$ |

i) On écrit d'abord la première ligne avec les coefficients de  $f$  par ordre décroissant.

ii) On remplit la seconde ligne :

a) le premier terme est le même qu'à la ligne d'au-dessus

b) on calcule les termes de gauche à droite en additionnant : celui du dessus avec celui de gauche multiplié par  $x_0$

- Ce sont exactement les mêmes calculs que ceux du développement d'Hörner de  $f$  en  $x_0$ . Cela signifie que le dernier nombre qu'on obtient est en fait  $f(x_0)$ , qui est bien nul lorsque  $x_0$  est racine de  $f$ .
- $f(2) = 32 - 2 \times 16 + 8 - 4 - 4 = 0$ . On a alors le tableau :

| $a_i$     | 1 | -2           | 1           | -1           | -2           | 0 |
|-----------|---|--------------|-------------|--------------|--------------|---|
| $b_{i+1}$ | 1 | $-2 + 2 = 0$ | $1 - 0 = 1$ | $-1 + 2 = 1$ | $-2 + 2 = 0$ | 0 |

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{K}$ ,  $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x = (x-2)(x^4 + x^2 + x)$

- $g(-1) = -1 + 2 + 1 - 2 = 0$ . On a alors le tableau :

| $a_i$     | 1 | 2                       | -1                | -2                  |
|-----------|---|-------------------------|-------------------|---------------------|
| $b_{i+1}$ | 1 | $2 + (-1) \times 1 = 1$ | $-1 + (-1)1 = -2$ | $-2 + (-1)(-2) = 0$ |

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{K}$ ,  $g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x+1)(x^2 + x - 2)$

### ▷ Corrigé de l'exercice 2.4

- $f(1) = 1 - 5 + 4 = 0$ , donc  $f(x) = (x-1)(x^3 + x^2 - 4x - 4)$ , puis  $f(-1) = 0$  également et comme  $((-1) - 1) \neq 0$ , alors on peut factoriser  $x^3 + x^2 - 4x - 4$  par  $x+1$ .

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - 4) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

Il ne peut y avoir d'autres racines.

2. On fixe  $f$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On fait ensuite une récurrence finie sur  $p \leq n$ .

On pose alors  $\mathcal{P}_p$  : « si  $x_1, x_2, \dots, x_p$  sont  $p$  racines distinctes de  $f$ , alors il existe  $g_p$  de degré  $n - p$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{K}$ ,  $f(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_p)g_p(x)$  »

—  $\mathcal{P}_0$  ( $g_p = f$ ) (et  $\mathcal{P}_1$ ) est vraie.

— Soit  $p < n$ . Supposons que  $\mathcal{P}_p$  est vraie.

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}$   $p + 1$  solutions de  $f(x) = 0$ .

Alors d'après  $\mathcal{P}_p$ . Il existe  $g_p$  de degré  $n - p$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_p) \times g_p(x)$$

Puis  $f(x_{p+1}) = 0 = (x_{p+1} - x_1)(x_{p+1} - x_2) \cdots (x_{p+1} - x_p) \times g_p(x_{p+1})$ .

Comme  $x_{p+1} \neq x_i$ , alors  $x_{p+1} - x_i \neq 0$  et nécessairement  $g_p(x_{p+1}) = 0$ .

Et donc il existe  $g_{p+1}$  de degré  $n - p - 1$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad g_p(x) = (x - x_{p+1}) \times g_{p+1}(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_{p+1}) \times g_{p+1}(x)$$

Et donc  $\mathcal{P}_{p+1}$  est vraie.

La récurrence est démontrée

3. Raisonnons par l'absurde : si  $f$  admet strictement plus de  $n$  racines, on peut factoriser  $f$  de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n)g_0(x)$$

avec nécessairement  $g_0$ , de degré 0, donc constant. On a alors  $f(x_{n+1}) = 0$  égal à un produit de nombres non nuls. Ainsi  $g_0 = 0$  et donc  $f = 0$ , il ne serait pas de degré  $n$ .

### ▷ Corrigé de l'exercice 3.1

1. Plusieurs options,

Méthode 1 : on peut exploiter la forme canonique.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b - \delta}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

où  $\delta$  vérifie  $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$ .

On pourrait faire le calcul dans l'autre sens, ce serait plus facile. . .

Méthode 2 : notons  $x_1$  et  $x_2$  les deux racines de  $f$ . Elles sont indiscernables (le choix de  $x_1$  et  $x_2$  est arbitraire).

Le nombre  $(x_1 - x_2)^2$  vérifie la même propriété :  $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$ , cela doit pouvoir s'exprimer en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

Or ici  $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a}$  (d'après la question suivante).

Et donc  $(x_1 - x_2)^2 = \frac{\Delta}{a^2}$ . Au passage, on comprend le nom de discriminant : il mesure (le carré de) la différence entre les deux racines de  $f$ .

On a alors  $x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$  et comme  $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$ , on trouve  $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

2. On développe la factorisation  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$  et on identifie (unicité d'écriture).
3.  $x$  et  $y$  sont les racines du polynôme  $x^2 - 5x - 14$  de discriminant  $\Delta = 25 + 56 = 81 = 9^2$ .  
Donc  $x = \frac{5+9}{2} = 7$  et  $y = \frac{5-9}{2} = -2$  (ou l'inverse)

### ▷ Corrigé de l'exercice 3.2

1. On a les équivalences

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \\ &\iff y^3 + (-a + a)y^2 + \left(\frac{a^2}{3} - 2a\frac{a}{3} + b\right)y + \left(-\frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0 \\ &\iff g(y) = 0 \text{ avec } g : t \mapsto t^3 + \underbrace{\frac{3b - a^2}{3}}_{=p}t + \underbrace{\frac{a(2a^2 - 9b) + 27c}{27}}_{=q} \end{aligned}$$

2. Supposons l'existence de ces nombres  $u$  et  $v$ .  
On a alors  $z^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ . Et donc

$$0 = z^3 + pz + q = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - 3uv(u+v) + q = u^3 + v^3 + q$$

$$0 = u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = X^2 \left( X^2 + qX - \left(\frac{p}{3}\right)^3 \right)$$

où l'on a posé  $X = u^3$ . Supposons  $X \neq 0$  (sinon  $uv = p = 0$ ) et donc  $\Delta_X = q^2 + \frac{4}{27}p^3$  puis

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2} \text{ et } v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$$

On aura remarqué qu'on a bien

$$(uv)^3 = \frac{1}{4} \left( q^2 - q^2 - \frac{4}{27}p^3 \right) = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

On note  $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ , l'une des racine 3-ième de l'unité, il s'agit de prendre des racines 3ème.

Il semble qu'il y ait beaucoup de combinaisons possibles. Mais parmi celles-ci, on retrouve au bout du compte que 3 nombres  $z$  distincts.

Ils sont de la forme  $j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})} + j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}$  où  $k \in \{0, 1, 2\}$ .

3. Ici  $p = -2$  et  $q = -4$ . Donc  $\Delta = -(4 \times (-8) + 27 \times 16) = -25 \times 16$ .

Ainsi  $u_k = j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2}(4 + \frac{20}{\sqrt{27}})} = \frac{1}{\sqrt{3}} j^k \sqrt[3]{(6\sqrt{3} + 10)}$  et de même  $v_k = \frac{1}{\sqrt{3}} j^k \sqrt[3]{(6\sqrt{3} - 10)}$ .

Ainsi  $z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt[3]{(6\sqrt{3} + 10)} + \sqrt[3]{(6\sqrt{3} - 10)} \right) = \dots = 2$ .

On peut par exemple chercher des nombres entiers  $a, b$  tels que  $(a\sqrt{3} + b)^3 = 6\sqrt{3} + 10$ ... par développement, divisibilité, essai/erreur, on trouve :  $(\sqrt{3} + 1)^3 = 6\sqrt{3} + 10$  et  $(\sqrt{3} - 1)^3 = 6\sqrt{3} - 10$ ...

On peut vérifier qu'il est plus simple ici de voir que 2 est racine évidente, factoriser par  $(x - 2)$ , puis trouver les deux autres racines conjuguées...

▷ **Corrigé de l'exercice 4.1**     Difficile...