

Chapitre 11

Applications (entre ensembles)

Résumé -

Nous complétons quelques notions essentielles du fondement des mathématiques (formalisé non sans mal à la fin du XIX-ième siècle). Ces fondements se basent sur les ensembles et sur les applications entre ces ensembles!

Quelles sont les applications qui ne transforment pas trop les ensembles?

Les ensembles images ou réciproques (retour) permet de décrire (par des ensembles) les qualités de l'application.

Une application classique est l'application qui compte les éléments. On précisera ici les notions intuitives de cardinaux des ensembles ici.

Nous terminerons pas étudier les familles Quelques vidéos :

- Khan Academy - Intersection et union d'ensembles - <https://www.youtube.com/watch?v=vcwMTpgNIQA>
- Canal unisciel (P. Dehornoy) - La théorie des ensembles 50 ans après Cohen - https://www.canal-u.tv/video/institut_fourier/patrick_dehornoy_la_theorie_des_ensembles_cinquante_ans_apres_cohen.41917

Sommaire

1. Problèmes	216
2. Applications de E dans F	217
2.1. Vocabulaire lié aux applications	217
2.2. Bijections (injections et surjections)	219
3. Image directe et image réciproque d'un ensemble	222
3.1. Image directe	223
3.2. Image réciproque d'un ensemble	224
4. Fonction indicatrice	226
4.1. Définition	226
4.2. Propriétés ensemblistes et calcul avec fonctions indicatrices	226
5. Cardinal d'ensemble fini	227
5.1. Principe des tiroirs	227
5.2. Classe des ensembles de même cardinal	228
5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie)	229
6. Familles	230
6.1. Familles quelconques	230
6.2. Famille indexée sur $\mathbb{N}$. Suites	231
7. Bilan	234

1. Problèmes

? Problème 52 - Qualités des fonctions

Résoudre une équation, c'est trouver x (tous les x) tel que $f(x) = b$, où b et f sont connus.

Il est intéressant de savoir si :

- l'équation a (au moins) une solution.
- l'équation a exactement une solution.
- l'équation a (au plus) une solution.

Evidemment, la réponse dépend de b et de f , on peut la noter $f^{-1}(\{b\})$, c'est un ensemble de solution (qui peut être vide)!

Si on reprend ces trois options, qu'on généralise à tout b , on trouve 3 qualités précises de f . Comment peut-on qualifier ces trois propriétés?

? Problème 53 - Image mentale

Voici une image donnée par un étudiant en 2025-2026.

Si l'on considère la distribution du courrier; B , l'ensemble des boîtes aux lettres et C l'ensemble des courriers, est-il plus naturel de considérer $\Phi : B \rightarrow C$: à chaque boîte aux lettres, on associe les courriers reçus par le propriétaire ou bien $\Phi : C \rightarrow B$, à chaque courrier on associe la boîte aux lettres du destinataire?

Les questions qui suivent naturellement sont alors : est-ce que tout le monde a du courrier? Peut-il y avoir plusieurs courriers pour une même personne?

? Problème 54 - Description d'ensemble simple

Peut-on comparer deux ensembles facilement. Pour être un tant soit peu identique, ils doivent au moins avoir le même nombre d'éléments.

Comment fait-on pour savoir cela? Quelle est la nature du lien qui unit l'un à l'autre? Existe-t-il des ensembles de référence à k éléments?

Comment calculer formellement le nombre d'éléments d'un sous-ensemble?

? Problème 55 - Cardinal fini. Cardinal infini

Deux ensembles sont de taille identique s'il existe une application bijective de l'un sur l'autre.

Même l'existence d'une application bijective d'un ensemble à un autre peut très bien se produire même si les ensembles ne sont pas de taille fini.

Existe-t-il des ensembles infinis de même taille? Des ensembles infinis de tailles différentes? Existe-t-il une relation d'ordre (totale?) entre les ensembles de taille infini?

? Problème 56 - Nombres rationnels

Quelles sont les caractéristiques de l'application : $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$,
 $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$?

? Problème 57 - Famille $(O_i)_{i \in I}$

Lorsqu'une application dépend d'un nombre réel, on note $f : x \mapsto \dots$ cette application.

Lorsqu'elle dépend d'un nombre entier naturel, on la note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Existe-t-il une notation officielle pour une application qui dépend d'un ensemble I de points. Et comment on appelle cette application : fonction, suite, autre chose ?

2. Applications de E dans F

Il s'agit ici de donner une théorie plus précise sur les fonctions.

2.1. Vocabulaire lié aux applications**↗ Heuristique - Application (définition non formelle)**

Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est un "procédé" qui associe à chaque élément $x \in E$ un élément $f(x) \in F$. Une telle application est notée

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f(x)$ est appelé image de x par f ;

l'ensemble E est appelé ensemble de départ de l'application f ;

l'ensemble F est appelé ensemble d'arrivée de f .

On a donc une application de E dans F dès qu'à tout élément $x \in E$ on peut associer sans ambiguïté un élément $f(x) \in F$ (c'est-à-dire s'il y en a un et un seul possible).

Une application est donc déterminée par la donnée des couples $(x, f(x))$ où x parcourt E , d'où la définition plus formelle :

Définition - Application

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{G} \subset E \times F$ vérifiant

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \mathcal{G}.$$

La donnée d'un tel triplet $(E, F, \mathcal{G})$ s'appelle une application de E dans F .

On note

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

où y est l'unique élément de F vérifiant $(x, y) \in \mathcal{G}$.

$\mathcal{G}$ s'appelle le graphe de l'application. On le note souvent Γ_f .

On a donc $\Gamma_f = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$.

⚠ Remarque - Fonctions ou applications ?

D'après la définition, une fonction définie sur E , à valeurs dans F , est une application de E dans F .

De cette définition découle le résultat suivant :

 Savoir faire - Montrer une égalité de deux fonctions

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$ deux applications. f et g sont égales si et seulement si :

- $E = E'$ (même ensemble de départ),
- $F = F'$ (même ensemble d'arrivée),
- $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Définition - Ensemble de fonctions

On notera $\mathcal{F}(E, F)$ (on trouve aussi les notations $\mathcal{A}(E, F)$ ou F^E) l'ensemble des applications (ou fonctions) de E dans F .

 Exemple - Classiques**Définition - Restriction et prolongement**

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- Soit $A \subset E$. La restriction de f à A , notée $f|_A$, est l'application

$$\begin{aligned} f|_A : \quad A &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- Si $E \subset B$, une application $\tilde{f} : B \rightarrow F$ est **un** prolongement à B de l'application f si $\tilde{f}|_E = f$, c'est-à-dire si $\forall x \in E, \tilde{f}(x) = f(x)$.

Définition - Composée

Soient deux applications $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$. On définit l'application composée, notée $h = g \circ f$, de E dans G par

$$\forall x \in E, h(x) = g(f(x))$$

 Exemple - Identité**Remarque - Représentation**

Il est parfois utile de représenter les applications par un graphe.

⚠ Attention - Non commutativité

En général, même lorsque les deux applications $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens, elles sont différentes.

Proposition - Associativité de $\circ$

Pour trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On peut donc noter $h \circ g \circ f$.

Démonstration**2.2. Bijections (injections et surjections)****Applications injectives ou surjectives****🔗 Heuristique - Résoudre une équation**

Une fonction est de la forme : $E \xrightarrow{f} F$. A tout x de E , f donne une valeur de F . Résoudre une équation est toujours le problème inverse :

Sont données : $E \xrightarrow{f} F$ et $b \in F$. Il s'agit de trouver $x \in E$ tel que $f(x) = b$.

Les questions naturelles sont les suivantes :

- Cette équation admet-elle (au moins) une solution ?
- Cette équation admet-elle au plus une solution ?
- Cette équation admet-elle exactement une solution ? Ce qui évite les quiproquos...

Définition - Injection et surjection

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que

- f est injective (est une injection) si $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;
- f est surjective (est une surjection) si $\forall y \in F, \exists x \in E \mid y = f(x)$.

🔗 Pour aller plus loin - Exemples

Donner E, F, f et b pour les équations :

- $y' + y = x$
- $x^2 + 3x - 4 = 2$
- $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

🛑 Remarque - Notation

On pourra noter $f : E \hookrightarrow F$ pour exprimer que f est une application injective de E sur F .

On pourra noter $f : E \twoheadrightarrow F$ pour exprimer que f est une application surjective de E sur F .

Comment écrire une flèche de bijection ? $E \xleftrightarrow{\quad} F$

Exercice

Montrer que f est injective ssi $\forall b \in F, f(x) = b$ admet au plus une solution.

Montrer que f est surjective ssi $\forall b \in F, f(x) = b$ admet toujours (au moins) une solution.

🔗 Savoir faire - Autres formulations équivalentes (injectivité, surjectivité)

Il y a différentes façons équivalentes de formuler ces propriétés :

- Dire que f est injective revient à dire (par contraposée) que :

$$\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

c'est-à-dire que deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont des images distinctes.

- Dire que f est surjective revient à dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent.

 **Exemple** - $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sin x$

Exercice

L'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x - y, 2x + y) \end{aligned}$$

est-elle injective ? surjective ?

Mêmes questions avec

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x - y, 2x + y, x - 3y) \end{aligned}$$

Nous ferons plus tard une étude plus complète de l'étude des systèmes linéaires.

Exercice

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \exp z \end{aligned}$$

est-elle injective ? surjective ?



Remarque - Les ensembles qui sont importants!

On remarquera que :

- c 'est l'ensemble de départ joue un rôle important pour l'injectivité,
- c 'est l'ensemble d'arrivée joue un rôle important dans la surjectivité.

Heuristique - Stratégies

Soit $f: E \rightarrow F$. Il est pratique que f soit bijective, mais cela ne nous appartient pas en règle générale.

Toutefois, il est possible de rendre :

- f surjective en restreignant « simplement » l'ensemble d'arrivée à $f(E)$.
- f injective en restreignant l'ensemble de départ, ou plus fréquemment en considérant non plus $f: E \rightarrow F$, mais $\hat{f}: \frac{E}{\mathcal{R}_f} \rightarrow F, \bar{x} \mapsto f(x)$.

Exercice

Montrer que pour cette dernière stratégie, la fonction $\hat{f}$ est bien définie et qu'elle est injective

Théorème - Propriétés des composées

Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications.

Si f et g sont injectives (respectivement surjectives), alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective).

Démonstration**Exercice**

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Montrer que :

- si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
- si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Applications bijectives

Pour que l'équation $f(x) = b$ admette une unique solution, quel que soit $b \in F$, il faut (et il suffit) que f soit bijective :

Définition - Application bijective

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est bijective (ou est une bijection) de E sur F si f est injective et surjective.

Dire que f est bijective revient à dire que :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \quad \text{tel que} \quad y = f(x)$$

c'est-à-dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un et un seul antécédent.

Définition - Application réciproque

Soit f une bijection de E sur F , on définit une application g par

$$\begin{aligned} g : F &\rightarrow E \\ y &\mapsto x \quad | \ y = f(x) \text{ (unique antécédent de } y \text{ par } f) \end{aligned}$$

Cette application g est elle-même bijective et appelée bijection réciproque de f , et notée f^{-1} .

Démonstration**✂ Savoir faire - Critère pour montrer la bijectivité**

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications telles que $g \circ f = Id_E$ et

$$f \circ g = Id_F.$$

Alors f et g sont bijectives et $g = f^{-1}$

Exercice

Soit

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \quad \text{et} \quad n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ n-1 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Etudier l'injectivité et la surjectivité des applications f et g .Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Conclusion ?**Proposition - Relation entre f et f^{-1}** Si f est une bijection de E sur F , on a

$$\forall x \in E, (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{soit } f^{-1} \circ f = Id_E;$$

$$\forall y \in F, (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \text{soit } f \circ f^{-1} = Id_F;$$

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y);$$

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Démonstration**Pour aller plus loin - Homographie de $\mathbb{C}$**

Comme le montre l'exercice, il y a une certaine stabilité pour les fonction homographique $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ (réciproque de la même forme).

Il s'agit d'une famille de transformation de $\mathbb{C}$ très étudiée : en particulier elle conserve le birapport !

Notons que dans ce cas, il vaut mieux se placer sur $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \dots$

Exercice

Soit

$$f: \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{z+2i}{z-i}$$

Montrer que l'on peut trouver $F \subset \mathbb{C}$ tel que l'application $\hat{f}$ de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans F définie par $\hat{f}(z) = f(z)$ soit une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Théorème - Bijection réciproque d'une composéeSi $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ sont deux bijections, alors $g \circ f$ est une bijection et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration

3. Image directe et image réciproque d'un ensemble

**Heuristique - Si les applications ne sont pas bijectives**

Si $f: E \rightarrow F$ n'est pas bijective, peut-on néanmoins trouver « comme » une application réciproque.

On a vu que tout n'est pas perdu, à condition de limiter l'ensemble de départ (pour tenter de gagner l'injectivité) et de réduire l'ensemble d'arrivée (pour gagner la surjectivité).

Dans le premier cas, on s'intéressera à l'ensemble réciproque de F par f , c'est un sous-ensemble de E .

Dans le second cas, on s'intéressera à l'ensemble image de E par f , c'est un sous-ensemble de F .

3.1. Image directe

Définition - Ensemble image

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

L'ensemble des éléments de F qui admettent un antécédent par f est une partie de F appelée ensemble image ou image de f et notée $\text{Im } f$:

$$\text{Im } f = \{y \in F \mid \exists x \in E; y = f(x)\}.$$



Remarque - Autre écriture

On peut écrire $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in E\}$



Savoir faire - Critère de surjectivité.

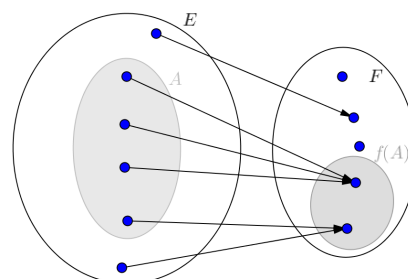
On a donc

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im } f = F$$

Et toute application $f : E \rightarrow F$ définit une surjection en restreignant l'ensemble d'arrivée, c'est à dire en considérant l'application de E dans $\text{Im } f$ qui à x associe $f(x)$ (que l'on continue usuellement à noter f , on dit alors que f est surjective de E sur $\text{Im } f$).

* Représentation - Image directe

Avec un graphe :



Définition - Image directe

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et $A \subset E$. On appelle image (directe) de A par f la partie de F , notée $f(A)$, définie par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A; y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} = \{f(x); x \in A\}.$$



Remarque - Autres notations en exploitant $\text{Im } f$

On constate que l'on a également $\text{Im } f = f(E)$.

Donc f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Et $f(A) = \text{Im } f|_A$.



Savoir faire - Montrer que $y \in f(A)$

| Pour montrer que $y \in f(A)$ il faut trouver $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Proposition - Stabilité et image

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $A_1, A_2 \subset E$. Alors

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2);$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Démonstration

⚠ Attention - Une seule inclusion pour l'intersection!
 On fera bien attention qu'il n'y a pas l'égalité : $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
 Pour se convaincre on peut penser au cas où $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
 Par exemple, avec $f : x \mapsto x^2$, $A_1 = [-2, -1]$ et $A_2 = [1, 2]$,
 alors $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, et $f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4] \cap [1, 4] = [1, 4]$

💡 Pour aller plus loin - Suite de la forme
 $u_{n+1} = f(u_n)$
 Pour les suites définies par récurrence par une fonction f itérée, ces notions de partie stable (souvent intervalle) ou de points fixes sont très importants. Nous reviendrons sur ces notions

Définition - Partie stable et application induite
 Soit $f : E \rightarrow E$ une application. On dit qu'une partie A de E est stable par f si $f(A) \subset A$.
 On appelle application induite par f sur A l'application

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

🍃 Exemple - Point fixe

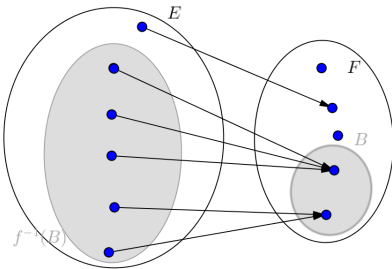
3.2. Image réciproque d'un ensemble

Définition - Image réciproque
 Soient $f : E \rightarrow F$ une application et $B \subset F$. On appelle image réciproque de B par f la partie de E , notée $f^{-1}(B)$ (ou $[f \in B]$ en probabilité), définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

C'est donc l'ensemble formé des antécédents par f des éléments de B .

✳ Représentation - Image réciproque
 Avec un graphe :



🍃 Exemple - Pour $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \exp x$

⚠ Attention - Ne pas confondre la fonction f^{-1} et l'ensemble $f^{-1}(B)$

⚡ Il s'agit d'une notation qui ne demande pas que f soit bijective. (voir l'exemple précédent)

🔧 Savoir faire - Montrer que $x \in f^{-1}(B)$

| Pour montrer que $x \in f^{-1}(B)$ il faut montrer que $f(x) \in B$.

🍃 Exemple - Fonction sin**🛑 Remarque - Et si f est bijective**

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Pour $B \subset F$ la notation $f^{-1}(B)$ n'est pas ambiguë.

En effet, ici f^{-1} existe, et $f^{-1}(B)$ est l'image de B par f^{-1} . Donc

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \text{Im } f^{-1} = \{f^{-1}(y), y \in B\} = \{x \in E \mid \exists y \in B, x = f^{-1}(y)\} \\ &= \{x \in E \mid f(x) \in B\} = f^{-1}(B) \end{aligned}$$

Proposition - Stabilité et image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $B_1, B_2 \subset F$. Alors

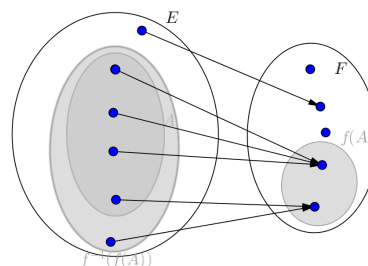
$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Démonstration**✳ Représentation - Image directe et réciproque**

Avec un graphe :



⚠ Attention - Attention $f^{-1}(f(A)) \neq A$ et $f(f^{-1}(B)) \neq B$
 ⚡ Le schéma montre sur un exemple qu'on a pas l'égalité...
 ⚡ On a au mieux : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Exercice

Démontrer ces inclusions. Donner des contre-exemple de l'inclusion réciproque

4. Fonction indicatrice

4.1. Définition

Définition - Fonction indicatrice

Soit E un ensemble. Pour $A \subset E$, on appelle fonction indicatrice de A l'application de E dans $\mathbb{R}$, notée $\mathbb{1}_A$ ou χ_A , définie par

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Remarque - Pourquoi et comment exploiter une telle fonction?

Cela permet de représenter certaines fonctions définies par morceaux par une seule expression (très utile en probabilités) sur $\mathbb{R}$, par exemple la loi uniforme sur $[a, b]$ a pour densité $\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}$ et la loi exponentielle de paramètre λ a pour densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

Cela permet également de ramener certaines égalités d'ensemble à des calculs sur les fonctions.

4.2. Propriétés ensemblistes et calcul avec fonctions indicatrices

Proposition - Propriété essentielle de la fonction indicatrice

Soient A et B deux parties de E . Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A &\leq \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B & \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B &\Leftrightarrow A = B \text{ (d'où le nom de fonction caractéristique);} \\ \mathbb{1}_{\complement_E A} &= 1 - \mathbb{1}_A; \\ \mathbb{1}_{A \cap B} &= \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B; \\ \mathbb{1}_{A \cup B} &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B. \end{aligned}$$

Exercice

Soit E un ensemble. Pour deux parties A et B de E , on appelle différence symétrique de ces deux parties la partie de E définie par

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Comment exprimer la fonction indicatrice de $A \Delta B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B ?

En déduire que pour trois parties A, B, C de E , on a $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Démonstration

On retrouve évidemment des résultats comparables à ceux vus en logique...

5. Cardinal d'ensemble fini

5.1. Principe des tiroirs

Nous considérons ici que l'ensemble $\mathbb{N}$ est bien connu. Nous expliquerons au chapitre suivant sa construction, en attendant, il nous faut savoir que c'est l'ensemble d'appui du raisonnement par récurrence...

On rappelle que l'on note $\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, \dots, k-1, k\}$, l'ensemble des k premiers entiers naturels non nuls.

On commence par deux lemmes.

Lemme - Injection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_p$, Principe des tiroirs (DIRICHLET)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

S'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_p$ injective, alors $n \leq p$.

Sous sa forme contraposée : si $\varphi : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_p$ avec $n > p$,

Alors il existe $x \neq x' \in \mathbb{N}_n$ tel que $\varphi(x) = \varphi(x')$ (φ non injective).

Démonstration

5.2. Classe des ensembles de même cardinal

Lemme - $\mathcal{R}$ comme relation d'équivalence

On note $\mathcal{R}$, la relation entre ensembles définies par :

$$E \mathcal{R} F \iff \exists \varphi : E \rightarrow F, \text{ bijective}$$

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Démonstration

Définition - Ensemble de cardinal n . Ensemble fini.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit qu'un ensemble E est fini de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$), si $E \mathcal{R} \mathbb{N}_n$. On note $\text{Card}(E) = n$

On dit qu'un ensemble E est fini, si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est fini de cardinal n .

Une fonction $\varphi : \mathbb{N}_n \rightarrow E$ bijective s'appelle une énumération de E . Elle permet d'écrire $E = \{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$ (ou parfois $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$).

 **Exemple - Cardinal de** $E = \{1, 2, \dots, k\}$

Exercice

Montrer que si $n, p \in \mathbb{N}$ et $n < p$, alors on n'a pas $\mathbb{N}_n \mathcal{R} \mathbb{N}_p$.

Proposition - Classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$

Sur l'ensemble des ensembles $E, F, \dots$ de cardinaux finis, on a l'équivalence : $E \mathcal{R} F \iff \text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ sont formé des ensembles de même cardinaux.

On peut les paramétrer par leur cardinaux

5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie)

Proposition - Calcul avec l'indicatrice

Soit E , un ensemble fini et A un sous-ensemble de E .

Alors A est fini et le calcul $\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$ a un sens, il vaut $\text{Card}(A)$.

 Pour aller plus loin - Construction de $\mathbb{N}$

Un mode de construction de $\mathbb{N}$ qui a fait grand bruit au début du XX^e siècle consistait à dire que l'ensemble des nombres entiers était en fait l'ensemble des cardinaux possibles pour les ensembles finis.

Qu'est-ce que 3, un représentant de tous les ensembles à 3 éléments. Si on veut...

Démonstration

Corollaire - Inclusion et cardinaux

Si $A \subset B (\in E)$ avec E un ensemble fini, alors $\text{Card} A \leq \text{Card} B$.

Démonstration

 Pour aller plus loin - Cardinal de réunions d'ensembles finis

On verra plus tard qu'avec $\mathbb{1}_{A \cup B} + \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$, on a $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
Que vaut $\text{Card}(A \cup B \cup C) = ?$

Exercice

Soient E , un ensemble fini de cardinal n et F , un ensemble fini de cardinal m .

- On suppose que $f : E \rightarrow F$ est une application injective.
 - Montrer que $f(E)$ est un ensemble fini de cardinal n .
 - Montrer que $n \leq m$.
- Que se passe-t-il si f est surjective ?
- Démontrer le théorème de Cantor-Bernstein pour des ensembles E et F finis.

$$\exists i : E \rightarrow F, j : F \rightarrow E \text{ injectives} \implies \exists b : E \rightarrow F \text{ bijective}$$

L'exercice donne le résultat suivant (dans le cas injectif)

 Pour aller plus loin - Dénombrable (au plus)

On étendra l'énumération à $\mathbb{N}$ entier.
On dit qu'un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
On dit qu'un ensemble est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable i.e. ssi il s'injecte dans $\mathbb{N}$.
Exemple : $\mathbb{N}^2$ ou $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Proposition - Cardinaux, injectivité et surjectivité

Si E et F sont des ensembles finis.

S'il existe une fonction $f : E \rightarrow F$ injective, alors $\text{card} E \leq \text{card}(F)$ (la réciproque est vraie).

S'il existe une fonction $f : E \rightarrow F$ surjective, alors $\text{card} F \leq \text{card}(E)$ (la réciproque est vraie).

Démonstration

6. Familles

6.1. Familles quelconques

On peut définir de manière formelle la notion de famille d'éléments ou de famille d'ensemble.

Définition - Familles

Soient I et E deux ensembles. On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute "liste" (finie ou non, avec répétitions éventuelles), notée $(a_i)_{i \in I}$, telle qu'à tout élément de I (appelé indice) soit associé un unique élément a_i de E (appelé terme d'indice i de la famille).

Cette famille peut donc être considérée comme l'application

$$\begin{aligned} a : I &\rightarrow E \\ i &\mapsto a_i = a(i) \end{aligned}$$

Définition - Sous famille

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble E .

Si $J \subset I$, on dit que $(a_i)_{i \in J}$ est une sous-famille de $(a_i)_{i \in I}$.

on dit également que $(a_i)_{i \in I}$ est une sur-famille de $(a_i)_{i \in J}$.

 **Exemple** - $E = \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{N}$

Définition - Intersection et réunion d'une famille de parties

Soient un ensemble I (les indices) et un ensemble E .

On considère une famille de parties de E (c'est-à-dire une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$) $(A_i)_{i \in I}$.

On note

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\} \text{ et } \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

 **Exemple -** $E = \mathbb{R}$

Exercice

On dit que la suite numérique (u_n) converge vers ℓ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \epsilon$$

1. Montrer que $|u_n - \ell| < \epsilon \iff \ell \in]u_n - \epsilon, u_n + \epsilon[$.
2. En déduire que l'ensemble des limites possibles pour la suite (u_n) est l'intersection d'une réunion d'intersection d'ensembles

6.2. Famille indexée sur $\mathbb{N}$. Suites**Vocabulaire de base sur les suites (infinies)**

L'ensemble E n'est pas précisé pour le moment. Cela peut être $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou autre chose ($\mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \dots$).

Par la suite nous pourrions avoir besoin que l'ensemble E soit ordonné.

Définition - Suite et ensemble de suites

Soit E un ensemble.

Une suite est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow E$ (on dira aussi qu'une application de $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ dans E où $n_0 \in \mathbb{N}$ est une suite). On note cette application sous forme indicielle :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\text{éventuellement } (u_n)_{n \geq n_0}) \text{ ou } (u_n)$$

On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans E .

** Attention - Avec ou sans parenthèses**

$\sum (u_n)$ désigne une suite alors que u_n désigne un nombre de E (le n ou $n + 1$ -ième terme de la suite).

 **Exemple - Suite (ou famille) de fonctions**

 $\mathbb{N}$ est ordonné

↗ Heuristique - Particularité des suites aux familles

L'ensemble d'indexation des suites $\mathbb{N}$ a une particularité très importante que n'a pas I .
Il est ordonné naturellement. Ainsi, une notion importante des suites qui n'existe pas pour les familles est la notion de suite croissante que l'on verra un peu plus bas ou encore les propriétés vraies à partir d'un certain rang.
Autre propriété : si $A \subset \mathbb{N}$, alors A est borné si et seulement si A est fini.

Définition - Propriété vraie à partir d'un certain rang...

On dit qu'une propriété $p(n)$ est vérifiée à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la propriété $p(n)$ soit vraie pour $n \geq n_0$.

Exercice

Quelle est le contraire, *formalisée*, d'une propriété vraie à partir d'un certain rang ?
Que penser également de $A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ vraie}\}$

○ Analyse - Suites extraites (sous-suite)

Définition - Suites extraites

On dit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

On note parfois : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = u_{n_k}$.

🍃 Exemple - Suites extraites paires et impaires

Exercice

Montrer que si $p(n)$ est vraie à partir d'un certain rang alors elle est vraie pour tous les termes d'une suite extraite de $\mathbb{N}$ à préciser

Proposition - Suite extraite et ensemble infini

Considérons une famille de propriété indexée par $\mathbb{N}$, notée $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ vraie}\}$. Alors

A est infinie si et seulement si $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{\varphi(n)}$ est vraie.

Démonstration

Suites bornées

On considère $E, \leq$ un ensemble ordonné.

Définition - Suite majorée, minorée, bornée

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- majorée s'il existe $M \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- minorée s'il existe $m \in E$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée.

 Remarque - Familles bornées, majorées...

Cette définition est également adaptable au cas des familles simples.

Exercice

Montrer qu'une suite majorée à partir d'un certain rang est une suite majorée.

Suites monotones**Définition - Suite croissante, décroissante**

On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est

- croissante
si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- décroissante
si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
- monotone si elle est croissante ou décroissante.
- stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

 Exemple - Deux suites monotones :

Nous élargirons ces notions, lorsque nous nous concentrerons sur les suites numériques, une fois que $\mathbb{R}$ sera construit...

7. Bilan

Synthèse

- ↪ Depuis la fin du XIX, on travaille en mathématiques à partir d'ensembles. On peut aussi passer d'un ensemble à un autre par des applications. Les applications injectives ne mélangent pas les éléments de l'ensemble du départ, les applications surjectives sont complètes (vu de l'arrivée).
- ↪ Très souvent en mathématiques (probabilité, construction de l'intégrale), on s'intéresse plutôt aux ensembles réciproques (ie des antécédents) $f^{-1}(B)$ qu'aux ensembles images directes $f(A)$.
- ↪ La fonction indicatrice d'un ensemble A dans E est une projection naturelle de E sur A . Elle est d'une utilité essentielle en mathématique, par exemple pour calculer le cardinal (ou en probabilité).
- ↪ On termine par décrire les propriétés pour des familles indexées sur un ensemble I fini ou dénombrable.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Montrer une égalité entre deux fonctions.
- Savoir-faire - Autre formulations équivalentes (injectivité, surjectivité)
- Savoir-faire - Critère pour montrer la bijectivité
- Savoir-faire - Critère de surjectivité.
- Savoir-faire - Montrer que $y \in f(A)$
- Savoir-faire - Montrer que $x \in f^{-1}(B)$

Notations

Notations	Définitions	Propriétés	Remarques
$:=$	Egalité, par définition (du terme de gauche)		autre notation : $\overset{\text{def.}}{s} =$
$f : E \hookrightarrow F$	f est une application de E sur F , injective		Cette notation donne deux informations
$f : E \twoheadrightarrow F$	f est une application de E sur F , surjective		Cette notation donne deux informations
$f _A, f _B$	Restriction de f à l'ensemble de départ A (respectivement d'arrivée B)	$f _A : A \rightarrow F, x \mapsto f(x)$ et $f _B : E \rightarrow B, x \mapsto f(x)$	Pour la restriction d'arrivée, il faut vérifier que cela a du sens...
$f(A)$	Image directe de A par f	$\{f(x), x \in A\}. y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \mid y = f(x)$	autre notation : $[\text{Im}(f) _A$
$f^{-1}(B)$	Ensemble (Image) réciproque de B par f	$\{x \in E \mid f(x) \in B\}. x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$	autre notation (probabilité) : $[f \in B]$
$C = \biguplus_{i=1}^n A_i$	C est la réunion disjointe des ensembles A_i	$x \in C$ ssi $\exists ! i \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in A_i$	Deux informations : C est la réunion des A_i & les A_i sont disjoints deux à deux.
$\mathbb{1}_A$	$\mathbb{1}_A : x \mapsto 1 \iff x \in A$	Codage numérique d'une propriété caractéristique	$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B, \text{Card} A = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$

Retour sur les problèmes

- 52. Voir cours
- 53. La première fonction ne répond pas à la problématique d'une application : tout élément (de B donc) a une et une seule image, en revanche la seconde fonction remplit bien cette tâche. Tout le monde a-t-il du courrier est la problème de la surjectivité de Φ , et la seconde question correspond au problème de l'injectivité.
- 54. Une bijection montre que deux ensembles sont équivalents (si ce n'est égaux).
- 55. Là on sort du cours.
 $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ ont la même puissance ($\approx$ cardinal) car on peut les mettre en bijection l'un par l'autre.
Avec par exemple $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, m \mapsto 2|m| + \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_-}(m)$.

De même (c'est plus subtile) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ (vous pouvez trouver une bijection?), donc $\mathbb{Q}$ est également en bijection avec $\mathbb{N}$.

On dit que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ont la puissance du dénombrable (le même cardinal infini).

En revanche, il n'existe aucune bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. $\mathbb{R}$ a un cardinal plus grand, on parle du cardinal du continu.

56. Cours.

