

# Chapitre 4

## Ensemble des nombres complexes

### Résumé -

Dans ce chapitre, nous reprenons des résultats de lycée sur les nombres complexes et leur lien avec la géométrie du plan. Ce sont des bons outils pour reprendre les propriétés trigonométriques!

Comme, ces nombres ont été inventés/découverts pour résoudre tout type d'équation polynomiale, il est normal que ce chapitre soit associé à la recherche des solutions de  $x^n = 1$ , i.e. la recherche des racines de l'unité.

Puis nous nous intéressons aux transformations géométriques du plan. Lorsque l'espace géométrique étudié est de dimension 2 (plan  $\mathbb{R}^2$ ), les nombres complexes sont de parfaits outils pour faire cette étude. En effet, ces nombres ont un lien fort avec la géométrie (revue au chapitre suivant) : addition de complexes = translation et multiplication de complexes = homothétie et rotation (similitude)...

- Micmath - La conjugaison complexe est un automorphisme de corps. <https://www.youtube.com/watch?v=AVDMPnwsztg>
- Les maths en finesse - Racines nième de l'unité. <https://www.youtube.com/watch?v=aZLGdnktO8k>
- Exo7Math - Nombres complexes part.4 : géométrie. <https://www.youtube.com/watch?v=ej9zpQYsQs8>
- AEV - Nombres complexes / Applications à la géométrie. <https://www.youtube.com/watch?v=HfxqAQ1SiGo>

### Sommaire

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Problèmes . . . . .                                            | 48 |
| 2. EULER : manipulateur des nombres du diable . . . . .           | 48 |
| 2.1. Racine de polynômes . . . . .                                | 48 |
| 2.2. Calcul algébrique . . . . .                                  | 49 |
| 2.3. Représentation graphique (addition et longueur) . . . . .    | 51 |
| 2.4. Inégalités . . . . .                                         | 51 |
| 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe . . . . . | 53 |
| 3.1. Les complexes de module 1 . . . . .                          | 53 |
| 3.2. Notation exponentielle . . . . .                             | 54 |
| 3.3. Formules d'Euler et de de Moivre . . . . .                   | 56 |
| 3.4. Argument, forme trigonométrique . . . . .                    | 57 |
| 4. Racines d'un nombre complexe . . . . .                         | 58 |
| 4.1. Recherche de racines carrées . . . . .                       | 58 |
| 4.2. Racines $n$ -ièmes de l'unité . . . . .                      | 60 |
| 4.3. Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe . . . . .            | 61 |
| 5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$ . . . . .            | 62 |
| 5.1. Regard géométrique sur le plan complexe . . . . .            | 62 |
| 5.2. Transformations du plan (point de vue complexe) . . . . .    | 63 |
| 6. Bilan . . . . .                                                | 67 |

## 1. Problèmes

### ? Problème 17 - Multiplication de nombres

Que représente la multiplication complexe  $Z = z \times z'$  pour des points  $M(z)$  et  $M'(z')$ .

En particulier, existe-t-il un algorithme géométrique pour tracer cette multiplication ?

On pourra dans un premier temps, considérer que  $z \in \mathbb{R}$ ,  $z' \in \mathbb{U}$

### ? Problème 18 - Théorème de Napoléon

En exploitant les nombres complexes, démontrer le théorème de Napoléon :

*Si nous construisons trois triangles équilatéraux à partir des côtés d'un triangle quelconque, tous à l'extérieur ou tous à l'intérieur, les centres de ces triangles équilatéraux forment eux-mêmes un triangle équilatéral.*

Beaucoup de problèmes (théorème de Ptolémée, théorème de Cotes...), du plan se démontre par *calculs* avec des nombres complexes.

### ? Problème 19 - Transformation du plan

A l'aide des nombres complexes, comment trouver toutes les transformations du plan qui conserve les longueurs et/ou les angles ?

### ? Problème 20 - Application en physique

On connaît beaucoup d'applications en physique des nombres complexes (notés  $j$ ), en particulier en électricité ou pour l'étude de Fourier.

La loi de Snell-Descartes donne pour la réfraction entre deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$  :  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ .

Lorsque  $n_1 > n_2$  et  $\theta_1$  proche de 0 (donc  $\sin \theta_1$  proche de 1), on trouve  $\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 > 1$ , et donc  $\cos \theta_2 \in \mathbb{C}$ .

Avec ce nombre complexe, Augustin FRESNEL unifiait en une seule formule ce qui se présentait jusqu'alors sous deux formes. Quelle est cette formule ?

## 2. EULER : manipulateur des nombres du diable

### 2.1. Racine de polynômes

#### 🔍 Analyse - Problème de Cardan (1545)

#### 📖 Histoire - Citation

« Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles ; mais quelques seulement imaginaires ; c'est à dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant qu'il y a d'Equation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celles qu'on imagine. » Descartes (1637)

Les règles de calcul sont données par Raphaël Bombelli (1572), dans son algebra. Pendant deux siècles les mathématiciens se querellent quant à leur existence et à leurs emplois.

#### Exercice

On reprend un exercice historique de Bombelli.

En reprenant les règles classiques de calcul, évaluer  $(2 + \sqrt{-1})^3$ .

En employant les formules de Cardan, trouver les racines de  $x^3 = 15x + 4$ .

## 2.2. Calcul algébrique

Euler invente la notation  $i$  bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : «  $e^{i\pi} = -1$  donc Dieu existe ».



#### Remarque - Unicité

Un complexe est un « nombre »  $z$  qui s'écrit  $z = a + ib$  où  $a$  et  $b$  sont des réels et  $i$  vérifie  $i^2 = -1$ . Cette écriture est unique et s'appelle la forme algébrique de  $z$ .

Comme la construction de  $\mathbb{C}$  n'est pas donnée, il n'est pas possible de démontrer l'unicité de l'écriture de  $z$ , ni la justification des règles de calcul. Nous les admettons alors. Ce n'est pas rien...



#### Pour aller plus loin - Construction de $\mathbb{C}$

Rassurons nous : nous construirons bien  $\mathbb{C}$  par la suite, selon la méthode proposée par Cauchy (avec des classes d'équivalence).

#### Définition - Notation de nombre complexe (1748)

Soit  $z = a + ib$  un complexe ( $a$  et  $b$  sont des réels).

$a = \operatorname{Re} z$  s'appelle la **partie réelle** de  $z$ .

$b = \operatorname{Im} z$  s'appelle la **partie imaginaire** de  $z$ ;

$z$  est dit **imaginaire pur** ( $z \in i\mathbb{R}$ ) si sa partie réelle est nulle.

$\bar{z} = a - ib$  s'appelle le **conjugué** de  $z = a + ib$ .

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  s'appelle le **module** de  $z$ .

Notons tout de suite comment se comportent les calculs habituelles addition et multiplication sur  $\mathbb{C}$  (il s'agit presque de définition ici...)

#### Définition - (et proposition ?) $\mathbb{C}$ est un corps

Pour tout  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ ,  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ ,

—  $\operatorname{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \operatorname{Re}(z) + \lambda' \operatorname{Re}(z')$  (la partie réelle est  $\mathbb{R}$ -linéaire sur  $\mathbb{C}$ )

—  $\operatorname{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \operatorname{Im}(z) + \lambda' \operatorname{Im}(z')$  (la partie imaginaire est  $\mathbb{R}$ -linéaire sur  $\mathbb{C}$ )

— si  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$ , alors  $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

En particulier  $z \times \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$ , donc  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

#### Exercice

En déduire que  $\mathbb{C}$  est commutatif



#### Remarque - Importance du conjugué

Le fait que  $z\bar{z}$  est un nombre réel (pur) explique l'importance de la notion de conjugué.

#### Démonstration

On a alors

**Proposition - Conjugaison**

On a les propriétés du conjugué :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R}, \quad \overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

**Démonstration**

**Proposition - Puissance et conjugaison**

On définit les puissances d'un nombre complexe par

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z^{n+1} = z^n z \end{cases}$$

On a alors  $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$ .

Pour  $z \neq 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $z^{-n} = \frac{1}{z^n} = (z^n)^{-1}$ , on a alors  $\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$ .

Exercice

Faire la démonstration

Exercice

Démontrer la formule de Moivre (1707) :  $(\cos a + i \sin a)^n = \cos(na) + i \sin(na)$ .

(Il est compliqué de comprendre comment il a cette idée, au. hasard ?)

**Proposition - Propriétés du module**

On a les propriétés du module :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, a \in \mathbb{R}_+, \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad |az| = a|z| \quad |zz'| = |z||z'|$$

$$|z| = |\bar{z}| = |-z| \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (\text{si } z' \neq 0)$$

**Démonstration****Remarque - Valeur absolue et module**

Pour un réel, valeur absolue et module coïncident !

**2.3. Représentation graphique (addition et longueur)**

On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(0, \vec{u}, \vec{v})$ . Le point  $M$  de coordonnées  $(a, b)$ , caractérisé par  $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ , peut alors être représenté par le complexe  $z = a + ib$ .

**Définition - Affixe d'un point. Affixe d'un vecteur**

$z = a + ib$  est alors appelé **affixe** du point  $M(a, b)$ , on peut noter  $z = \text{Aff}(M)$ .

Réciproquement, le point  $M$  est appelé (point) image de  $z$ .

De même, si  $\vec{w}$  est un vecteur de coordonnées  $(a, b)$ ,  $a + ib$  est appelé affixe de  $\vec{w}$  (noté  $\text{Aff}(\vec{w})$ ), lui-même appelé (vecteur) image du complexe  $a + ib$ .

**Remarque - Axes**

Les points de l'axe des abscisses correspondent aux points d'affixe réelle.

Les points de l'axe des ordonnées correspondent aux points d'affixe imaginaire pure.

**Proposition - Opération complexe et correspondance sur le plan géométrique**

Si  $z$  est l'affixe de  $M$  alors  $\bar{z}$  est l'affixe du symétrique de  $M$  par rapport à l'axe des abscisses.

Si  $z = \text{Aff}(M)$  alors  $|z|$  est égal à la distance  $OM$ .

Si  $z = \text{Aff}(M)$  et  $z_0 = \text{Aff}(M_0)$ , alors  $\text{Aff}(\overrightarrow{M_0M}) = z - z_0$  et  $|z - z_0| = M_0M$

**Histoire - John WALLIS (1616-1703)**

Il semble que John Wallis ait imaginé représenter les nombres complexes dans un plan.

Certainement, avait-il compris comment additionner les nombres complexes ; mais l'essentiel : il n'avait pas compris le rôle géométrique de la multiplication.

Wallis est par ailleurs un grand manipulateur de l'infini.

**2.4. Inégalités****Théorème - Inégalités**

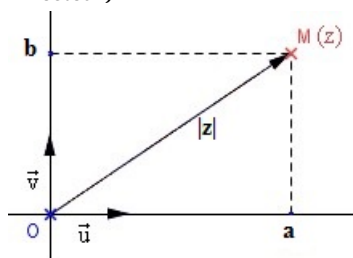
Pour  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ , on a les inégalités suivantes :

$$\text{Re } z \leq |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Im } z \leq |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R}^+$$

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'| \quad (\text{Inégalité triangulaire})$$

avec égalité dans l'inégalité de droite

**\*Représentation - Affixe d'un point (ou d'un vecteur)**

si et seulement si  $z' = 0$  ou il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que  $z = \lambda z'$  ( $z, z'$  positivement liés).

 **Attention - Module ou valeur absolue?**

 Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici

 **Analyse - Interprétation de l'inégalité triangulaire**

**Démonstration**

Par récurrence :

**Proposition - Inégalités**

Pour  $n$  complexes  $z_1, \dots, z_n$  on a

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|.$$

**Démonstration**

Voici un dernier énoncé qui découle de tout ce que l'on a déjà démontré.

**Proposition - Caractérisation des complexes remarquables**

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow |z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z \Leftrightarrow |z|^2 = (\operatorname{Im} z)^2$$

### 3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

#### 3.1. Les complexes de module 1

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.

C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur  $\mathbb{R}^2$  (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

#### Le groupe unitaire $\mathbb{U}$

**Définition - Groupe unitaire**

On note  $\mathbb{U}$  l'ensemble des complexes de module 1, c'est aussi le cercle unité de  $\mathbb{C}$ , ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

**Proposition - Conjugaison sur  $\mathbb{U}$**

$$\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2, zz' \in \mathbb{U}, \quad \forall z \in \mathbb{U}, \bar{z} = \frac{1}{z} \in \mathbb{U}.$$

On dit que l'ensemble  $\mathbb{U}$  muni de l'opération multiplication est un groupe commutatif.

#### Démonstration

#### Interprétation géométrique du calcul $u \times z$ pour $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$

#### Analyse - Géométrie

**Définition - Argument de  $u \in \mathbb{U}$ , de  $z \in \mathbb{C}$** 

Soit  $u \in \mathbb{U}$ . On note  $I$ , le point du plan d'affixe 1 et  $M$  celui d'affixe  $u$ .

On appelle argument de  $u \in \mathbb{U}$  noté  $\text{Arg}(u)$ , l'angle (principal)  $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \in ]-\pi, \pi]$ .

Dans un premier temps, on note  $\angle\theta$  ce nombre complexe de module 1 et d'argument  $\theta$ .

On a alors  $u = \cos\theta + i\sin\theta$ , pour  $\theta = \text{Arg}(u)$ .

**Remarque - Angle aigu**

Le résultat se conçoit bien pour  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , mais il reste vrai pour toute mesure d'angle (dans  $\mathbb{R}$ ), par propriété de parité ( $\cos$ ), imparité ( $\sin$ ) et  $2\pi$ -périodicité.

**Démonstration****Pour aller plus loin - Le problème est en fait lié à la relation d'égalité...**

Nous allons essayer de faire avec, au mieux. Mais lorsqu'on aura proprement défini ce que sont des relations d'équivalence, cela sera plus simple...

**Proposition - Multiplication par  $u \in \mathbb{U}$** 

Soit  $z \in \mathbb{C}$  et  $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ .

Notons  $\theta = \arg(u)$ .

Alors  $u \times z$  est l'affixe du point obtenu par rotation de centre 0 et d'angle  $\theta$ , à partir du point d'affixe  $z$

La démonstration a été faite plus haut (dans l'analyse).

**⚠ Attention - Mauvaise définition de l'argument...**

La définition donnée ici est peu satisfaisante; avec un argument principal, on n'a pas nécessairement  $\text{Arg}zz' = \text{Arg}z + \text{Arg}z'$ , mais seulement des congruences.

**3.2. Notation exponentielle****Argument ou argument (classe d'équivalence)****Corollaire - Propriété de  $\angle$ .**

Pour tout  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ ,  $\angle\theta \times \angle\theta' = \angle(\theta + \theta')$

## Démonstration

## 🔍 Analyse - Non injectivité

**Définition - et Propriété. Argument de  $z$** 

Pour tout  $z \in \mathbb{U}$ , on note  $\arg z = \{\text{Arg} z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , on le considère comme un nombre.

Pour  $z, z' \in \mathbb{U}$  :  $\arg(z \times z') = \arg z + \arg z'$  ou (de manière équivalente) :  $\text{Arg}(z \times z') \equiv \text{Arg} z + \text{Arg} z' [2\pi]$ .

## Démonstration

Notation d'Euler**Définition - Notation d'Euler**

Nous verrons que dans le cas réel, on appelle exponentielle les fonctions qui vérifient  $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ .

Elles s'écrivent (dans le cas réel) sous la forme  $x \mapsto A^x$  où  $A = f(1)$ .

Par uniformité de notation, suivant L. Euler, on notera maintenant  $e^{i\theta} = \angle\theta = \cos\theta + i \sin\theta$

 **Pour aller plus loin - Une vraie démonstration**

Euler a bien démontré cette démonstration; il ne s'agit pas d'une simple notation. Il faut donc voir qu'ici :

- il s'agit bien du nombre  $e = 2,718281\dots$
- il s'agit bien d'une puissance complexe

On a alors, plus globalement :

**Théorème - Propriétés**

Soient  $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$$

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$$

 **Histoire - D'où vient la notation  $e$  ?**

Ce n'est pas le  $e$  d'exponentielle, mais bien le  $e$  du suisse Leonard Euler

La formule d'Euler  $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$  a été obtenue à partir du développement sous forme infinie de  $\exp$ ,  $\cos$  et  $\sin$  (chapitre précédent), mais Euler n'a pas compris les propriétés géométriques du produit de complexes.

**Démonstration****Corollaire - Formule d'additions trigonométriques**Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et } \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

**Démonstration****Exercice**En déduire les formules donnant  $\cos(a - b)$  et  $\sin(a - b)$ .**3.3. Formules d'Euler et de de Moivre****Formules****Proposition - Formules d'Euler**

$$\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

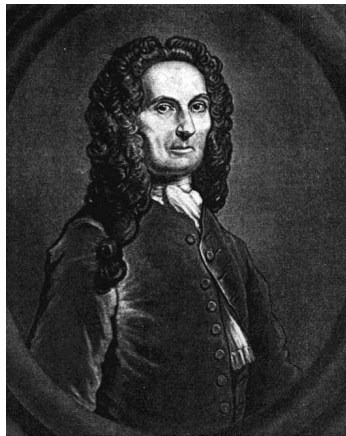
**Exercice**Calculer  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ , en déduire une expression de  $\cos \frac{7\pi}{12}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12}$ .

On exploitera ces résultats plus tard.

**Proposition - Formule de Moivre**

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

**Démonstration****Histoire - De Moivre**

Abraham De Moivre (1667, 1754), mathématicien d'origine française, mais qui du vivre en Angleterre. Hormis la formule de de Moivre (1707), il est connu pour son ouvrage sur les probabilités : *the Doctrine of chances*

**Angle moitié (pour factoriser)**

**Truc & Astuce pour le calcul - Factorisation de l'angle moitié**

Lorsqu'on rencontre une expression de la forme  $e^{ia} \pm e^{ib}$  ( $a, b$  réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

Cela donne :

$$e^{ia} \pm e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}} \left( e^{i\frac{a-b}{2}} \pm e^{-i\frac{a-b}{2}} \right)$$

Et on applique les formules d'Euler

**Exercice**

Factoriser  $1 + e^{i\theta}$  et  $1 - e^{i\theta}$ . (Re)trouver les formules donnant  $1 \pm \cos \theta$

**Exercice**

Nouveau calcul de  $\sum_{k=0}^n \cos kt$  et  $\sum_{k=0}^n \sin kt$

**Linéarisation****Savoir faire - Linéarisation**

Il s'agit d'exprimer  $\cos^n \theta$  ou  $\sin^n \theta$  sous forme d'une somme de  $\cos k\theta$  ou  $\sin k\theta$

(il ne doit plus y avoir de puissances ni de produits de cosinus ou sinus).

— Ecrire  $\cos^n \theta = \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n$ .

— Développer avec la formule du binôme.

— Regrouper les termes conjugués pour faire apparaître des cosinus ou des sinus.

Si il n'y a pas de faute de calculs, vous devez obtenir un nombre réel :

**donc simplification des  $i \dots$**

**Exercice**

Linéariser  $\cos^3 \theta$ ,  $\sin^4 \theta$ .

**Savoir faire - Expressions de  $\cos(nt)$  et  $\sin(nt)$  en fonction de  $\cos t$  et  $\sin t$** 

— Ecrire  $\cos(nt) = \operatorname{Re}(e^{int}) = \operatorname{Re}[(e^{it})^n]$  ou  $\sin(nt) = \operatorname{Im}[(e^{it})^n]$ .

— Utiliser la formule du binôme pour calculer  $(e^{it})^n = (\cos t + i \sin t)^n$ .

— Récupérer la partie réelle (ou imaginaire) en séparant les indices pairs des indices impairs.

**Pour aller plus loin - Polynôme de Tchebychev**

Les polynômes de Tchebychev (env. 1860) sont définis par récurrence par :

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$$

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

Ils vérifient alors  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}$ ,

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

**Exercice**

Ecrire  $\cos 3t$  en fonction des puissances de  $\cos t$ ,  $\sin 3t$  comme le produit de  $\sin t$  et d'une expression contenant des puissances de  $\cos t$ . Faire de même avec  $\cos 5t$  et  $\sin 5t$ .

**3.4. Argument, forme trigonométrique****Définition - Argument**

Soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , on a  $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$  donc il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$ .

On dit que  $\theta$  est un argument de  $z$ . On note  $\theta = \arg z$ .

**Pour aller plus loin - Moins loin...**

Rappelons qu'on a dit précédemment que l'argument était plutôt à considérer comme un ensemble de valeurs ; une classe d'équivalence.

L'écriture  $z = r e^{i\theta}$  où  $r = |z|$  est appelée forme trigonométrique de  $z$ .

L'argument est une fonction logarithmique (qui vérifie  $f(ab) = f(a) + f(b)$ ), mais multivariée (à plusieurs valeurs).

#### Proposition - Arithmétique de la congruence

Si  $(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2$ , on a

$$\arg \bar{z} \equiv -\arg z \quad [2\pi]$$

$$\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z \quad [2\pi]$$

$$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z') \quad [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z') \quad [2\pi]$$

#### ⚠ Attention - Pas d'unicité

Il n'y a pas unicité de l'argument, il est défini à  $2\pi$  près. On peut imposer l'unicité de l'argument en le choisissant dans un intervalle de longueur  $2\pi$  (en général  $]-\pi, \pi]$  ou  $[0, 2\pi[$ ).

#### 🛑 Remarque - Géométriquement

Soit  $z$  un complexe non nul et  $M$  le point d'affixe  $z$ . Toute mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{OM})$  est un argument de  $z$ .

Il faut savoir caractériser les complexes non nuls réels (resp. réels positifs, resp. réels négatifs, resp. imaginaires purs) par leur argument.

#### Proposition - Relation arg et arctan

Soit  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $\arg(1 + ix) \equiv \arctan x \quad [2\pi]$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , alors  $\arg z \equiv \arctan \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \quad [\pi]$ . Précisément :

$$\arg z \equiv \begin{cases} \arctan \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \quad [2\pi] & \text{si } \operatorname{Re}(z) > 0 \\ \pi + \arctan \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \quad [2\pi] & \text{si } \operatorname{Re}(z) < 0 \end{cases}$$

#### Démonstration

## 4. Racines d'un nombre complexe

### 4.1. Recherche de racines carrées

On dit que  $Z \in \mathbb{C}$  est une racine carrée de  $z \in \mathbb{C}$  si  $Z^2 = z$ . On dispose de deux méthodes pour chercher les racines carrées de  $z$ .

#### Résolution trigonométrique (la meilleure!)

 **Truc & Astuce pour le calcul - Racine carrée. Exploitation de la forme trigonométrique**

On considère un complexe non nul  $z$  écrit sous forme trigonométrique  $z = |z|e^{i\alpha}$ , et on cherche  $Z$  sous forme trigonométrique  $Z = \rho e^{i\theta}$  où  $\rho > 0$ .

On a alors  $Z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$ , on fait ensuite une sorte d'identification entre les modules et les arguments (mais attention...).

Exercice

Trouver les racines carrées de  $z = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$ .

On rappelle que  $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

La méthode-algorithmique précédente nous permet d'affirmer :

**Proposition - Deux racines complexes**

Tout complexe non nul possède exactement deux racines carrées complexes (opposées).

Résolution algébrique

 **Truc & Astuce pour le calcul - Racine carrée. Exploitation de la forme algébrique**

On considère donc un complexe non nul  $z$  écrit sous forme algébrique  $z = x + iy$ , et on cherche  $Z$  sous forme algébrique  $Z = X + iY$ .

Le principe est d'écrire l'égalité des modules, des parties réelles et imaginaires de  $z$  et  $Z^2$  pour se ramener à une résolution simple de système donnant  $X^2, Y^2$  et le signe de  $XY$ .

$$Z^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases}$$

On résout le système formée par les deux premières équations, la troisième donne le signe de  $XY$ .

Exercice

Déterminer les racines carrées de  $2 - 3i$ .

Equation du second degré

Le théorème suivant a déjà été vu. Mais ici, on insiste sur le fait que les coefficients peuvent être des nombres complexes.

**Proposition - Nombre de racines et degré**

L'équation  $az^2 + bz + c = 0$ , avec  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ ,  $a \neq 0$ , admet deux solutions complexes (éventuellement confondues)  $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$  où  $\delta$  est une racine carrée complexe de  $b^2 - 4ac$ .

 **Remarque - Bien connu...**

On retrouve la résolution déjà connue d'une équation du second degré à coefficients réels.

**Proposition - Théorème de Viète**

Soient  $(S, P) \in \mathbb{C}^2$ . Les solutions du système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 \times z_2 = P \end{cases}$$

sont exactement (à permutation près) les solutions de  $z^2 - Sz + P = 0$

Exercice

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  le système d'équation  $\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 \times z_2 = 1 - 3i \end{cases}$ .

**4.2. Racines  $n$ -ièmes de l'unité**

**Théorème - Les  $n$  solutions de  $z^n = 1$**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les  $n$  racines  $n$ -ièmes de l'unité, c'est à dire les solutions de l'équation  $z^n = 1$ , sont les  $n$  nombres  $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$  avec  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

On note  $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}$

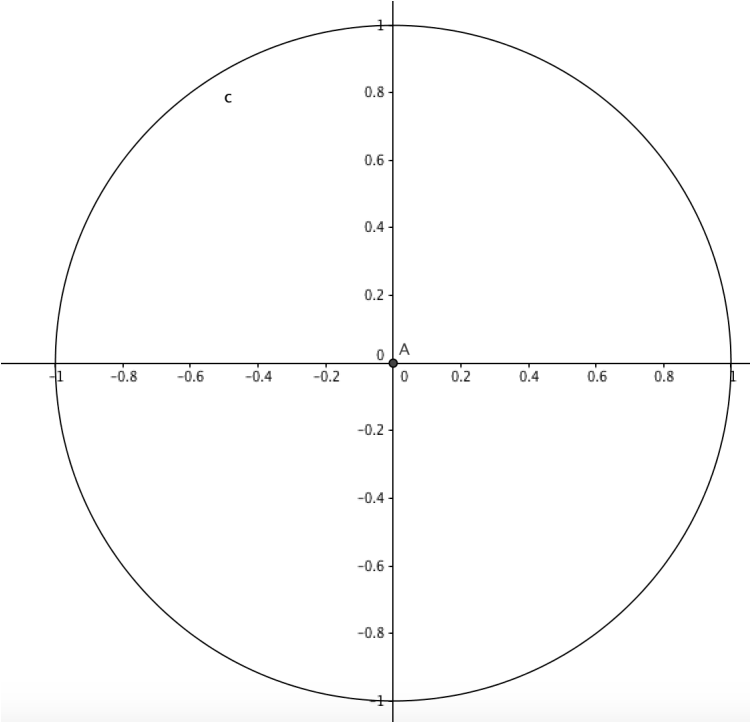
On obtient donc pour

$n = 2$  : 1 et  $-1$  ;

$n = 3$  : 1,  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \exp \frac{2i\pi}{3}$  et  $j^2 = \bar{j} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \exp \frac{4i\pi}{3}$  ;

$n = 4$  : 1,  $i$ ,  $-1$  et  $-i$ .

Il faut savoir les placer sur le cercle trigonométrique.



**Démonstration**

**Pour aller plus loin - Groupes  $(\mathbb{U}_n, \times)$**   
L'ensemble  $\mathbb{U}_n$  des racines  $n$ -ième de l'unité, avec la loi de multiplication  $\times$  en fait un groupe.  
Nous reprendrons son étude plus précisément, dans quelques semaines (activité sur les groupes) et encore plus tard (cours sur les polynômes).

**Proposition - Somme des racines  $n$ -ième**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . La somme des racines  $n$ -ièmes de l'unité est nulle.  
En particulier  $1 + j + j^2 = 0$ .

**Démonstration**

**4.3. Racines  $n$ -ièmes d'un nombre complexe****Théorème - Racines  $n$ -ièmes de  $z_0$** 

Soient  $z_0 \in \mathbb{C}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $z_0$  a exactement  $n$  racines  $n$ -ièmes (solutions de  $z^n = z_0$ ).

Si  $z_0 = |z_0|e^{i\alpha}$ , alors ce sont les

$$z_k = |z_0|^{1/n} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \text{ où } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

**Démonstration**

Exercice

Déterminer les racines  $n$ -ièmes de  $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$ .

On rappelle que  $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$  et  $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$ .

On voit bien sur ces exemples qu'il est préférable d'exploiter la forme géométrique lorsqu'on cherche des racines de nombres complexes...

## 5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathcal{P}$

### 5.1. Regard géométrique sur le plan complexe

#### Proposition - Identification

On munit le plan  $\mathcal{P}$  d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soient  $A, B, A', B'$  quatre points du plan. On a alors (*mesure des angles orientés de vecteurs*) :

$$|z_A| = OA$$

$$AB = |z_B - z_A|$$

$$\arg z_A \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{OA})[2\pi]$$

$$\text{et plus généralement : } \arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})[2\pi]$$

Le dernier résultat, essentiel, mérite une démonstration

#### Démonstration

🔗 Analyse - Le nombre  $Z = z' \times \bar{z}$

#### Définition - Le complexe $Z$

Soient  $A, B, A', B'$  quatre points du plan d'affixe  $z_A, z_B, z_{A'}$  et  $z_{B'}$  respectivement.

On note  $Z = (z_{B'} - z_{A'}) \times \overline{(z_B - z_A)}$ .

Alors

$$\arg Z \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})[2\pi] \quad \text{et} \quad |Z| = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{A'B'}\|$$

où  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  est par définition la norme (longueur) du vecteur  $\vec{u}(x, y)$ .

Et donc

$$Z = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{A'B'}\| \left[ \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) + i \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \right]$$

Le calcul donne :

#### Proposition - Partie réelle et imaginaire de $Z$

Avec les mêmes notations et en notant  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  d'affixe  $z = z_B - z_A = x + iy$  et  $\vec{u}' = \overrightarrow{A'B'}$  d'affixe  $z' = z_{B'} - z_{A'} = x' + iy'$ .

On rappelle que  $Z = z' \times \bar{z}$ . On a alors :

$$\operatorname{Re}(Z) = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{A'B'}\| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = xx' + yy'$$

$$\text{Im}(Z) = \|\vec{AB}\| \|\vec{A'B'}\| \sin(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = xy' - x'y$$

**Démonstration****5.2. Transformations du plan (point de vue complexe)****Transformations « élémentaires »****Définition - Transformation du plan**

On appelle transformation du plan toute bijection du plan dans lui-même.

**⚠ Attention - Projection**

↗ Une projection sur une droite n'est pas une transformation du plan.

**Définition - Translation**

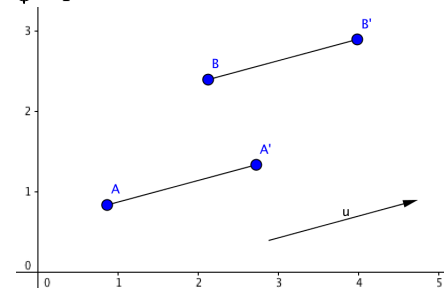
On appelle translation de vecteur  $\vec{u}$  l'application

$$t_{\vec{u}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \\ M \mapsto M' \text{ tel que } \vec{MM'} = \vec{u}$$

En complexes,  $t_{\vec{u}}$  est représentée par l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$z \mapsto z + z_0$$

où  $z_0$  est l'afixe du vecteur  $\vec{u}$ .

**\* Représentation - Translation de vecteur  $\vec{u}$** **Définition - Homothétie**

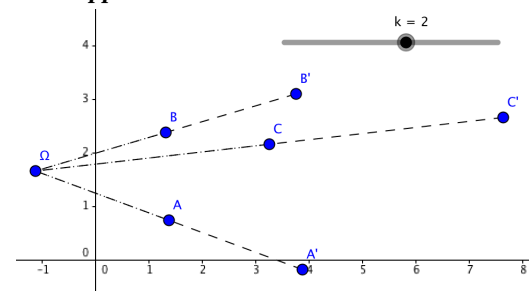
On appelle homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport le réel  $k \neq 0$  l'application

$$h_{\Omega, k} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \\ M \mapsto M' \text{ tel que } \vec{\Omega M'} = k \vec{\Omega M}$$

En complexes,  $h_{\Omega, k}$  est représentée par l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$z \mapsto z_0 + k(z - z_0)$$

où  $z_0$  est l'afixe du point  $\Omega$ .

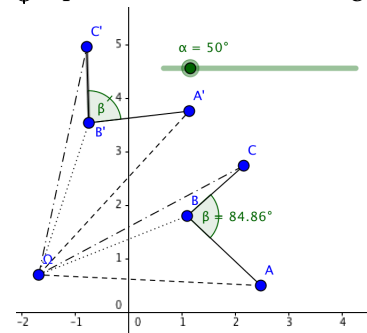
**\* Représentation - Homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k = 2$** **Définition - Rotation**

On appelle rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  l'application

$$R_{\Omega, \theta} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \\ M \mapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \text{ si } M \neq \Omega \\ \Omega \mapsto \Omega$$

En complexes,  $R_{\Omega, \theta}$  est représentée par l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par

$$z \mapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$$

**\* Représentation - Rotation d'angle  $\alpha$** 

où  $z_0$  est l’affixe du point  $\Omega$ .

Similitudes (directes)

Il s’agit de composition de rotation et d’homothétie...

Définition - Similitude directe

On appelle similitude directe du plan toute transformation représentée dans le plan complexe par une application de la forme

$$z \mapsto az + b$$

avec  $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ .

Remarque - Les transformations élémentaires

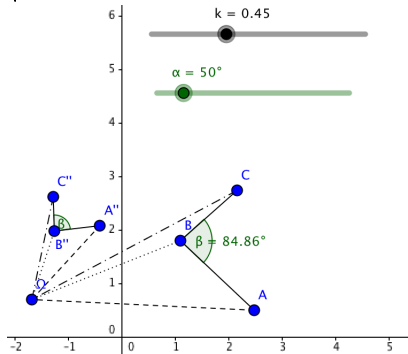
Translations, homothéties et rotations sont des similitudes directes, il suffit de regarder leur expression en complexe.

Analyse - Résultats caractéristiques

Pour aller plus loin - Groupe

Comme la composition de deux polynômes de degré 1 donne un polynôme de degré 1 (et que  $a \neq 0$ ), l’ensemble des similitudes est un groupe !

Représentation - Similitude (directe)



Proposition - Similitude directe

Une similitude directe conserve les angles et les rapports des distances. Si  $A, B, C$  sont trois points distincts d’images respectives  $A', B', C'$  par Alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Démonstration

Théorème - Caractérisation

Soit  $f$  la transformation du plan représentée par  $z \mapsto az + b$  avec  $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$ .

- Si  $a = 1$ ,  $f$  est la translation de vecteur d’affixe  $b$ .
- Si  $a \neq 1$ ,  $f$  admet un unique point fixe (point invariant)  $\Omega(\frac{b}{1-a})$  appelé centre de la similitude.
  - $f$  s’écrit alors :  $f = h \circ r = r \circ h$  avec
    - $r$  rotation de centre  $\Omega$  d’angle de mesure  $\arg a$
    - $h$  homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $|a|$ .

On dit que  $|a|$  est le rapport de la similitude, et  $\arg a$  est (la mesure de) l’angle de la similitude.

**Démonstration****Remarque - Cas particuliers avec  $a \neq 1$  :**

- Si  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $f$  est l'homothétie de centre  $\Omega$  de rapport  $a$ .
- Si  $|a| = 1$ ,  $f$  est la rotation de centre  $\Omega$ , d'angle  $\theta = \arg a$ .

**Corollaire - Caractérisation de la similitude**

La similitude de centre d'affixe  $z_0$ , de rapport  $k$  et d'angle  $\theta$  est représentée par

$$z \mapsto z_0 + ke^{i\theta}(z - z_0).$$

 **Savoir faire - Reconnaître une similitude**

Etant donnée une transformation, pour reconnaître une similitude il faut :

1. chercher le point fixe : la solution de  $f(z) = z$ .  
On le note  $z_0$ , c'est le centre de la similitude.
2. chercher le complexe  $a$  tel que  $f(z) - z_0 = a(z - z_0)$ .  
Ce complexe  $a$  donne le rapport et l'angle de la similitude

**Proposition - Composée de similitudes**

La composée de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des rapports et l'angle, la somme des angles.

On a les cas particuliers suivants :

- la composée de deux translations est une translation de vecteur la somme des deux vecteurs,
- la composée de deux homothéties est soit une homothétie soit une translation,
- la composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle la somme des deux angles (éventuellement d'angle nul, i.e. l'identité du plan)
- la composée de deux rotations de centres distincts, d'angles respectifs  $\theta$  et  $\theta'$  est :
  - une rotation si  $\theta + \theta' \neq 0[2\pi]$
  - une translation (éventuellement de vecteur nul, i.e. l'identité) sinon.

Démonstration

Corollaire - Transformation réciproque (ou inverse)

On a les transformations réciproques suivantes :

$$t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}; \quad h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}; \quad R_{\Omega,\theta}^{-1} = R_{\Omega,-\theta}.$$

Proposition - Transformation du plan

Etant donné deux segments  $[MN]$  et  $[M'N']$  de longueurs non nulles, il existe une et une seule similitude directe transformant  $M$  en  $M'$  et  $N$  en  $N'$ .

Démonstration

 Pour aller plus loin - Symétries

La symétrie centrale de centre  $\Omega$  est la transformation du plan définie par  $z \mapsto 2z_0 - z$  où  $z_0$  est l'afixe du point  $\Omega$ .

La symétrie (axiale) orthogonale d'axe la droite  $\mathcal{D}$  (passant par  $O$  avec un angle  $\theta$ ) (ou réflexion d'axe  $\mathcal{D}$ ) est  $z \mapsto e^{2i\theta} \bar{z}$ .

## 6. Bilan

### Synthèse

- ↪ Les relations trigonométriques permettent d'obtenir une relation algébrique simple lorsqu'on considère la fonction d'EULER à valeurs complexes  $t \mapsto \cos t + i \sin t$ , notée  $e^{it} : e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$ . A partir de celle-ci, on retrouve toutes les formules (en exploitant la relation de DE MOIVRE, le binôme de NEWTON ou les fonctions linéaires Re ou Im). **A savoir-faire manipuler absolument!**
- ↪ Très souvent la question se pose de manière réciproque : étant donné une longueur de quel angle en est-elle le cos ? Le problème, la fonction n'est pas injective : on peut avoir  $\theta \neq \theta'$  et  $\cos \theta = \cos \theta'$ . On restreint donc l'intervalle image. On crée ainsi une fonction réciproque arccos à la fonction  $\cos_{|[0,\pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ . De même pour les fonctions  $\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$  et  $\tan_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ .
- ↪ On se pose la même question pour  $z \mapsto z^2$  et plus largement  $z \mapsto z^n$ . Étant donné un nombre complexe  $Z = \rho e^{i\alpha}$ , il y a exactement  $n$  nombres complexes différents  $z_1, \dots, z_n$  tels que pour tout  $k \in \mathbb{N}_n$ ,  $(z_k)^n = Z$ . Ce sont les racines  $n$ -ième de  $Z$ . Pour les obtenir, on se ramène **aux classiques racines  $n$ -ième de l'unité**  $e^{2ik\pi/n}$  en divisant par  $\sqrt[n]{\rho} e^{i\alpha/n}$ .  
Au passage, on trouve une méthode complémentaire (algébrique) dans le simple cas de la racine carrée d'un nombre complexe.
- ↪ La géométrie plane (de  $\mathbb{R}^2$ ) se code parfaitement par du calcul, sur  $\mathbb{C}$ . Les concepts naturels de géométrie (longueur, orthogonalité, parallélisme) se réduisent exactement par du calcul, selon le rêve de Descartes ou de Leibniz.
- ↪ En retour, le calcul complexe simple : addition, multiplication, division devient une opération géométrique : translation, similitude sans ou avec conjugaison respectivement voire inversion...

### Pour aller plus loin - Inversion

L'inversion est une transformation essentielle en géométrie projective.

L'inversion par rapport au cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega(\omega)$  et de rayon  $r \in \mathbb{R}$  est l'application  $M(z) \mapsto M'(z')$  telle que  $(z - \omega) \times (z' - \omega) = r^2$ .

Pour que  $\Omega$  puisse avoir une image, on la définit sur  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

### Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Truc & Astuce pour le calcul - Factorisation de l'angle moitié
- Savoir-faire - Linéarisation
- Savoir-faire - Expression de  $\cos(nt)$  et  $\sin(nt)$  en fonction de  $\cos t$  et  $\sin t$
- Truc & Astuce pour le calcul - Racine carrée. Exploitation de la forme trigonométrique
- Truc & Astuce pour le calcul - Racine carrée. Exploitation de la forme algébrique
- Savoir-faire - Reconnaître une similitude

Notations

| Notations      | Définitions                                                                                      | Propriétés                                                                                                                                                                                              | Remarques                                                                                                                                                                                                             |
|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Re, Im         | Fonctions partie réelles et parties imaginaires, appliquées à un nombre complexe                 | Elles sont $\mathbb{R}$ -linéaires ( $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(a_1 z_1 + a_2 z_2) = a_1 \operatorname{Re}(z_1) + a_2 \operatorname{Re}(z_2) \dots$ ) |                                                                                                                                                                                                                       |
| $e^{i\theta}$  | $e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$ (Euler)                                             | $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$                                                                                                                                               | Relations de de Moivre :<br>$\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ ,<br>$\sin \theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ . |
| $j$            | $j := e^{2i\pi/3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$                                                    | $j^3 = 1, 1 + j + j^2 = 0$                                                                                                                                                                              | Racine primitive troisième de l'unité (avec $\bar{j} = j^2$ )                                                                                                                                                         |
| $\mathbb{U}_n$ | Ensemble des racines $n$ -ième de l'unité<br>$\mathbb{U}_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ | $z \in \mathbb{U}_n$ si et seulement si<br>$\exists !k \in \mathbb{N}_n$ (ou $\exists !k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ) tq $z = e^{2ik\pi/n}$                                                      | Reviendra souvent dans l'année.                                                                                                                                                                                       |

Retour sur les problèmes

17. Multiplication des nombres.  
 $z \times z'$  donne (géométriquement) le nombre complexe obtenu par similitude de centre  $O$ , de longueur  $|z|$ , et d'angle  $\arg(z)$  à partir du point  $Z'(z')$ .  
On peut l'obtenir en appliquant le théorème de Thalès. On note  $I$ , l'intersection du cercle unité et de la droite  $OZ'$ . Puis on trace la parallèle à  $IZ$  passant par  $Z'$ . L'intersection de cette droite avec  $OZ$  donne le point  $Z''(z \times z')$ .
18. Le centre du triangle équilatéral sur le côté  $[AB]$  a pour affixe  $z_1 = \frac{b - e^{i\pi/6}a}{1 - e^{i\pi/6}} = \frac{ib e^{-i\pi/12} - i a e^{i\pi/12}}{2 \sin \frac{\pi}{12}}$  car  $(b - z_1) = e^{i\pi/6}(a - z_1) \dots$
19. Transformation du plan  
Tout le chapitre répond à cet exercice
20.  $\cos \theta_2 = i \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}}{n_2}$ . Pour le reste, voir avec M. Lagoute.