Première partie

Techniques algébriques, à travers l'histoire

Chapitre 1

Calculs et opérations avec des sommes ou des produits

Résumé -

Pour commencer, nous apprenons à manipuler les symboles $\sum$ et $\prod$.
Nous prendrons également le temps d'étudier les méthodes d'étude des doubles sommes (finies).
Les résultats se basent sur la commutativité de l'addition. Tant que les sommes sont finies, il n'y a pas de surprise dans les résultats obtenus. Le cas infini sera étudié plus tard.
Nous obtenons alors un premier résultat intéressant : les coefficients binomiaux (point de vue complémentaire à celui vu au lycée) et leur application à la formule du binôme de Newton. Nous faisons un petit plongeon dans l'histoire des mathématiques au XVII : les coefficients binomiaux agitaient la communauté des mathématiciens de l'époque.
Un second thème d'application intéressant consistera en l'étude du développement et de la factorisation des équations algébriques polynomiales.
Enfin, voici une liste de petites vidéo ou conférence visionnable sur internet et en lien avec le sujet (de pénibilités variées) :

- *Yvan Monka - Symbole Sigma. https ://www.youtube.com/watch ?v=0zspJuzo7L8*
- *El Jj - Nombres de Catalan. http ://eljjdx.canalblog.com/archives/2017/02/20/34959863.html*
- *Maths moi ça - L'étonnant triangle de Pascal. https ://www.youtube.com/watch ?v=IzkfjbWffpc*
- *Mathieu Bautista - L'histoire du x. https ://www.youtube.com/watch ?v=AW7uNg9RLCs*

Sommaire

1. Quelques problèmes

? Problème 1 - Nombres triangulaires

Lorsqu'on fait la somme 1+1+1+… 1, on peut décrire tous les nombres entiers.
Si on somme ensuite les résultats obtenus : $1+2+\cdots+n$*, quel nombre obtient-on ?*
Ce nombre est appelé nombre triangulaire d'ordre n, noté T_n. Par exemple : $T_4 = 1+2+3+4 = 10$.
Si on somme ensuite les résultats obtenus : $T_1+T_2+\cdots+T_n = 1+3+6+10+\cdots+T_n$*, quel nombre obtient-on ? Et si on continue, toujours ?*

? Problème 2 - Développement

Donner, pour tout entier n, la forme développée des applications polynomiales $x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)$ et $x \mapsto (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx)$

? Problème 3 - Suite de nombres. Et le suivant ?

Prenons la suite obtenue à la question précédente : $1, 4, 10, 20, 35$. Quel est le terme suivant ?
Et de manière générale étant donnée une suite quelconque de n termes donnés explicitement, comment trouver le terme suivant ?

? Problème 4 - Interpolation à pas constant

Quelle est la fonction f de degré minimal tel $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$?
Généraliser la question et donner une réponse…

? Problème 5 - Développement de puissance

Considérons le calcul typiquement algébrique : $(a+b)^n$ où a et b sont deux nombres quelconques et n en entier.
L'expérience montre que pour $n = 4$ (par exemple), on trouve en développant cette expression : $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.
Est-il possible de décrire simplement cette expression : quels sont les facteurs a et b obtenus, est-il facile d'exprimer/calculer le nombre situé devant a^ib^j ?
Et que se passe-t-il si l'on considère plutôt $(a+b+c+\dots)^m$?

? Problème 6 - Kwarizmi

Résoudre, comme El Kwarizmi, l'équation $x^2+10x = 39$ en n'exploitant que des méthodes géométriques (calcul d'aire, nombres positifs…).
On commence par considérer un carré de côté x et deux rectangles de côtés x et 5. On complète…
Adapter la méthode pour résoudre $x^2+21 = 10x$.
Que pensez-vous de la nature des nombres a, b ou c si l'on souhaite générer la méthode pour résoudre l'équation associée au trinôme du

- second degré : $ax^2+bx+c = 0$

? Problème 7 - Mauvais vers italiens

« Tartalea exposa sa solution en mauvais vers italiens » (Lagrange, Oeuvres, 1795).
Il existe une méthode (Tartglia-Cardan) pour résoudre les équations de degré 3 (voir cours). Comment pouvait-on l'écrire alors qu'il n'existait ni le symbole =, ni les notations x^2…?

? Problème 8 - Tartaglia et Cardan

Trouver toutes les solutions de l'équation $x^3+6x = 20$, avec la méthode de Tartaglia et Cardan, en posant $x = u-v$ et en exploitant les symétries du problème (on peut résoudre : $u^3-v^3 = \dots$ et $u^3v^3 = \dots$).
Et pour une équation de type $ax^3+px+q = 0$?
De même donner les solutions de l'équations $x^4+px^2+1 = 0$.

2. Symboles ∑ et ∏

2.1. Définition et formule récurrente

Ecriture classique

Remarque - Terme sans ambiguïté
La façon naturelle d'écrire une somme longue est de :

1. *donner les premiers termes*
2. *s'assurer que la suite logique des termes est comprises, puis de remplacer ces termes (en grands nombres) par des points de suspension*
3. *donner la valeur du dernier terme.*

Mais comment s'assurer qu'il n'y ait pas ambiguïté ?
On préfère souvent une formulation explicite :

Définition - Notation ∑ et ∏
Soient $a_1, \dots, a_n$ n nombres réels ou complexes. L'addition dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ étant commutative (on somme dans l'ordre que l'on souhaite) et associative (les parenthèses ne sont pas nécessaires), on note

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+\cdots+a_n$$

De même on note

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1a_2\dots a_n.$$

Le terme a_i s'écrit sous forme d'une formule dépendant de i.

Histoire - Notation **Σ**
Il semble que ce soit Euler (1755) qui utilise pour la première fois le symbole Σ pour désigner une somme.
Cette notation est particulièrement utile pour l'étude des séries (cf fin d'année).
Nous le verrons au prochain chapitre, Euler a donné beaucoup de symboles importants aux mathématiques.

Remarque - Bons usages et généralisation de notation
Bien évidemment, l'indice i (qui peut aussi s'appeler k, l, m, p ...) de la somme peut démarrer à une valeur entière autre que 1, toutefois la valeur de départ (sous le signe ∑) doit être inférieure à la valeur d'arrivée.

Exercice
Ecrire avec le symbole ∑, le calcul $1+2+4+\cdots+128$

Correction
On reconnait des puissances successives de 2. $1+2+4+\cdots+128 = \sum_{k=0}^{7} 2^k$

Changement d'indexation

Attention - Attention à ne pas donner une existence à une variable muette!

Que vaut $\left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right) + k$? Rien!

Si on a un doute, on exploite **au brouillon** des points de suspension où l'on se rend compte que les indices i ou k n'existe pas vraiment.

Analyse - Changement d'indice

On peut supposons arbitrairement que $A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ et que l'on calcule $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Par commutativité de l'addition, on a également :

$$S = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$$

Il y a d'autres possibilités à partir du moment où l'on a une bijection à valeurs dans $\mathbb{N}_n$…

Pour aller plus loin - Notation $\mathbb{N}_n$

On note, tout au long de l'année :

$$\mathbb{N}_n = [\![1, n]\!]$$

Cet ensemble commence bien à 1*.*
Cette notation n'est pas standardisée

Savoir faire - Exemple de changement

Faire le changement d'indice $i = n - k$ pour $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$

On a donc $k = n - i$ et $2k + 1 = 2n - 2i + 1 = (2n+1) - 2i$.

Et le tableau de correspondance :

k	i
1	$n-1$
n	0

Donc $\sum_{k=1}^{10} (2k+1) = \sum_{i=0}^{n-1} [(2n+1) - 2i]$

On notera que les termes i sont notés dans l'ordre croissant (ce qui inverse l'ordre du calcul effectivement réalisé).

Exercice

Compléter les expressions qui suivent :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{\dots}^{\dots} a_{k-1} = \sum_{\dots}^{\dots} a_{n-h}$$

Correction

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{h=0}^{n-1} a_{n-h}$$

Somme, par récurrence

Analyse - $\sum$ et récurrence

Le symbole somme est particulièrement liée au raisonnement par récurrence.

En effet celui-ci a également pour vocation de formaliser le raisonnement avec des points de suspension.

Plus précisément, si on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, alors (S_n) est exactement la suite définie par $S_0 = a_0$ et par la relation de *récurrence* : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

Proposition - A savoir!

On a pour $(a_i)_i, (b_i)_i, \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, :

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i$$

$$\prod_{i=0}^{n} a_i b_i = \prod_{i=0}^{n} a_i \times \prod_{i=0}^{n} b_i \qquad \prod_{i=0}^{n} \lambda a_i = \lambda^{n+1} \prod_{i=0}^{n} a_i$$

Démonstration

On note $R_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ et $T_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$,

puis pour tout entier n, $\mathscr{P}_n : R_n = S_n + T_n$.

— $R_0 = (a_0 + b_0) = a_0 + b_0 = S_0 + T_0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie.

$$R_{n+1} = R_n + (a_{n+1} + b_{n+1}) = S_n + T_n + a_{n+1} + b_{n+1} = S_{n+1} + R_{n+1}$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est alors vraie.

La récurrence est démontrée.

Pour le second résultat, on va exploiter une méthode : l'utilisation d'un invariant de boucle.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$.

$A_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i + \lambda a_{n+1} - \lambda(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}) = A_n$.

Donc (A_n) est une suite constante, égale à $A_0 = \lambda a_0 - \lambda a_0 = 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$.

De même :

D'après la commutativité de la multiplication :

$\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_1 b_1) \times (a_2 b_2) \cdots (a_n b_n) = (a_1 a_2 \cdots a_n) \times (b_1 b_2 \cdots b_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i \times \prod_{i=1}^{n} b_i$

En conséquence du cas précédent ($b_i = \lambda$, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$) $\prod_{i=1}^{n} \lambda a_i = (\lambda a_1 \times \lambda a_2 \cdots \times \lambda a_n) =$

$\lambda^n (a_1 a_2 \cdots a_n) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i$

□

Remarque - le $n+1$ de λ^{n+1} dans le dernier produit

… est donc en fait le cardinal de I, ensemble sur lequel on fait le produit.

2.2. Généralisation de la notion

Plus généralement, ce qui compte en réalité est l'ensemble des éléments additionnés et d'une description (énumérative) de ceux-ci.

Définition - Extension de notation $\sum$ et $\prod$

Si A est un sous-ensemble fini d'éléments de E (= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou autre…), Soit une description énumérative de A : $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, on note

$$\sum_{a \in A} a = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_p} = \sum_{i=1}^{p} i\, a_i$$

Encore plus généralement, avec les formules :

— indicatrice $\mathbb{1}_X : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in X \\ 0 \text{ si } x \notin X \end{cases}$

— ou symbole d'Iverson $\left[\mathscr{P}(t)\right] = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathscr{P}(t) \text{ vrai} \\ 0 \text{ si } \mathscr{P}(t) \text{ faux} \end{cases}$

Pour aller plus loin - Descriptions des ensembles

Nous verrons qu'un ensemble se définit en règle générale, soit par extension : $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ soit par compréhension : $I = \{i \mid \mathscr{P}(i) \text{ (vraie)}\}$

On peut également noter,

$$\sum_{a\in A} a = \sum_{a\in E} a\mathbb{1}_A(a) = \sum_{a\in E} a\big[a\in A\big]$$

cette dernière se rencontre parfois sous l'écriture $\sum_{a\mid \mathscr{P}(a)} a = \sum_{a\in E} a[\mathscr{P}(a)]$

Exemple - $\sum_{i=1}^{n} a_i$

Par exemple $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i\in[\![1,n]\!]} a_i = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$.
Cette dernière est un abus de $\sum_{i\in\mathbb{N}\mid 1\leqslant i\leqslant n} a_i$.

Exercice
Sans utiliser la notation $\sum$, donner l'expression développée de

$$\sum_{i\mid 0\leqslant i\leqslant 6}\frac{1}{2i+1},\quad \sum_{i\mid 0\leqslant 2i\leqslant 7}\left(3i+\frac{1}{i+1}\right),\quad \sum_{i\mid 0\leqslant i^3\leqslant 10}\frac{1}{i^2+i+1}.$$

Correction
$\sum_{i\mid 0\leqslant i\leqslant 6}\frac{1}{2i+1} = \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}$ - $\sum_{i\mid 0\leqslant 2i\leqslant 7} 3i+\frac{1}{i+1} = 3+6+9+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ - $\sum_{i\mid 0\leqslant i^3\leqslant 10}\frac{1}{i^2+i+1} = \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$

Exercice
Exprimer la somme des inverses de tous les nombres premiers inférieurs à N

Correction
Par exemple $\sum_p \frac{1}{p}[p\leqslant N][p,\text{ premier}]$ ou encore $\sum_{p\leqslant N}\frac{1}{p}[p,\text{ premier}]$ ou $\sum_{p\in\mathscr{P}\cap\mathbb{N}_N}\frac{1}{p}\dots$

Sommation par paquets

Remarque - Extension des propriétés ensemblistes
Toute les propriétés que nous allons voir maintenant découlent des propriétés sur la description des ensembles.
Par exemple ici, la décomposition de E sous forme d'une partition.

Exercice
Si A et B sont deux ensembles disjoints de E, montrer que pour tout $i\in E$, $\mathbb{1}_{A\cup B}(i)-\mathbb{1}_A(i)-\mathbb{1}_B(i)=0$.
En déduire que $\sum_{i\in A\cup B} a_i = \sum_{i\in A} a_i + \sum_{i\in B} a_i$.

Correction
Comme A et B sont disjoints, ou bien $i\in A$ et $i\notin B$, ou bien $i\notin A$ et $i\in B$ ou bien $i\notin A$ et $i\notin B$. Pour chacun de ces trois cas, on a respectivement :

$$\mathbb{1}_{A\cup B}-\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B = \begin{cases} 1-1-0=0\\ 1-0-1=0\\ 0-0-0=0\end{cases}$$

Dans tous les cas : $\mathbb{1}_{A\cup B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B$.
Puis, on multiplie par a_i et on additionne :

$$\sum_{i\in A\cup B} a_i = \sum_i a_i\mathbb{1}_{A\cup B}(i) = \sum_i a_i\mathbb{1}_A(i)+\sum_i a_i\mathbb{1}_B(i) = \sum_{i\in A} a_i + \sum_{i\in B} a_i$$

Généralisons ce résultat. Il faut commencer par définir une notation :

Définition - Réunion disjointe
On note $C = A\uplus B$, par signifier la double information :
- $C = A\cup B$
- $A\cap B = \emptyset$

Autrement écrit : $x\in C$ si et seulement si $x\in A$ ou (exclusif) $x\in B$.
On peut généraliser cette notation à plusieurs ensembles :

$C = \biguplus_{i=1}^{n} A_i$ signifie : $x\in C$ si et seulement si $\exists!\, i\in\mathbb{N}_n$ tel que $x\in A_i$.

On a alors la relation de Chasles pour les sommes :

Proposition - Sommation par paquets
Soit une famille $(E_r)_{r\in S}$ une famille d'ensembles indexés par S.
On suppose qu'il s'agit d'une famille d'ensembles disjoints 2 à 2 :
$\forall\, r\neq r'\in S,\ E_r\cap E_{r'}=\emptyset$.
Alors

$$\sum_{r\in S}\left(\sum_{k\in E_r} a_k\right) = \sum_{k\in \biguplus_{r\in S} E_r} a_k$$

Pour aller plus loin - Autre notation
On trouve parfois également la notation : $C = A\sqcup B$ ou encore $C = A\dot\cup B$.
Ce + est là pour pourvoir signifier un résultat que l'on verra plus loin, si $C = \biguplus_{i=1}^{n} A_i$, alors $\text{card}(C) = \sum_{i=1}^{n}\text{card}(A_i)$.

On voit ici apparaître une double somme. On en reparlera plus loin.

Exemple - $\mathbb{N}$
On peut vouloir couper la somme en deux parties : les indices pairs et les indices impairs.
Dans ce cas $S=\{1,2\}$, $E_1=\mathscr{P}\cap\mathbb{N}_r$ et $E_2=\mathscr{I}\cap N_r$, par exemple.

Démonstration
On a là encore : $E = \biguplus_{r\in S} E_r$ et donc

$$\begin{array}{rcl} k\in E & \iff & \exists!\, r\in S \text{ tel que } k\in E_r\\ \mathbb{1}_E(k)=1 & \iff & \exists\, r\in S \text{ tel que } \mathbb{1}_{E_r}(k)=1 \text{ et } \forall\, s\in S\setminus\{r\},\mathbb{1}_{E_s}(k)=0\\ & \iff & \sum_{r\in S}\mathbb{1}_{E_r}(k)=1\end{array}$$

Donc, ceci étant vrai pour tout k, on a l'égalité de fonctions

$$\mathbb{1}_E = \sum_{r\in S}\mathbb{1}_{E_r}$$

Alors, comme précédemment :

$$\begin{aligned}\sum_{k\in E} a_k &= \sum_k a_k\mathbb{1}_E(k) = \sum_k a_k\left(\sum_{r\in S}\mathbb{1}_{E_r}(k)\right)\\ &= \sum_k\sum_{r\in S} a_k\mathbb{1}_{E_r}(k) = \sum_{r\in S}\sum_k a_k\mathbb{1}_{E_r}(k)\\ &= \sum_{r\in S}\sum_{k\in E_r} a_k\end{aligned}$$

□

Remarque - Interversion des symboles Σ
Dans la démonstration, on a inversé deux symboles Σ. Cela sera justifié par la suite, car il s'agit d'une somme finie.
C'est comme si on sommait les termes dans un tableau : d'abord en ligne, puis en colonne ; ou d'abord en colonne, puis en ligne. Dans tous les cas, on obtient le même résultat car il s'agit d'additionner une et une seule fois tous les termes du tableau.

Savoir faire - Exploiter une sommation par paquets
On a parfois intérêt à découper l'ensemble E en (réunion de m) sous-ensembles disjoints $E = E_1\uplus E_2\cdots\uplus E_m$.
On calcule alors la somme par paquets :

$$\sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{k\in E_r} a_k\right) = \sum_{k\in E} a_k$$

2.3. Avec Python

Il arrive souvent que l'on rencontre des calculs de sommes à effectuer sous Python. La méthode est simple, on emploie des boucles :
- `for`, si l'on connait bien l'ensemble sur lequel est definie i
- `while`, si i est définie par une propriété

Informatique - $\sum_{k=n}^{m} a(k)$

```
def Somme1(n,m):
    S=0
    for k in range(n,m+1):
        S=S+a(k)
    return(S)
```

Informatique - $\sum_{i \mid f(i)\leqslant n} a(i)$

```
def Somme2(n):
    S,i=0,0
    while f(i)<=n:
        S=S+a(i)
        i=i+1
    return(S)
```

Remarque - L'ordinateur (calculatrice) comme un obstacle ?
L'une des principales raisons de la faiblesse des élèves pour le calcul est l'usage trop tôt de la calculatrice.
Il faut laisser le temps pour comprendre, maitriser, puis ne pas oublier le sens du calcul avant de passer à la calculatrice.
Néanmoins, il ne faut pas systématiquement tout jeter !

Truc & Astuce pour le calcul - Écrire un programme pour mieux comprendre
Ecrire un programme permet souvent de mieux comprendre la nature du calcul.
C'est le cas en particulier :
- pour le calcul de somme.
- pour le calcul de probabilités.
  Dans ce cas, ce n'est pas le calcul mais la modélisation elle-même du problème qui est mieux comprise.

Exercice
Ecrire une boucle (double ?) pour faire le calcul :

$$\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=i}^{200-i} i \times j$$

Correction
```
S=0
for i in range (101):
    for j in range(i,200-i+1):
        S=S+i*j
return(S)
```

Remarque - Varier les paramètres et informatique
L'informatique permet aussi de facilement faire varier les paramètres. On a vu la force de l'usage des paramètres dans le calcul. Mais c'est aussi, de manière générale, la force de l'excellent mathématicien. Python nous aidera largement : ce n'est que légèrement une boite noire pour nous, nous aurons donc pour ambition de bien maîtriser tous nos faits et gestes informatiques (pas de clicothérapie !).

3. Evaluer explicitement des sommes

3.1. Télescopage

C'est la seule méthode qui donne une formule explicite.

Savoir faire - Méthode du télescopage (ou dominos)
Soit (u_n) une suite. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$
Alors $\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$
$\left(= (u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + (u_{p+3} - u_{p+2}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n)\right)$

Remarque - « Voir » le téléscopage
Deux remarques :
- *Dans la plupart des situations, la somme ne se présente pas directement sous la forme $\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k)$, il faut commencer par faire "apparaître" cette forme.*
- *On peut aussi avoir intérêt à écrire la somme avec des points de suspension pour confirmer le télescopage aperçu*

Exercice
Calculer $\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k}$.

Correction
$\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$

Pour aller plus loin - Théorème fondamentale de l'analyse entière ?
Intégrer↔ Dériver sont les deux problèmes inverses l'un de l'autre. Ils sont définis pour des fonctions de la variable réelle.
Pour la variable entière, les fonctions sont des suites. Et intégrer consiste simplement à faire le calcul $\sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors à quoi correspond la dérivation de la variable entière ? Au calcul $a_{n+1} - a_n$! (c'est pas exemple comme cela qu'on voit si une suite est croissante…).
La formule du télescopage présente ce lien : $\sum \leftrightarrow \delta$

3.2. Des sommes connues

Proposition - Sommes de puissances d'entiers consécutifs
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On peut faire une récurrence, ou bien chercher à démontrer le résultat directement. Une méthode classique : user le télescopage.

Démonstration
Nous démontrons le second résultat en admettant le premier.
Notons d'abord que pour tout entier k : $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$.
Donc, en voyant un téléscopage :

$$(n+1)^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = \sum_{k=1}^{n} [3k^2 + 3k + 1] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Ainsi (toujours d'abord factoriser !) :

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{(n+1)}{2}[2(n+1)^2 - 2 - 3n] = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

□

Exercice
Démontrer par récurrence les résultats précédents

Correction
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$:« $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ».

— $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ et $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathscr{P}_n$ vérifiée.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$
$$(n+1)^2\left[\tfrac{1}{4}(n^2+4n+4)\right] = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Savoir faire - Se passer du formalisme d'une récurrence ou invariant de boucle

On peut souvent se passer de la formalisation de la récurrence (mais avec les mêmes calculs).

Ici on considère la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

On note que $u_{n+1} = u_n$ (même calcul que $\mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$) et que $u_1 = 0$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$. CQFD.

Proposition - Calcul d'une somme arithmétique

Pour une suite arithmétique :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

on a :

$$\sum_{k=n}^{m} u_k = (m-n+1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$$

C'est-à-dire :

somme de termes succ. = (nb de termes) × (moyenne des termes extrêmes)

Démonstration

Pour tout k, $u_k = u_n + (k-n)r$.

$$\sum_{k=n}^{m} u_k = \sum_{k=n}^{m} u_n + r\sum_{k=n}^{m}(k-n) = (m-n+1)u_n + r\sum_{i=0}^{m-n} i$$

$$= (m-n+1)u_n + r\frac{1}{2}(m-n)(m-n+1) = \frac{m-n+1}{2}(u_n + r(m-n) + u_n) = (m-n+1) \times \frac{u_m+u_n}{2}$$

□

Exercice

Démontrer le résultat en suivant la « méthode de Gauss » (double somme inversée…)

Correction

On note S, la somme en question : $2S = S + S = \sum_{k=n}^{m} u_k + \sum_{k=n}^{m} u_k$. Dans la première somme on note $h = k$ et dans la seconde on fait le changement d'indice $h = m - k + n$:

$$2S = \sum_{h=n}^{m} u_h + \sum_{h=n}^{m} u_{m+n-h} = \sum_{h=n}^{m} (u_n + (h-n)r + u_n + (m+n-h-n)r)$$

$$= \sum_{h=n}^{m} (u_n + u_n + (m-n)r) = \sum_{h=n}^{m} (u_n + u_m) = (m-n+1)(u_n+u_m)$$

Proposition - Calcul d'une somme géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a :

$$\text{somme de termes successifs} = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$$

Démonstration

Si $x = 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$

Si $x \neq 1$, $(1-x)\sum_{k=0}^{n} nx^k = \sum_{k=0}^{n}(x^k - x^{k+1}) = x^0 - x^{n+1}$, télescopage. □

Exercice

Calculer $1+2+4+8+16+32+64+128$

Correction

C'est la somme de 8 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2.

Donc $1+2+4+8+16+32+64+128 = 1 \times \frac{1-2^8}{1-2} = 2^8 - 1 = 255$.

Quel lien avec l'écriture en binaire des nombres entiers sur 8 octets ?

On se rappelle, avec les petits Bernoulli :

Proposition - Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$$

Application - $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes

$3^n - 2^n = (3-2)(3^{n-1} + 2\ldots3^{n-2} + 4\ldots3^{n-3} + \cdots + 2^{n-2}\ldots3 + 2^{n-1})$.

Application - Factoriser $a^5 - b^5$

Vu au chapitre précédent.

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

Démonstration

On développe et utilisons la méthode du téléscopage :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-(k+1)}b^{k+1} = a^nb^0 + \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i}b^i - \sum_{j=1}^{n-1} a^{n-j}b^j - a^0b^n = a^n - b^n$$

Puis en prenant $a = 1$, $1 - x^{n+1} = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k \ldots$ □

Exercice

Peut-on factoriser $a^n + b^n$? Si oui, factoriser le.

Correction

Si $b = -a$, $a^n + b^n = a^n(1 + (-1)^n) = 0$ si n est impair.

On peut factoriser par $a+b$ dans ce cas :

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + (-1)^k a^{n-1-k}b^k + \cdots + b^{n-1})$$

car $n-1$ est alors pair

3.3. Sommes doubles (multiples…)

Heuristique - Somme à multiples indices

On peut faire une somme d'éléments pris dans un ensemble fini. Mais la description de ces éléments n'est pas toujours naturellement données sous la forme $x_i, i \in [\![0,n]\!]$.
Parfois les éléments apparaissent comme les éléments d'un tableau (*matrice*) et sont donc doublement (ou plus) indexés : $x_{i,j}, i \in \mathbb{N}_n, j \in \mathbb{N}_m$.
Les choses se présentent différemment selon que i et j sont « indépendants » entre eux ou non.

Cas i et j indépendants. Produit cartésien d'ensembles

Analyse - Du sens des formules
Comment décrire avec des symboles $\sum$ la somme suivante :

$$S = a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{1,m} + a_{2,1} + \cdots + a_{2,m} + \cdots + a_{n,1} + \cdots + a_{n,m}$$

On peut voir cette somme de la façon suivante :

$$S = (a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{1,m}) + (a_{2,1} + \cdots + a_{2,m}) + \cdots + (a_{n,1} + \cdots + a_{n,m})$$

On y voit n sommes, chacune composée d'une somme de m termes :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \right)$$

Evidemment, la somme étant finie, l'addition commutative, on a également :

$$S = a_{1,1} + a_{2,1} + \cdots + a_{n,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{n,2} + \cdots + a_{1,m} + \cdots + a_{n,m} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right)$$

Et finalement on peut écrire :

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m} a_{i,j}$$

Définition - Somme double
On considère une famille de nombres réels ou complexes $(a_{i,j})$ indexée par deux indices i et j, i compris entre 1 et n, j compris entre 1 et m où n et m sont deux entiers non nuls donnés. On peut représenter ces nombres par un tableau où l'indice i désigne la ligne et l'indice j la colonne :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & \cdots & a_{n,m} \end{array}$$

La somme de tous les éléments de ce tableau est notée

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]} a_{i,j}.$$

Savoir faire - Somme multiple (indépendance)
Pour la calculer on peut procéder d'au moins deux façons, la première consiste à faire d'abord la somme des termes ligne par ligne, puis d'additionner les résultats :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la ligne } i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j},$$

une seconde étant de sommer d'abord les termes colonne par colonne puis d'additionner les résultats :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la colonne } j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Remarque - Diagonale
Il y a d'autres possibilités, par exemple en sommant suivant des lignes diagonales lorsque $n = m$.
On reverra cela plus loin.

Exercice
Calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} ij$

Correction
$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} ij \right) = \sum_{i=1}^{n} i \left(\sum_{j=1}^{p} j \right) = \sum_{i=1}^{n} i \frac{p(p+1)}{2} = \frac{n(n+1)p(p+1)}{4}$$

Comme le montre l'exercice précédent :

Proposition - Produit de deux sommes (développement ou factorisation)
Soient des réels (ou des complexes) a_i et b_j, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{p} b_j \right) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} a_i b_j$$

Démonstration
C'est assez simple, par développement :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{p} b_j \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{p} b_j \right) \right) = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} a_i b_j$$

□

Cas i et j dépendants

Heuristique - Cas : i et j dépendants
Ici on somme seulement certains termes du tableau rectangulaire $a_{i,j}$.
Et donc les indices sont dépendants l'un de l'autre!
Par exemple, dans cette situation, les valeurs prises par j (à l'intérieur de la somme) dépendent de celles prises par i (à l'extérieur de la somme). Il y a, en revanche, souvent liberté dans le choix de l'ordre de sommation (d'abord i ou d'abord j).

Analyse - $G = \{a_{i,j}, i \in \mathbb{N}_n, j \in A_i\}$
On suppose que G est décrit parfaitement ainsi : $\{a_{i,j}, i \in A, j \in A_i\}$.
Donc

$$\sum_{a \in G} a = \sum_{i,j} a_{i,j} \mathbb{1}_G(a_{i,j}) = \sum_{i \in A} \left(\sum_{j \in A_i} a_{i,j} \right)$$

Evidemment, la somme $\sum_{j \in A_i} \left(\sum_{i \in A} a_{i,j} \right)$ ne signifie rien (A_i ne peut exister car i n'existe pas) et donc les choses ne commutent pas facilement ici.

Proposition - Somme double classique $\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} a_{i,j}$
Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famillle de nombres réels ou complexes :

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$$

Démonstration
On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{i,j} &= \sum_{i,j} a_{i,j}[1\leqslant j\leqslant i\leqslant n] = \sum_i \left(\sum_j a_{i,j}[1\leqslant j\leqslant i][1\leqslant i\leqslant n]\right)\\ &= \sum_i \left(\sum_j a_{i,j}[1\leqslant j\leqslant i]\right)[1\leqslant i\leqslant n] = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\right)\\ &= \sum_j \left(\sum_i a_{i,j}[j\leqslant i\leqslant n][1\leqslant j\leqslant n]\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{i} a_{i,j}\right)\end{aligned}$$

□

Pour aller plus loin - Formalisme/sens
On notera ici (mais c'est souvent le cas en mathématiques) que le formalisme est plus efficace que la recherche de sens : il permet une sorte d'automat(h)isation.
Néanmoins, il est bon de toujours accompagné l'un par l'autre.

Exercice
Calculer $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$

Correction
$$S=\sum_{j=1}^{n} j\left(\sum_{i=1}^{j} i\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2(j+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$$=\frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}=\frac{n(n+1)(3n+1)(n+2)}{24}$$

Savoir faire - Somme multiple (dépendance)
Pour la calculer on ordonne les indices de sommation :

1. on choisit celle qui sera le plus à l'extérieur (donc à gauche) des symboles $\sum$. Elle ne dépend que de paramètres fixés et d'aucun indice.
2. on choisit ensuite la suivante, la seconde dans l'ordre des sommes. Elle dépend des paramètres fixés et de l'indice précédent

…

Exemple : $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}\right)$

Analyse - Sens de ces modes de sommations
On somme seulement certains termes du tableau (et pas tous).
Si E désigne l'ensemble des indices (i,j) des nombres que l'on désire sommer, on notera $\sum_{(i,j)\in E} a_{i,j}$ cette somme.
Pour le cas présent $E=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 | 1\leqslant j\leqslant i\leqslant n\}$ (termes sous ou sur la diagonale principale du tableau carré à n lignes et n colonnes), on a alors

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}.$$

Il est recommandé de comprendre les tableau suivants :
Première sommation :

$$\begin{array}{lccccc} & a_{1,1} & & & & \\ & \downarrow_2 & \ddots & & & \\ \underbrace{\sum_{i=1}^{n}}_{\downarrow_2}\underbrace{\sum_{j=1}^{i}}_{\rightarrow_1} a_{i,j}: & a_{h,1} & \rightarrow_1 & a_{h,h} & & \\ & \downarrow_2 & & \downarrow_2 & \ddots & \\ & a_{n,1} & \rightarrow_1 & a_{n,h} & \rightarrow_1 & a_{n,n}\end{array}$$

Deuxième sommation :

$$\begin{array}{lccccc} & a_{1,1} & & & & \\ & \downarrow_1 & \ddots & & & \\ \underbrace{\sum_{j=1}^{n}}_{\rightarrow_2}\underbrace{\sum_{i=j}^{n}}_{\downarrow_1} a_{i,j}: & a_{h,1} & \rightarrow_2 & a_{h,h} & & \\ & \downarrow_1 & & \downarrow_1 & \ddots & \\ & a_{n,1} & \rightarrow_2 & a_{n,h} & \rightarrow_2 & a_{n,n}\end{array}$$

3.4. Exercice d'applications

Exercice
Retrouver la valeur de $S=\sum_{k=1}^{n} k$, en notant que $S=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 1$

Correction
$S=\sum_{k=1}^{n} k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 1=\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)=\sum_{i=1}^{n}(n+1)-\sum_{i=1}^{n} i.$
Donc $2S=n(n+1)$ et donc $S=\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice
Montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} d_k\right)^2=\Sigma_{k=1}^{n} d_k^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} d_i d_j.$

Correction
$$\left(\sum_{k=1}^{n} d_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n} d_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n} d_k\right)^2=\sum_{(k,h)\in\mathbb{N}_n^2} d_k d_h.$$
Or $\mathbb{N}_n^2=\{(k,k),k\in\mathbb{N}_n\}\uplus\{(k,h),k<h\in\mathbb{N}_n\}\uplus\{(k,h),k>h\in\mathbb{N}_n\}$.
On peut aussi exploiter la notation d'Iverson $\mathbb{N}^2=\{(k,h)\mid[k=h]\}\uplus\{(k,h)\mid[k<h]\}\uplus\{(k,h)\mid[k>h]\}$.
Par sommation par paquets :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} d_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n} d_k^2+\sum_{1\leqslant k<h\leqslant n} d_k d_h+\sum_{1\leqslant k>h\leqslant n} d_k d_h=\sum_{k=1}^{n} d_k^2+2\sum_{1\leqslant k<h\leqslant n} d_k d_h,$$
en faisant $k\leftrightarrow h$ dans la dernière somme.
On peut aussi démontrer l'inégalité célèbre de Cauchy-Schwarz :
Exercice

1. En développant $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(a_i b_j-a_j b_i)^2$, montrer que $\left(\sum_{k=1}^{3} a_k b_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{3} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{3} b_k^2\right)$.
2. De même, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$
3. A quelle condition a-t-on : $\left(\sum_{k=1}^{n} a_i b_i\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$

Correction

1. On a
$$\begin{aligned}0\leqslant &\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(a_i b_j-a_j b_i)^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2\\ 0\leqslant &(a_1b_2)^2+(a_1b_3)^2+(a_2b_1)^2+(a_2b_3)^2+(a_3b_1)^2+(a_3b_2)^2\\ &-2(a_1a_2b_1b_2)-2(a_1a_3b_1b_3)-2(a_2a_3b_2b_3)\\ 0\leqslant &\sum_{i\neq j}(a_i b_j)^2+\sum_i(a_i b_i)^2-\sum_i(a_i b_i)^2-2\sum_{i<j}(a_i a_j b_i b_j)\\ 0\leqslant &\sum_{i,j} a_i^2 b_j^2-\sum_{i,j}(a_i b_i a_j b_j)=\sum_k a_k^2\sum_k b_k^2-\left(\sum_k(a_k b_k)\right)^2\end{aligned}$$
Donc $\left(\sum_{k=1}^{3} a_k b_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{3} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{3} b_k^2\right)$.
2. De même en remplaçant 3 par n :
$$\begin{aligned}0\leqslant &\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i b_j-a_j b_i)^2\\ 0\leqslant &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} a_i^2 b_j^2+\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i)^2-\sum_{i<j}(a_i a_j b_i b_j)-\sum_{i<j}(a_j a_i b_j b_i)\\ 0\leqslant &\sum_{k=1}^{n} a_k^2\sum_{k=1}^{n} b_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)\right)^2\end{aligned}$$
Donc $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$

3. Il y a égalité, si et seulement si (il faut bien être attentif à chaque signe !) (si $b_n \neq 0$) :

$$\forall\, i<j,\qquad a_ib_j-a_jb_i=0 \Longleftrightarrow \forall\, i\leqslant n a_i=\frac{a_n}{b_n}b_i$$

Exercice

Ecrire le développement polynomiale de

$$\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

Quelle formule retrouve-t-on lorsque tous les a_j sont égaux ?

Correction

Il s'agit d'une fonction polynomiale. Plus largement (en notant $|I|$, le cardinal de I) :

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i-a_i)=\sum_{I\subset\mathbb{N}_n}\left(\prod_{i\in I}x_i\times\prod_{j\in\mathbb{N}_n\setminus I}(-a_j)\right)$$

$$\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)=\sum_{I\subset\mathbb{N}_n}\left(\prod_{i\in I}x\times\prod_{j\in\mathbb{N}_n\setminus I}(-a_j)\right)=\sum_{I\subset\mathbb{N}_n}\left(x^{|I|}\times(-1)^{n-|I|}\prod_{j\in\mathbb{N}_n\setminus I}a_j\right)$$

On range alors en fonction des valeurs du cardinal de I, afin de trouver des monômes de même degré.

Il s'agit d'une sommation par paquets $\{I\subset\mathbb{N}_n\}=\biguplus_{k=0}^{n}\{I\subset\mathbb{N}_n,|I|=k\}$:

$$\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)=\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{\substack{I\subset\mathbb{N}_n\\|I|=k}}\left(x^{|I|}\times(-1)^{n-|I|}\prod_{j\in\mathbb{N}_n\setminus I}a_j\right)\right]=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}x^k\left(\sum_{\substack{I\uplus J=\mathbb{N}_n\\|I|=k}}\prod_{j\in J}a_j\right)$$

Cela peut s'écrire aussi :

$$\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}x^k\left(\sum_{\substack{J\subset\mathbb{N}_n\\|J|=n-k}}\prod_{j\in J}a_j\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}x^k\left(\sum_{J\in\binom{\mathbb{N}_n}{n-k}}\prod_{j\in J}a_j\right)$$

Si $a_j=\lambda$, on trouve $(x-\lambda)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}x^k\binom{n}{n-k}\lambda^{n-k}$, c'est la formule du binôme de Newton

4. Coefficients binomiaux et formule du binôme

4.1. Factorielles et coefficients binomiaux

Définitions

Les remarques en marge permettent de s'intéresser aux nombres :

Pour aller plus loin - Coefficients binomiaux réels

On sent qu'on pourrait s'intéresser plutôt au nombres

$$\binom{x}{p}=\frac{x(x-1)\dots(x-p+1)}{p!}$$

avec $x\in\mathbb{C}$ et $p\in\mathbb{N}$.

Dans ce cas, la méthode du triangle de Pascal doit s'adapter, alors que la formule du binôme de Newton reste vraie !

Définition - Factorielle et coefficient binomial

Pour n et p éléments de $\mathbb{N}$, $p\leqslant n$, on pose :

$0!=1$ et pour $n\geqslant 1$, $n!=n\times(n-1)\times\cdots\times 1$ qui se lit "factorielle n"

$$\binom{n}{p}=\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$ qui se lit « p parmi n »

On généralise la notation à tout $p\in\mathbb{Z}$: si $p<0$ ou $p>n$ (si on n'a pas $0\leqslant p\leqslant n$), alors $\binom{n}{p}=0$.

Remarque - Plus tard…

• *Il n'est pas évident que pour $p\leqslant n$, $\binom{n}{p}$ est un nombre entier.*

Si tel est le cas (on le verra plus loin) cela signifie que $p!$ divise tout nombre de la forme $n(n-1)\dots(n-p+1)\dots$.

• *Nos reprendrons la notion de coefficient binomial lorsque nous ferons du dénombrement. Cela expliquera véritablement l'origine de ce calcul.*

Informatique - Calcul de la factorielle avec une boucle


```
def factorielle(n):
    f=1
    for k in range(1,n):
        f=f*(k+1)
    return(f)
```

Propriétés immédiates

Proposition - Propriétés

Pour tout nombres entiers $n\in\mathbb{N}$ (naturels) et $p\in\mathbb{Z}$ (relatifs) :

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1;\quad\binom{n}{1}=n;\quad\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2};$$

$$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$$

$$\binom{n}{p}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$ (Formule du capitaine. Elle est fausse pour $p=0$)

$$\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$$ (Relation de Pascal)

Démonstration

Les premiers résultats sont immédiats (simple jeu d'écriture).

Le second est assez simple, mais il faut différencier : $p\in[\![0,n]\!]$ ou $p<0\iff n-p>n$ ou $p>n\iff n-p>0$.

Démontrons les deux derniers. Si $1\leqslant p\leqslant n$,

$$\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n(n-1)!}{p(p-1)!((n-1)-(p-1))!}=\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

si $p<0$, alors $\binom{n}{p}=0$ et $\binom{n-1}{p-1}=0$; si $p>n$, alors $\binom{n}{p}=0$ et $\binom{n-1}{p-1}=0$.

Plus intéressant, si $1\leqslant p\leqslant n-1$,

$$\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}=\frac{(n-1)![p+(n-p)]}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}$$

Si $p=n$: $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=1+0=1=\binom{n}{n}$.

Si $p>n$: $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=0+0=0=\binom{n}{n}$.

De même si $p<0$. □

Exercice

Pour n,p, simplifier $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$. *On pourra y « voir » un télescopage*

Correction

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{p}{p}+\sum_{k=p+1}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)=1+\binom{n+1}{p+1}-\binom{p+1}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$$

Histoire - Blaise Pascal

Blaise Pascal (1623-1662) est un français, génie des mathématiques (mais pas uniquement). Il redémontre tout Euclide, seul à 12 ans. Il fonde la géométrie projective (avec Desargues) et la « géométrie du hasard » avec Fermat.

Mais c'est aussi l'inventeur de la brouette, de la première machine à calculer ou du premier transport en commun parisien…

Il présente le triangle de Pascal dans le traité du triangle arithmétique (mais ce n'est pas lui le premier à le découvrir).

4.2. Triangle de Pascal

De ces propriétés on déduit un moyen simple de calculer les coefficients binomiaux :

Savoir faire - Triangle de Pascal

On peut alors construire le triangle de Pascal pour pouvoir calculer facilement (addition et non multiplication) les coefficients binomiaux. On écrit ainsi dans un tableau :

$$\begin{array}{cccccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & 1 & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & 1 & 1 & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & 1 & 2^{=1+1} & 1 & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \longrightarrow & 1 & \underline{3} & \underline{3} & 1 \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & 1 & 4 & \underline{6^{=3+3}} & 4 & 1 \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots &
\end{array}$$

On l'a déjà dit :

Proposition - Nombres entiers

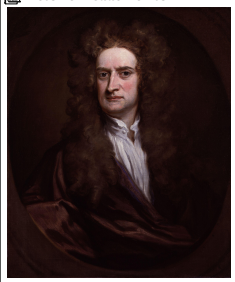
Pour n et p éléments de $\mathbb{N}$, $p \leqslant n$, $n!$ et $\binom{n}{p}$ sont des entiers naturels.

Démonstration
Pour la factorielle : il s'agit d'un produit d'entiers naturels.
Pour le coefficient binomial, on réalise une récurrence sur le niveau n.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$: « $\forall\ p \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

- $\mathscr{P}_0$ est vraie car $\binom{0}{0} = 1$ et pour tout $p \neq 0$, $\binom{n}{p} = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
  Soit $p \in \mathbb{Z}$, alors $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$, addition de deux entiers d'après $\mathscr{P}_n$.
  Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

□

Histoire - Isaac Newton



On attribue couramment à Isaac Newton (1642-1707) la révolution scientifique de la science moderne, grâce à son travail mathématique sur les calculs différentiel et intégral et son travail en mécanique (relation fondamentale de la dynamique, loi des forces…).
La formule du binôme qui apparait ici est en fait du à Pascal (1654), et généralisée une première fois par Newton (avec son travail d'interpolation polynomiale - 1671) puis par Abel avec tout exposant $n \in \mathbb{R}$ au début du XIX siècle.

Informatique - Triangle de Pascal

En exploitant des listes (de listes) en informatique, il est possible de créer la n^e ligne du triangle de Pascal.

```
def Pascal(n):
    L=[0]*(n+1)
    for h in range(n+1):
        L[h]=[1]+[0]*n
    print(L)
    for h in range(n):
        for k in range(h+1):
            L[h+1][k+1]=L[h][k]+L[h][k+1]
    return(L)
```

4.3. Formule du binôme

Proposition - Formule du binôme (de Newton)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux réels ou deux complexes (ou éléments de tout anneau et tels que $a \times b = b \times a$). Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Avec $a = b = 1$:

Corollaire -

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Démonstration
Démontrons ce résultat par récurrence.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$: « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ».

- $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.
  donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
  On a alors

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{n} a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}}_{h=k+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}}_{h=k} + \binom{n}{0} b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{h=1}^{n} \left(\binom{n}{h-1} + \binom{n}{h} \right) a^h b^{n+1-h} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

  d'après la formule de Pascal et comme $\binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+1}{0}$.
  Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est alors vérifiée.

On a ainsi démontré par récurrence le résultat attendu. □

Exercice

Calculer $\sum_{0 \leqslant p \leqslant n ; p \text{ pair}} \binom{n}{p}$ et $\sum_{0 \leqslant p \leqslant n ; p \text{ impair}} \binom{n}{p}$.

Correction

Notons P_n et I_n ces deux sommes. On a vu que $P_n + I_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Puis, $I_n = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n ; p \text{impair}} \binom{n}{p} = \sum_{0 \leqslant p \leqslant n ; p \text{impair}} \binom{n-1}{p} + \sum_{0 \leqslant p \leqslant n ; p \text{impair}} \binom{n-1}{p-1} = I_{n-1} + P_{n-1} = 2^{n-1}$.

Et ainsi $P_n = 2^n - I_n = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1} = I_n$

Pour aller plus loin - De qui parle-t-on ?

« Il est de bonne famille et il a reçu une excellente éducation. Prodigieusement doué pour les mathématiques, à vingt et un ans il publiait une étude sur le binôme de Newton, qui fit sensation dans toute l'Europe et lui valut de devenir titulaire de la chaire de mathématiques dans une de nos petites universités. Tout donnait à penser qu'il allait faire une carrière extrêmement brillante. Mais l'homme avait une hérédité chargée, qui faisait de lui une sorte de monstre, avec des instincts criminels d'autant plus redoutables qu'ils étaient servis par une intelligence exceptionnelle. Des bruits fâcheux coururent bientôt sur lui dans l'Université, qui l'obligèrent à se démettre. Il vint à Londres où il se mit à donner des cours destinés aux officiers de l'armée. »

5. Bilan

Synthèse

- ⇝ En science, les problèmes se traduisent sous forme d'équations, souvent polynomiales. Ces fonctions polynomiales sont très présentes car elles sont stables par addition, multiplication et composition. La multiplication s'appelle développement. On développe avec intelligence!
- ⇝ Le plus important pour résoudre une équation est de savoir factoriser. Le théorème de factorisation est très important : il permet de séparer les problèmes de résolution.
  Dans quelques rares cas (degré faible), il existe des formules explicites qui donnent les expressions des racines d'une fonction polynomiale.
- ⇝ On peut aussi regarder les fonctions polynômiales comme des transformations géométriques de la droite réelle. Faire le lien : fonction polynomiale/représentation géométrique permet d'enrichir chacun des deux points de vue. On peut penser à l'exemple des coniques.
- ⇝ Une autre idée est d'exploiter ce lien pour chercher les racines : localement une branche de courbe polynomiale ressemble à un segment de droite. Les algorithmes de la sécante ou de la tangente exploitent cette idée pour trouver une valeur approchée d'une racine d'une fonction polynomiale.

6. Bilan

Synthèse

- ⇝ En mathématique, la sélection (naturelle) opère également et un langage se crée. Des définitions et concepts sont sélectionnés, comme des mots de la langue ; et le formalisme comme l'écriture de ce langage. Le formalisme doit être compact (souvent), ressemblant à sa notion attachée (rarement) et efficace calculatoirement (absolument). C'est le cas de la notation $\sum$ (ou $\prod$) qu'on utilise comme un « auto-mathisme » avec un peu d'habitude : changement de variable, sommation par paquets, télescopage, somme multiple…
- ⇝ Pour bien comprendre cette utilisation, on se rend compte que l'enjeu est de maîtriser la manipulation de l'ensemble des indices. Cette notion d'ensemble est au coeur des mathématiques, nous reviendrons dessus aux chapitres 9 et 10. (Il faut aussi que l'ensemble des nombres soit commutatif).
- ⇝ Le nombres de sous-ensemble à k éléments à partir d'un ensemble à n élément est également un calcul qui se présente dans de très nombreuses branches des mathématiques. Il est formalisé par le coefficient binomial et une expression de langage : « k parmi n ».
- ⇝ De nombreuses propriétés (issues de domaines variés) peuvent lui être attachés : triangle de Pascal, binôme de Newton, nombre de chemins dans des arbres binaires fusionnés, inversion de Pascal…

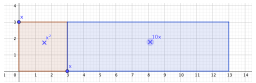
Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- — Savoir-faire - Changement d'indice
- — Savoir-faire - Sommation par paquets
- — Savoir-faire - Méthode de téléscopage
- — Truc & Astuce pour le calcul - Ecrire un programme pour mieux comprendre
- — Truc & Astuce pour le calcul - Invariant de boucle
- — Savoir-faire - Somme multiple (indépendance)
- — Savoir-faire - Somme multiple (dépendance)
- — Savoir-faire - Triangle de Pascal
- — Truc & Astuce pour le calcul - Anticipation
- — Truc & Astuce pour le calcul - Reconnaissance de formes
- — Truc & Astuce pour le calcul - Garder en mémoire « vive » le calcul
- — Savoir-faire - Factoriser

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$[\mathscr{P}(i)]$	Notation d'Iverson pour la propriété $\mathscr{P}$	$\forall\, i$, $[\mathscr{P}(i)] \in \{0,1\}$ avec $[\mathscr{P}(i)] = 1$ ssi $\mathscr{P}(i)$ vraie	
$n!$	Factorielle de n (lire dans ce sens !)	$n! = \prod_{k=1}^{n} k$	$0! = 1$ et par récurrence $n! = n \times (n-1)!$
$\binom{n}{k}$	Coefficient binomial de k parmi n	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)_k}{k!}$ (si n n'est pas entier)	C'est le nombre de sous-ensemble à k éléments pris dans un ensemble E à n éléments.
		$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{r} x^k$ (même si $r \notin \mathbb{N}$…)	
$[f]_k$	coefficient de la fonction polynomiale f devant le monôme x^k	Linéarité : $[\lambda f + \mu g]_k = \lambda [f]_k + \mu [g]_k$	$\deg f = n \iff \forall\, k > n, [f]_k = 0$
		Convolution : $[f \times g]_k = \sum_{i=0}^{k} [f]_i [g]_{k-i}$	
$b_a^n(x)$	Petit Bernoulli en a d'indice n	$\forall\, x \in \mathbb{K}$ $b_a^n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i a^{n-i}$ (fonction polynomiale)	$x^{n+1} - a^{n+1} = (x-a) \times b_a^n(x)$

Retour sur les problèmes

7. Nombres triangulaires. $T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$. Si on note T_n^k, telle que $T_n^k = \sum_{h=1}^{n} T_h^{k-1}$ et $T_n^0 = n$.
   On trouve alors par récurrence : $T_n^k = \binom{n+k}{k+1}$.
8. A calculer… Il n'y a pas de résultats intéressants, sauf en petite taille ou en expression formelle.
9. Suite de nombres. Et le suivant ?
   Une stratégie : apprendre des évolutions sur les premiers nombres, donc calculer la suite $\delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$. Pour en déduire $u_m = u_{m-1} + \delta(u)_{m-1}$.
   Si ce n'est pas suffisant, évaluer (par récurrence) : $\delta^k(u)_n = \delta^{k-1}(u)_{n+1} - \delta^{k-1}(u)_n$…
10. Interpolation à pas constant. Voir activités
11. Développement de puissance.
    C'est le coefficient multinomial de Newton : $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{m_1+m_2+\cdots+m_k=m} \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} \prod_{i=1}^{k} a_i^{m_i}$.
    Vous comprenez ?
12. 
13. Il faut transformer en phrase les opérations $\times$, $\sqrt{\cdot}$…
14. $x = u - v$, $x^3 = (u-v)^3 = u^3 - 3u^2 v + 3uv^2 - v^3$.
    On a donc : $x^3 + 6x - 20 = u^3 - v^3 - 3uv(u-v) + 6x - 20 = u^3 - v^3 + 3x(2 - uv) - 20$.
    Ajoutons la condition $uv = 2$, on a donc $u^3 - v^3 = 20$ et $u^3 v^3 = 8$.
    Ainsi, u^3 et $-v^3$ sont racines de $x^2 - Sx + P = x^2 - 20x - 8 = 0$.
    $\delta = 432$, puis $u^3 = 10 + \sqrt{108}$ et $v^3 = 10 - \sqrt{108}$.
    Et enfin, $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$.
    Autre méthode : $x^3 + 6x = 20$? Par essai : $x = 2$ fonctionne.

$$x^3 + 6x - 20 = (x-2)(x^2 + 2x + 10) = (x-2)(x+1-3i)(x+1+3i)$$

Puis, on exploite la formule de Cardan et enfin on reconnait une bicarré :

$$x^4 + px^2 + 1 = (x^2 - \frac{-p+\sqrt{p^2-4}}{2})(x^2 - \frac{-p-\sqrt{p^2-4}}{2})$$

$$= (x - \sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4}}{2}})(x + \sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4}}{2}})(x - \sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4}}{2}})(x + \sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4}}{2}})$$

Chapitre 2

Résolution de systèmes linéaires.

Résumé -

Il n'est pas rare également d'avoir à résoudre des équations algébriques sous forme de systèmes d'équations linéaires.
Le but de ce (tout petit) chapitre est de mettre en place les définitions efficaces, les méthodes (algorithmes) de résolution adéquates (ce que n'est pas la substitutiuon…) et de voir apparaître par le calcul bien mené, la structure sous-jacente. On voit ici l'exemple typique du calcul linéaire, ou matriciel et la structure clé d'espaces vectoriels.

Enfin, voici une liste de petites vidéo ou conférence visionnable sur internet et en lien avec le sujet. A visionner à loisir :
- *Exo7Math - Systèmes linéaires - partie 1 : introduction. https ://www.youtube.com/watch ?v=0uYJ3RNL5SU*
- *Mathéma-TIC - Règle de Cramer. https ://www.youtube.com/watch ?v=CNzVk1evqac*

Sommaire

1. Quelques problèmes

Problème 9 - Résolution d'un système linéaire

Il n'est pas rare que l'on rencontre en SI ou en physique (ou en mathématiques) un système d'équation de la forme suivante à résoudre :

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & - & 4z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

Est-il possible de trouver la/les solution(s) en (x,y,z) de ce système directement ?
On peut croire et anticiper que ces solutions s'expriment sous la forme d'un calcul différent (mais équivalent, d'une certaine façon) pour x, y et z, à partir des nombres $2;3;-4;1\ldots$
Comment expliciter ce calcul ?

Problème 10 - Résolution « au petit bonheur »

Lorsque le système est gros (plus de quatre équations), les méthodes aléatoires de résolution ne fonctionnent pas bien.
Il faut s'organiser. Qu'avons-nous le droit de faire ? Existe-t-il une méthode, un algorithme (programmable informatiquement, par exemple) qui donne à coup sûr l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires ?

Problème 11 - Forme de l'ensemble des solutions

Dans la pratique, lorsqu'on rencontre un système de 3 équations à 3 inconnues, on trouve une unique solution.
Est-ce toujours vrai ? Sinon, qu'est-ce qui fait que cela peut être faux ?
Et, plus généralement, s'il y a n équations et p inconnues, combien y a-t-il de solutions ?

Problème 12 - Impact des paramètres

Il arrive aussi en science appliquée (et en mathématiques (en interne) également) que l'on trouve un système à paramètre. Par exemple :

$$\begin{cases} ax & + & 3y & - & 4z & = & 1 \\ (a-1)x & - & 3y & + & z & = & -1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

Dans ce cas là, à quoi ressemble l'ensemble des solutions ?

2. Systèmes linéaires. Equivalence

Dans cette partie, même si nous énonçons des résultats (sous forme de définitions et propositions à apprendre), nous ne faisons pas (encore) de démonstration comme annoncé au cours inaugural.

2.1. Vocabulaire

Remarque - Le formalisme de LEIBNIZ

On commence par paramétrer notre problème : on l'élargit en donnant une écriture symbolique (paramétre lettré) aux nombres. Puis on élargit la problème : pourquoi seulement trois équations et trois inconnues ?
Pour permettre l'étude systématique des systèmes linéaires, on a besoin d'une suite de nombre doublement indexé les $(a_{i,j})$. C'est Leibniz qui en a eu l'idée (1678). Et comme souvent, à partir du moment où le formalisme et les définitions associées sont bons, les théorèmes tombent comme des fruits mûrs…

Définition - Système linéaire de n équations à p inconnues

Un **système linéaire** à n équations et p inconnues à coefficient dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un système S d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

où
- les $a_{i,j} \in \mathbb{K}$;
- $(b_1, b_2, \ldots b_n) \in \mathbb{K}^n$ est appelé le second membre de l'équation ;
- $(x_1, x_2 \ldots x_p) \in \mathbb{K}^p$ est appelé l'inconnue du système.

On appelle **système homogène** le système obtenu en remplaçant chaque b_i par 0 (second membre nul).

On appelle **solution** du système S, l'ensemble $\mathscr{S} \subset \mathbb{R}^p$ des p-uplets $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots \overline{x}_p)$ qui vérifient les n équations :
$\forall\, i \in \mathbb{N}_n,\ a_{i,1}\overline{x}_1 + a_{i,2}\overline{x}_2 + \cdots + a_{i,p}\overline{x}_p = b_i$

Histoire - Mathématiques des neuf livres

Le plus vieux traité mathématique proposant l'étude de système d'équations linéaires est le Chiu chang suan shu, que l'on appelle les mathématiques des neufs livres, écrit en 160 av. JC. Bien que de nature différentes (moins géométrique et plus algorithmique), ce livre est au mathématiques chinoise, ce que les éléments d'Euclide sont aux mathématiques européennes.

Remarque - Notations

On a pour habitude de noter S les systèmes et de manière plus stylisé l'ensemble des solutions $\mathscr{S}$.
On associe parfois des indices.

Remarque - Solution(s) du système homogène

Un système linéaire homogène admet toujours au moins la solution nulle : $\mathscr{S}_0 = (x_1, x_2 \ldots x_p) = (0, 0 \ldots, 0) = O_p$

Heuristique - Résolution

Il y a en gros deux méthodes pour résoudre un tel système.
La méthode de Leibniz (fin du XVII) fonctionne très bien pour les petites dimensions $n, p \leqslant 3$ et la formule de Cramer que l'on donnera ensuite. Elle marche bien également *en théorie* pour les grandes dimensions.
La méthode (dite) de Gauss est algorithmique, nous la privilégierons pour les plus grandes dimensions.

2.2. Systèmes équivalents

Analyse - Sens des flèches $\Rightarrow$, $\Leftarrow$

« Naturellement », lorsqu'on écrit $S_1 \Rightarrow S_2$, cela signifie qu'on peut passer du système S_1 au système S_2.
Ainsi, tous les éléments qui vérifient les équations de S_1 vérifient aussi celles de S_2.
En terme d'ensemble solution : toutes les solutions de S_1 sont soolutions de S_2.

Donc $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$.
On peut donc résumer : $S_1 \Rightarrow S_2$ si et seulement si $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$.

Définition - Systèmes équivalents
Deux systèmes S_1 et S_2 sont dits équivalents, relation notée

$$S_1 \iff S_2$$

si et seulement si les ensembles de solutions sont les mêmes : $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$.

Exercice

Les systèmes $S_1 : \begin{cases} 2x+y=1 \\ -x-y=0 \end{cases}$ et $S_2 : \begin{cases} 2x+y=1 \end{cases}$ sont-ils équivalents ?

Correction
Non.
Le couple $(0,1) \in \mathscr{S}_2$, c'est une solution du second système d'équations mais pas du premier car $0-1 \neq 0$

Attention - Pas d'abus
Typiquement ici, il ne faut pas abuser du symbole d'équivalence !
Dans l'exercice, on écrit donc jamais :

$$S_1 : \begin{cases} 2x+y=1 \\ -x-y=0 \end{cases} \iff 2x+y=1$$

Il n'y a ici qu'une implication.

2.3. Ensemble (affine) des solutions

Analyse - Soustraction de deux solutions (superposition)
Soient $(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_p)$ et $(\overline{x}'_1,\dots\overline{x}'_p) \in \mathbb{K}^p$ deux solutions du système S (défini plus haut).
Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\overline{x}_j = b_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\overline{x}'_j$.

Donc $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(\overline{x}_j - \overline{x}'_j) = 0$.

Ainsi, en notant pour tout $j \in \mathbb{N}_p$ $y_j = \overline{x}_j - \overline{x}'_j$, on a : $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ solution du système homogène.
Ainsi, $(\overline{x}_1,\dots\overline{x}_p) = (\overline{x}'_1,\dots\overline{x}'_p) + (y_1,\dots,y_p)$ avec $(y_1,\dots,y_p)$ une solution du système homogène.
On en déduit la proposition suivante, qui cache une définition : l'addition d'un vecteur et d'un espace.

Proposition - Description de S
On note S (respectivement S_0) les solutions du système $\mathscr{S}$ (respectivement du système homogène associée).
Si $(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_p)$ est une solution particulière de $\mathscr{S}$, alors

$$S = \{(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_p) + (y_1,\dots,y_p)\,;\,(y_1,\dots,y_p) \in \mathscr{S}_0\} =: (\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_p) + \mathscr{S}_0$$

Attention - Pas de simplification
Le résultat est indépendant du choix de la solution particulière considérée. Cela donne le même ensemble $\mathscr{S}$.

Ou encore, on a :

$$(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_p) + \mathscr{S}_0 = (\overline{x}'_1,\dots,\overline{x}'_p) + \mathscr{S}_0 \not\Rightarrow (\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_p) = (\overline{x}'_1,\dots,\overline{x}'_p)$$

Reste à savoir comment décrire l'ensemble des solutions du système homogène.

3. Résolution explicite. cas des petits systèmes $n = p = 2$ ou $n = p = 3$

3.1. Vers la formule de Cramer

Etude formelle du système simple $n = p = 2$

Comme Leibniz, commençons par étudier le système

$$S : \begin{cases} ax & +by & = \alpha \\ cx & +dy & = \beta \end{cases}$$

où a, b, c, d et α, β sont des paramètres, alors que x, y sont les inconnues.
Analyse - Etude « à la lycéenne »
On substitue (évidemment : **si** $a \neq 0$) :

$$S \Longrightarrow x = \frac{\alpha - by}{a}$$

Donc (on a définitivement perdu l'équivalence) (**si** $ad - bc \neq 0$) :

$$S \Longrightarrow \frac{c\alpha - cby}{a} + dy = \beta \Longrightarrow \frac{ad-bc}{a}y = \frac{a\beta - c\alpha}{a} \Longrightarrow y = \frac{a\beta - c\alpha}{ad-bc}$$

On trouve alors en réinjectant : $S \Longrightarrow x = \frac{\alpha(ad-bc) - b(a\beta - c\alpha)}{a(ad-bc)} = \frac{\alpha d - \beta b}{ad-bc}$.

Remarque - Avons-nous trouver les solutions ?
Non !!
Ici, on a $\mathscr{S} \subset \left\{\left(\frac{\alpha d - \beta b}{ad-bc}, \frac{-\alpha c + \beta a}{ad-bc}\right)\right\}$.
Mais peut-être que $\mathscr{S}$ est l'ensemble vide !
Il faut donc faire une réciproque. Sinon, il y a une faute (courante) de logique.

Analyse - Réciproque
Toujours dans le cas $ad - bc$, on vérifie que

$$a\frac{\alpha d - \beta b}{ad-bc} + b\frac{-\alpha c + \beta a}{ad-bc} = \alpha\frac{ad-bc}{ad-bc} = \alpha$$
$$c\frac{\alpha d - \beta b}{ad-bc} + d\frac{-\alpha c + \beta a}{ad-bc} = \beta\frac{ad-bc}{ad-bc} = \beta$$

Donc la réciproque est vérifiée. On a bien l'égalité : $\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{\alpha d - \beta b}{ad-bc}, \frac{-\alpha c + \beta a}{ad-bc}\right)\right\}$.

Remarque - $a \neq 0$?
Dans l'analyse, il a fallut faire séparer le cas $a \neq 0$.
Mais le résultat obtenu ne dépend pas de $a = 0$ ou $a \neq 0$. Donc on aurait sûrement pu s'en passer.
D'ailleurs, la réciproque montre que ce n'est pas un cas important.
Seule la situation $ad - bc \neq 0$ ou $ad - bc = 0$ est importante !

Définition - Déterminant d'un système 2×2
On appelle **déterminant du système** 2×2 (i.e. $n=2$ et $p=2$)

$$S \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2 &= b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

le nombre $\delta_S = a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}$ souvent noté $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix}$.

Cas d'un système 3×3

Leibniz propose d'étendre sa méthode pour $n>2$.

Pour aller plus loin - Extension de taille n
Lorsque l'on souhaite généraliser la notion de déterminant, on comprend qu'il faut prendre une combinaison linéaire des termes constitués exactement de nombre tous pris dans des lignes et des colonnes différentes.
Mais il y a une règle de signe à respecter. Il n'est pas clair que Leibniz ait bien compris cette règle.
Cramer, 50 ans plus tard l'a retrouvé (sans avoir connaissance des travaux de Leibniz).
Un mathématicien japonais Seki Kowa (1642-1708) a effleuré toute cette découverte.

Définition - Déterminant d'un système 3×3
On appelle **déterminant du système** 3×3 (i.e. $n=3$ et $p=3$)

$$S \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3 &= b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3 &= b_2\\ a_{3,1}x_1+a_{3,2}x_2+a_{3,3}x_3 &= b_3 \end{cases}$$

le nombre $\delta_S = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$ souvent noté $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}$.

Formule de Cramer

Nous verrons dans le cours sur les déterminants, au second semestre, une petite notice sur Gabriel Cramer (1704-1752)

Pour aller plus loin - Sytème de taille $n\times n$
Dans le calcul du déterminant qui donne x_i, on remplace la i-ème colonne par la colonne du second membre.
La formule de Cramer se généralise à tout système carré, avec une bonne définition du déterminant généralisée.

Savoir faire - Formule de CRAMER
Si le déterminant du système S (n=p=2) est non nul, la solution de $\mathscr{S}$ de

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2 &= b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2 &= b_2 \end{cases}$$

est $\mathscr{S}=\{(\overline{x}_1,\overline{x}_2)\}=\left\{\left(\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2}\\ b_2 & a_{2,2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix}},\dfrac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1\\ a_{2,1} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{vmatrix}}\right)\right\}$.
Si le déterminant du système S (n=p=3) est non nul, la solution de $\mathscr{S}$ de

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3 &= b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3 &= b_2\\ a_{3,1}x_1+a_{3,2}x_2+a_{3,3}x_3 &= b_3 \end{cases}$$

est $\mathscr{S}=\{(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)\}=\left\{\left(\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3}\\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3}\\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}},\dfrac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3}\\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3}\\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}},\dfrac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1\\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2\\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix}}\right)\right\}$

4. Algorithme su pivot de GAUSS

Heuristique - Il y a une bonne méthode et une mauvaise méthode...
La **mauvaise méthode** est la SUBSTITUTION.
On perd des équations et cela est **plus long**.
La **bonne méthode** consiste à faire des OPERATIONS ELEMENTAIRES.
Il faut les connaître, mais ce n'est pas sufffisant.
Il faut aussi savoir **bien** les mener. C'est la partie difficile de l'algorithme.

4.1. Systèmes équivalents : opérations élémentaires

On commence par trouver des invariants de l'ensemble des solutions. Cela permet de raisonner avec des systèmes équivalents

Définition - Opérations élémentaires
On appelle **opérations élémentaires** sur le système dont la ligne i est noté L_i, les opérations suivantes :
— pour tout $i,j\leqslant n$, échange des lignes L_i et L_j codé : $L_i\leftrightarrow L_j$
— pour tout $i\leqslant n$, $\lambda\neq 0$, la multiplication de la ligne L_i par λ codé : $L_i\leftarrow \lambda L_i$
— pour tout $i,j\leqslant n$, $\alpha\in\mathbb{K}$, l'ajout à la ligne L_i de α fois la ligne L_j codé : $L_i\leftarrow L_i+\alpha L_j$

Proposition - Invariant des solutions
Les opérations élémentaires conservent exactement les solutions du système

Démonstration
Il est évident que chaque opération conduit à une implication $\Rightarrow$ sur les systèmes.
Et par ailleurs, pour chacune de ces opérations, il est possible de « revenir en arrière ».
Pour cela, il suffit de voir que
1. l'opération $L_i\leftrightarrow L_j$ répétée deux fois redonne le système initiale.
2. l'opération $L_i\leftarrow \frac{1}{\lambda}L_i$ ($\lambda\neq 0$), après l'opération $L_i\leftarrow \lambda L_i$, redonne le système initiale.
3. l'opération $L_i\leftarrow L_i-\alpha L_j$, après l'opération $L_i\leftarrow L_i+\alpha L_j$, redonne le système initiale.

On trouve donc $\mathscr{S}\Rightarrow\mathscr{S}'\Rightarrow\mathscr{S}$.
Cela signifie bien : $\mathscr{S}\Longleftrightarrow\mathscr{S}'$. □

4.2. Algorithme du pivot de GAUSS

Il reste à bien exploiter ces opérations élémentaires afin de **toujours** trouver la solution d'un système linéaire.

Savoir faire - Algorithme du pivot de GAUSS
Pour résoudre un système linéaire, on applique des opérations élémentaires pour le rendre triangulaire.
1. On cherche un coefficient non nul dans la première colonne (devant la première inconnue) le plus simple possible (on va devoir diviser par ce nombre).
   Si tous les coefficients sont nuls, on passe à l'inconnue suivante.
2. On échange la ligne où l'on a trouvé ce coefficient avec la ligne 1.
3. Pour $j\in[\![2,n]\!]$, on effectue l'opération $L_j\leftarrow L_j-\dfrac{a_{j,1}}{a_{1,1}}L_1$ (ce qui permet d'annuler le coefficient devant x_1 pour la ligne j puis pour toute la colonne.

Histoire - Algorithme de Fang-Cheng
On ne prête qu'au riche : en occident, nous associons l'algorithme ici étudié (central en mathématiques de l'algèbre linéaire) au grand Carl-Freidrich Gauss, mais il semble qu'il soit bien connu et expliqué dans les mathématiques des neuf livres (première impression en 1084, 5 siècle avant Gutemberg...).
L'auteur de cet ouvrage est un certain Chang Ts'ang, et sa méthode s'appelle le modèle rectangulaire écrit Fang-Cheng.

4. On recommence la première étape, en oubliant la première équation et en s'intéressant à l'inconnue suivante, tant qu'il reste des inconnues.

Après avoir appliqué cet algorithme, le système obtenu est triangulaire, et l'on peut déterminer ses solutions en partant de la dernière équation et en remontant à la première (sans substitution : cela demande un « mouvement » supplémentaire…).
Il peut arriver que l'on retrouve en dernière équation plus d'une inconnue. Dans ce cas, on garde une seule inconnue, les autres deviennent des variables libres que l'on considère alors en second membre.

4.3. Applications. Différents formes de l'ensemble des solutions

Application - Trois systèmes à résoudre : $S_1 : \begin{cases} x & -y & +z & =1 \\ -x & -y & +z & =3 \\ 2x & +y & +z & =0 \end{cases}$,

$S_2 : \begin{cases} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =-2 \end{cases}$ **et** $S_3 : \begin{cases} x & +y & +2z & =1 \\ 2x & -y & +z & =-1 \\ x & -2y & -z & =2 \end{cases}$

On applique la méthode du pivot de Gauss, on trouve :

$$S_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} \underline{x} & -y & +z & =1 \\ & -2y & +2z & =4 \\ & 3y & -z & =-2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x & -y & +z & =1 \\ & \underline{-2y} & +2z & =4 \\ & & 2z & =4 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2} L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{array} \right.$$

Donc $\mathscr{S}_1 = \{(-1,0,2)\}$
Pour le second système

$$S_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} \underline{x} & +y & +2z & =1 \\ & -3y & -3z & =-3 \\ & -3y & -3z & =-3 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & =1-2z & \\ & y & =3-z & \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2-z \\ y = 3-z \end{array} \right.$$

Donc $\mathscr{S}_2 = \{(-2-z, 3-z, z), z \in \mathbb{R}\}$ que l'on prend l'habitude de noter : $(-2,3,0) + \{z(-1,-1,1), z \in \mathbb{R}\}$.
Pour le troisième système

$$S_3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} \underline{x} & +y & +2z & =1 \\ & -3y & -3z & =-3 \\ & -3y & -3z & =1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & 2z & =1 \\ & y & z & =3 \\ & & 0 & =4 \end{array} \right.$$

Donc $\mathscr{S}_3 = \emptyset$.

Remarque - Nombre de solution
Notons de cette application qu'un système carré (ici 3×3) peut avoir :
- *aucune solution*
- *une unique solution*
- *une infinité de solution*

Pour aller plus loin - Début du second semestre
Ceci est le début historique de l'algèbre linéaire que nous verrons longuement en début de second semestre (avec la question des déterminants). N'anticipons pas trop pour le moment…

Pour aller plus loin - Rang d'un système
Le nombre (entier) de variables libres obtenues lors de la résolution du système (homogène) s'appelle le rang du système. Ce nombre, caché à première vue, compris entre 0 et $\min(n,p)$ joue un rôle très important en théorie matriciel

Attention - Lorsqu'il y a infinité de solution…
il n'y a pas unicité d'écriture de cet ensemble

5. Bilan

Synthèse

- Pour la résolution d'un système linéaire il existe une méthode infaillible : l'algorithme du pivot de Gauss.
  Plus la taille du système est grande, plus il est nécessaire d'exploiter cette méthode.
- Pour des systèmes plus petits, on peut exploiter directement la formule de Cramer
- L'ensemble des solutions est soit un ensemble vide, soit l'addition d'une solution particulière et de l'ensemble (*espace vectoriel*) des solutions de l'équation homogène. L'écriture de cet ensemble n'est pas unique.
- Il faut être très attentif au symbole $\Longleftrightarrow$ parfois employé abusivement…

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Formule de CRAMER
- Savoir-faire - Algorithme du pivot de GAUSS

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$S_1 \Longleftrightarrow S_2$	Les systèmes S_1 et S_2 ont les mêmes solutions	$\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2$	On passe de l'un à l'autre par opérations élémentaires.
$S_1 \Longrightarrow S_2$	Les solutions de S_1 sont des solutions de S_2	$\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$	On passe de S_1 à S_2 par opérations « non légitimes »…
$\delta_S = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$	Déterminant du système S (de taille 2) ou de la matrice associée		On exploite ce résultat pour les formules de Cramer.

Retour sur les problèmes

12. Résolution d'un système linéaire. $\mathscr{S} = \{(1,1,1)\}$.
13. Résolution « au petit bonheur ». Voir l'algorithme de Gauss.
14. Forme de l'ensemble des solutions.
    Il peut y avoir :
    - aucune solution (dans ce cas le système n'est pas homogène)
    - une solution de la forme $\mathscr{S} = \{(\overline{x}_1, \dots \overline{x}_p) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \overrightarrow{u_k}\}$ où r est le rang du système, $(\overline{x}_1, \dots \overline{x}_p)$ est une solution particulière et pour tout k, $\overrightarrow{u_k}$ est un vecteur de $\mathbb{K}^p$, solution non nulle de l'équation homogène.
      (Ces vecteurs sont linéairement indépendants).
15. Impact des paramètres.
    - Si $a = 8$, alors $\mathscr{S} = \emptyset$,
    - Si $a \neq 8$, alors $\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{2}{8-a}, \frac{a-16}{a-8}, \frac{10}{8-a}\right)\right\}$

Chapitre 3

Calculs trigonométriques

Résumé -

Il s'agit, pour commencer, de revoir les propriétés des fonctions trigonométriques. Nous choisissons une présentation constructive, selon le sens de l'histoire et de la formation du lycéen. Nous nous appuyons sur les formules de base : $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ *et* $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$ *pour développer toute la trigonométrie.*
Avec l'exponentielle complexe (chapitre 7), les formules seront revues plus efficacement.
Pour résoudre $f(x) = y$*, il faut pouvoir écrire* $x = f^{-1}(y)$*, i.e. trouver la fonction* f^{-1} *réciproque de* f*. On s'intéresse donc à la trigonométrie réciproque (*arcsin, arccos *et* arctan*)*
Vidéos :

- *Kitoumath. Les mathématiques fantastiques - Les formules de trigo à apprendre sans peine. https ://www.youtube.com/watch ?v=lKj1zQpToxA*
- *Micmath - La conjugaison complexe est un automorphisme de corps. https ://www.youtube.com/watch ?v=AVDMpnwsztg*
- *Les maths en finesse - Racines nieme de l'unité. https ://www.youtube.com/watch ?v=aZLGdnktO8k*

Sommaire

1. Problèmes

Pour aller plus loin - Triangles semblables
On dit que deux triangles sont semblables si deux (et donc trois) angles sont de mêmes mesures

Problème 13 - Fonctions définies sur des angles nulles et droits. Et plus loin ?

Pour tout angle θ, les triangles rectangles dont l'un des angles vaut θ sont tous semblables.
Il y a donc un coefficient de proportionnel entre les mesures des côtés de ces triangles, qui dépend uniquement de θ. Prenons un triangle rectangle de référence d'hypothènuse égale à 1.
On note $\cos\theta$ la mesure du côté adjacent et $\sin\theta$ le côté opposé.
Que se passe-t-il si l'angle dépasse 90° ?

Problème 14 - Unité de mesure d'angles

Au début du lycée, on vous a fait changer l'unité de mesure des angles : des degrés à des radians ?
Pourquoi ? Qu'est-ce qu'on y gagne, pour chaque unité ?

Problème 15 - Relation entre les formules de trigonométrie

Quelles relations entre $\cos(a+b)$ et $\cos a$, $\cos b$. Et d'autres ?
De même peut-on linéariser $\cos(a)\sin(b)$ (c'est-à-dire, l'écrire sous forme d'une somme !).
Beaucoup de formules !
Une autre question, non négligeable : comment apprendre toutes ces formules ?

Histoire - Claude Ptolémé
Ptolémée (Ptolemaïs de Thébaïde (Haute-Égypte) vers 90 - Canope vers 168) est un astronome et astrologue grec qui vécut à Alexandrie (Égypte).

Il est connu pour ses apports en géographie et en mathématique (géométrie et trigonométrie).
Même s'il n'exploitait pas les fonctions cos *et* sin *mais plutôt la fonction corde* (cord)*, il donna le premier élan (après Hipparque ?) à la trigonométrique que nous connaissons. Ces travaux ont été repris par les mathématiques indiennes (III à VI siècle) puis les mathématiques arabes (VIII à XIII siècle)*

Problème 16 - Equation polynomiale et trigonométrie

Montrer que pour tout entier n, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta)$ s'exprimer comme une fonction polynomiale en $\cos\theta$.
Ce polynôme s'appelle le polynôme de Tchebychev d'ordre n.

Problème 17 - Fonction réciproque

Si souvent, nous aurons besoin d'inverser les relations $\sin\theta = x$ en $\theta = \sin^{-1}(x)$.
Mais, sin ou cos ne sont pas des fonctions bijectives. Comment faire ?

2. Fonctions trigonométriques

2.1. Construction historique

Analyse - Triangles rectangles semblables

D'après le théorème de Thalès, le rapport des longueurs de deux côtés similaires de deux triangles semblables est constant.
Dans l'ensemble des triangles rectangles, deux triangles sont semblables dès qu'ils ont chacun un angle de même mesure.
Ainsi les rapports de deux côtés consécutifs dans un triangle rectangle ne dépendent que de la mesure d'un angle (non droit).

Ce qui donne une première définition, *non encore totalement satisfaisante* :
Soit θ un angle compris entre 0 et 90 degrés.
Soit ABC un triangle rectangle en A et tel que $\widehat{ABC} = \theta$.
Alors le rapport $\frac{AB}{BC}$ est indépendant du triangle considéré, noté $\cos^\circ\theta$.
De même $\frac{AC}{BC}$ est indépendant du triangle considéré, noté $\sin^\circ\theta$.
Et $\frac{AC}{AB}$ est indépendant du triangle considéré, noté $\tan^\circ\theta$.
La notation choisie ici n'est pas standardisée, et est sûrement contradictoire avec celle vue en fin de collège. Elle permet de différencier de la vraie fonction cosinus (définie avec des angles en radians).

Analyse - Simplification : hypoténuse égale à 1

Pour éviter tout problème de division, on peut se concentrer sur les triangles rectangles dont l'hypothènuse a une longueur unité ($BC = 1$).
Ainsi, pour chaque angle θ compris entre 0 et 90 degrés, il existe un « unique » triangle rectangle en A, tel que $\widehat{BAC} = \theta$ et $BC = 1$. Dans ce cas $\cos^\circ\theta = AB$ et $\sin^\circ\theta = AC$.

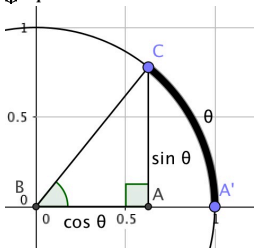
Analyse - Mesure naturelle d'angle

Les cultures (babyloniennes…) choisirent des mesures d'angles différentes. Toutes étaient proportionnelles les unes aux autres, une est-elle plus naturelle que les autres ? Oui !
Après l'étape précédente, nous considérons des triangles rectangles d'hypothènuse de longueur 1. D'une certaine façon, tous ces triangles se trouvent dans le cercle de rayon 1 et centrée en B. L'angle en B est proportionnel à la longueur de la corde CA' (voir dessin).
Ainsi l'angle habituellement (jusqu'en seconde) noté 90ř a une longueur : quart de périmetre de cercle de rayon 1 i.e. $\frac{1}{4}(2\pi\times 1) = \frac{\pi}{2}$. On a la correspondance :

$$\theta^\circ = \frac{180}{\pi}\theta^r \iff \theta^r = \frac{\pi}{180}\theta^\circ$$

Le calcul devient simple : il suffit de mesurer une longueur (avec une corde qu'on superpose, puis qu'on détend).

Représentation - Radian



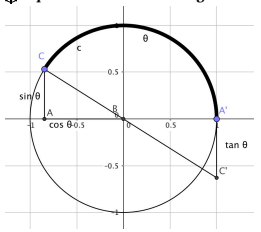
2.2. Fonctions sinus et cosinus

Représentation

D'après ce que l'on a vu, par construction, on retrouve $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sur la figure comme indiqué en marge.
Par définition : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\tan\theta}{1}$.
Donc, par théorème de Thalès, en plaçant la parallèle au sinus dans le triangle prolongé tel que $BA' = 1$, on retrouve le sinus en $A'C'$.

Reste une dernière étape : franchir les angles frontières de 0 et $\frac{\pi}{2}$ radians (ou 0° et 90°). Avec la dernière représentation, ce n'est pas compliqué : on continue la projection sur l'axe BA' et sur l'axe orthogonal.

Représentation - Cercle trigonométrique



Périodicité et symétrie

On a alors les résultats suivants, qu'il faut surtout savoir retrouver :
Exercice
Compléter les résultats suivants :

$\sin(-\theta) =$ $\cos(-\theta) =$ $\sin(\theta+\pi) =$ $\cos(\theta+\pi) =$
$\sin(\pi-\theta) =$ $\cos(\pi-\theta) =$ $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) =$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) =$

Correction

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$ $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$
$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$ $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$ $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$

Avec la définition suivante :

Définition - Congruence modulo α
Soient θ, θ' et α trois réels.
On dit que θ est congru à θ' modulo α
s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + k\alpha$:

$$\theta \equiv \theta'[\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z} \,|\, \theta = \theta' + k\alpha$$

on a la proposition :

Proposition - Propriétés des congruences
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a pour tout $(\theta, \theta', \theta'') \in \mathbb{R}^3$:
- $\theta \equiv \theta[\alpha]$ (reflexivité)
- $\theta \equiv \theta'[\alpha] \Rightarrow \theta' \equiv \theta[\alpha]$ (symétrie)
- $(\theta \equiv \theta'[\alpha]$ et $\theta' \equiv \theta''[\alpha]) \Rightarrow \theta \equiv \theta''[\alpha]$ (transitivité)

On dit que la relation de congruence modulo α est une relation d'équivalence.

Démonstration
Reflexivité : $\theta \equiv \theta[\alpha]$, il suffit de prendre $k = 0$.
Symétrie : Si $\theta \equiv \theta'[\alpha]$, alors il existe k tel que $\theta = \theta' + k\alpha$, donc $\theta' = \theta + (-k)\alpha$ et donc $\theta' \equiv \theta[\alpha]$.
Transitivité : Si $(\theta \equiv \theta'[\alpha]$ et $\theta' \equiv \theta''[\alpha]$
alors il existe k et k' tel que $\theta = \theta' + k\alpha$, $\theta' = \theta'' + k'\alpha$.
donc $\theta = \theta'' + k'\alpha + k\alpha = \theta'' + (k + k')\alpha$, donc $\theta \equiv \theta''[\alpha]$ □

A savoir parfaitement retrouver :

Savoir faire - Cas d'égalité de sinus ou de cosinus
Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\sin\theta = \sin\theta' \iff$$

$$\cos\theta = \cos\theta' \iff$$

Démonstration
En exploitant les représentations graphiques, on se place par 2π-périodicité sur un intervalle simple.
Puis, on trouve : $\sin\theta = \sin\theta' \iff \begin{cases} \theta \equiv & \theta' & [2\pi] \\ \theta \equiv & \pi - \theta' & [2\pi] \end{cases}$
De même : $\cos\theta = \cos\theta' \iff \begin{cases} \theta \equiv & \theta' & [2\pi] \\ \theta \equiv & -\theta' & [2\pi] \end{cases}$ □

2.3. Fonction tangente

Définition - Tangente d'un angle
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On appelle *tangente* de θ le réel, noté $\tan\theta$, défini par :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Remarque - fonction cotangente
On définit de même la fonction cotangente sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ *par* $\operatorname{cotan}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
Sur le cercle trigonométrique, on la trouve sur la tangente au cercle au point $(0, 1)$.
Si $\theta \not\equiv 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$ *on a* $\operatorname{cotan}\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$.

Proposition - (Im)parité et périodicité
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On a

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \tan(\pi + \theta) = \tan\theta \qquad \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$$

Démonstration
On applique, directement la définition, par exemple : $\tan(\theta + \pi) = \dfrac{\sin(\theta+\pi)}{\cos(\theta+\pi)} = \dfrac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$ □

Exercice
Etudier et représenter la fonction tan

Correction
La fonction tan est définie sur $\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos\theta \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$.
La fonction tan est π-périodique d'après la formule trouvée plus haut.
On peut l'étudier sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, puis exploiter des translations de vecteurs $\pi\vec{i}$.
Par division de deux fonctions dérivables, tan est dérivable sur son ensemble de définition.

$$\forall\, x \in \mathscr{D}, \qquad \tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

La fonction tan est donc strictement croissante sur les intervalles de la forme $]\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}[$ et à valeurs dans $]-\infty, \infty[$.
$\tan(0) = 0$ et la pente de la tangente au point 0a pour pente : $\tan'(k\pi) = \dfrac{1}{\cos(k\pi)} = 1$.
Enfin, comme $\dfrac{1}{\cos^2}$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, tan est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $\dfrac{1}{\cos^2}$ est décroissante sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$, tan est concave sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$.
On obtient la représentation graphique suivante :

Proposition - Cas d'égalité de tangentes
Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\tan\theta = \tan\theta' \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[\pi]$$

3. Formules trigonométriques

Nous démontrons la plupart des relations avec des angles inférieurs à $\frac{\pi}{2}$, puis nous étendons les résultats par périodicité/symétrie.

3.1. Formules de Regiomontanus

Très important! A connaître par coeur, absolument! Il peut être bon d'avoir un moyen mnémotechnique auprès de soi…

Histoire - Trigonométrie : une vieille discipline
Ces formules apparaissent pour la première fois chez Ptolémée, 150 après J-C. On les retrouve chez Regiomontanus en 1464

Proposition - Formules fondamentales

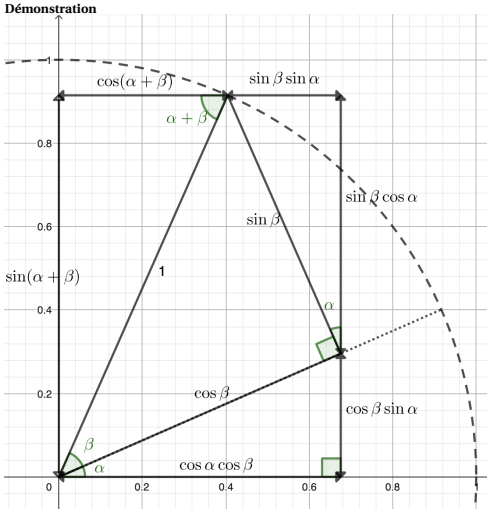
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \text{ où } \cos^2\theta = (\cos\theta)^2$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$

Truc & Astuce pour le calcul - Exploiter les symétries du calcul
Une piste pour retrouver la formule $\cos(a+b)$.
Nous savons qu'il existe une relation, mais laquelle. Notons $\varphi(a,b) = \cos(a+b)$.
La relation doit vérifier :
— $\varphi(b,a) = \varphi(a,b)$, cela ne peut donc pas être $\varphi(a,b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$.

— $\varphi(-a,-b) = \varphi(a,b)$, cela ne peut donc pas être $\varphi(a,b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$.
— $\varphi(a,-a) = \cos(0) = 1$, cela ne peut donc pas être $\varphi(a,b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$, dans ce cas $\varphi(a,-a) = \cos^2 a - \sin^2 a \neq 1$ (pour la plupart des a)

Démonstration



La première formule dérive directement de la relation de Pythagore.
Avec $A(\cos\theta,\sin\theta)$, $M\cos\theta,0)$ et $O(0,0)$, on a OMA est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore : $OA^2 = OM^2 + MA^2$ ie $1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$.
Concernant les formules $\cos(a+b)\ldots$, on pourra trouver une démonstration plus efficace avec les notations exponentielle…
Pour obtenir $\cos(a-b)$, on remplace β par $-b$ et donc $\cos\beta = \cos b$ alors que $\sin\beta = -\sin b\ldots$ □

Exercice
On peut aussi exploiter les équations différentielles.
On note $f : x \mapsto \cos(a+x)$. Montrer que f est solution du problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y'' + y &= 0 \\ y(0) &= \cos a \\ y'(0) &= -\sin(a) \end{cases}.$$
En déduire une expression de f.

Correction
Il suffit de faire le calcul. La solution du problème de Cauchy est unique, c'est une combinaison linéaire de cos et sin.
Donc il existe A et B tel que $\cos(a+x) = A\cos x + B\sin x$.
Puis avec les valeurs en $x = 0$, de f et f', on a $A = \cos a$ et $B = -\sin a$
De cet exercice, on déduit un nouveau moyen mnemotechnique pour retenir les formules de Regiomontanus.

Truc & Astuce pour le calcul - Combinaison linéaire en $\cos x$ et $\sin x$
$x \mapsto \cos(a+x)$ est une fonction, combinaison linéaire de $\cos x$ et $\sin x$.
Il existe A, B **indépendant de** x tel que $\cos(a+x) = A\cos x + B\sin x$.
En particulier pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos a = A\times 1 + B\times 0$ et $\cos(a+\frac{\pi}{2}) = -\sin a = A\times 0 + B\times 1$.
Donc pour tout $a, x \in \mathbb{R}$: $\cos(a+x) = \cos a\cos x - \sin a\sin x$.
$x \mapsto \sin(a+x)$ est une fonction, combinaison linéaire de $\cos x$ et $\sin x$.

Il existe C, D **indépendant de** x tel que $\sin(a+x) = C\cos x + D\sin x$.
En particulier pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$: $\sin a = C\times 1 + D\times 0$ et $\sin(a+\frac{\pi}{2}) = +\cos a = C\times 0 + D\times 1$.
Donc pour tout $a, x \in \mathbb{R}$: $\sin(a+x) = \sin a\cos x + \cos a\sin x$.

Savoir les déduire ou les retrouver.

Proposition - Formules fondamentales (bis)
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$
$$\sin 2a = 2\sin a\cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$
$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

Exercice
Démontrer ces formules

Correction
Quelques unes :
$$\tan(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a\cos b - \cos a\sin b}{\cos a\cos b + \sin a\sin b} = \frac{\frac{\sin a\cos b - \cos a\sin b}{\cos a\cos b}}{\frac{\cos a\cos b + \sin a\sin b}{\cos a\cos b}} = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$
$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 = (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a\ldots$

3.2. Produit en somme et réciproquement

Savoir les déduire ou les retrouver.

Proposition - Transformation de produit en somme
$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$$
$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$$

Exercice
Comment exploiter les symétries du calcul pour « deviner » les égalités

Correction
On note (par exemple) $\varphi(a,b) = \sin a\sin b$. Donc $\varphi(-a,-b) = \varphi(a,b)$, la formule contient des cos (fonctions paires).
$\varphi(a,0) = 0$, donc il y a une soustraction de $\cos(a+b) = \cos a$ et $\cos(a-b) = \cos a$. $\varphi(a,a) = \sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)$ ce qui donne la première formule…

Exercice
Démontrer ces formules

Correction
La démonstration se fait à l'envers. Il faut donc bien intuiter d'où partir. …
Par exemple, pour obtenir $\sin a\sin b$, on se souvient que cela s'obtient avec $\cos(a+b)$.
Donc on note : $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$.
Il faut supprimer les $\cos a\cos b$, on retranche donc :
$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -\sin a\sin b - \sin a\sin b \Longrightarrow \sin a\sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

Exercice
Comment exploiter les symétries du calcul pour « deviner » les égalités

Correction

Remarque - Notation exponentielle
Avec les notations exponentielles, le résultats sera plus immédiat (on pourra le trouver dans

Pour aller plus loin - Trisection de l'angle
Un problème antique consistait à trouver comment couper un angle en trois parts égales.
La réponse de Viète (1593 - incomplète car elle ne donne pas de construction), consiste à remarquer que $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.
Si on connait 3α *et donc* $\sin 3\alpha = S$. *Il s'agit de résoudre :* $4x^3 - 3x + S = 0$.
Or la formule d'Al-Kiwarismi donne pour solution à cette équation :
$$x = \sqrt[3]{-\frac{S}{8} + \sqrt{-\frac{S^2}{64} - \frac{1}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{S}{8} - \sqrt{-\frac{S^2}{64} - \frac{1}{4}}}$$

le sens direct).

Proposition - Transformation de somme en produit

$$\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Exercice
Démontrer ces formules

Correction
Par exemple :

$$\cos p-\cos q=\cos(\tfrac{p+q}{2}+\tfrac{p-q}{2})-\cos(\tfrac{p+q}{2}-\tfrac{p-q}{2})$$
$$=\cos(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2})-\sin(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2})-\cos(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2})-\sin(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2})$$
$$=-2\sin(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2})$$

Attention - Remarque
Il n'y a pas de formule générale pour transformer $\cos p\pm\sin q$.
Sauf à exploiter $\sin q=\cos(\frac{\pi}{2}-q)\dots$

Exemple - Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos kt$

Soit $t\in]0,\pi]$. On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}\cos kt$.

Calculer $2(\sin\frac{t}{2})S_n$ puis déduire S_n (que l'on exprimera comme produit ou quotient de trois termes sinus ou cosinus).

$$2(\sin\tfrac{t}{2})S_n=2\sum_{k=0}^{n}\sin\tfrac{t}{2}\cos(kt)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sin(\tfrac{2k+1}{2}t)+\sin(\tfrac{-2k+1}{2}t)\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sin(\tfrac{2k+1}{2}t)-\sin(\tfrac{2k-1}{2}t)\right)$$

Puis par télescopage :

$$2(\sin\tfrac{t}{2})S_n=\sin(\tfrac{2n+1}{2}t)-\sin(-\tfrac{1}{2}t)=\sin(\tfrac{2n+1}{2}t)+\sin(\tfrac{1}{2}t)=2\sin(\tfrac{2n+2}{4}t)\cos(\tfrac{2n}{4}t)=2\sin(\tfrac{n+1}{2}t)\cos(\tfrac{n}{2}t)$$

Ainsi

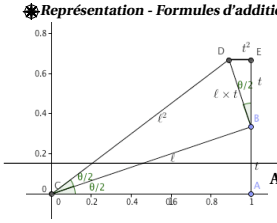
$$S_n=\frac{\cos\frac{n}{2}t\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}$$

3.3. Angle moitié

Proposition - Utilisation de la tangente de l'angle moitié
On note $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$. Alors :

$$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}\qquad\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}\qquad\tan\theta=\frac{2t}{1-t^2}$$

Représentation - Formules d'addition



Remarque - Calcul intégral
Ces résultats servent souvent dans le calcul d'intégrale avec des fonctions trigonométriques

Démonstration
Un graphique nous aide là aussi. Mais on peut directement, faire le calcul après avoir rappeler : $1+t^2=1+\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$:

$$\sin\theta=\sin(2\tfrac{\theta}{2})=2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}=2\tan\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos\theta=\cos(2\tfrac{\theta}{2})=2\cos^2\tfrac{\theta}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

□

Remarque - Trucs pour ne pas écrire de bêtises…
On peut vérifier que si $\theta=0$: $t=0$, $\sin\theta=0$,
mais aussi $\cos\theta=1$ et $\sin^2+\cos^2=1$,
ou encore, si $\theta=\frac{\pi}{2}$, $t=1$ et $\tan\theta=\infty\dots$, donc le dénominateur de $\tan$ s'annule en 1 et -1.
ou toujours, $\tan=\frac{\sin}{\cos}\dots$

Exercice
Exemple d'emploi des notations exponentielles.
Notons α l'argument du complexe $z=1+it$.
Calculer z^2, quel est l'argument du complexe z^2 ? En déduire les relations recherchées ?
Sauriez-vous en déduire l'expression de $\cos\theta$ en fonction de $r=\tan\frac{\theta}{3}$?

Correction
$z^2=(1-t^2)+2it$, c'est le complexe de module $\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2}=\sqrt{1+2t^2+t^4}=(1+t^2)$ et d'argument 2α.
Donc $\cos(2\alpha)=\frac{\mathrm{Re}(z^2)}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(2\alpha)=\frac{\mathrm{Im}(z^2)}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$.
De même $z^3=[1-3t^2]+i[3t-t^3]$, de module $\sqrt{(1-3t^2)^2+(3t-t^3)^2}=\sqrt{1+3t^2+3t^4+t^6}=(1+t^2)^{3/2}$ et d'argument 3α.
Donc $\cos(3\alpha)=\frac{1-3t^2}{(1+t^2)^{3/2}}$ et $\sin(3\alpha)=\frac{3t-t^3}{(1+t^2)^{3/2}}\dots$

Savoir faire - Méthode pour transformer $a\cos t+b\sin t$ en $A\cos(t-\phi)$
On écrit

$$a\cos t+b\sin t=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)$$

Comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, il existe $\phi\in\mathbb{R}$ tel que

$$\cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\text{ et }\sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

d'où en posant $A=\sqrt{a^2+b^2}$, on a

$$a\cos t+b\sin t=A\left(\cos\phi\cos t+\sin\phi\sin t\right)=A\cos(t-\phi).$$

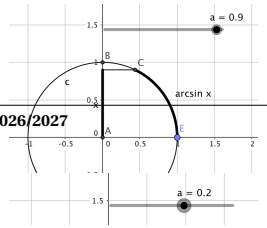
La fonction $s:t\mapsto a\cos t+b\sin t$ représente donc un signal sinusoïdal d'amplitude A de phase initiale $-\phi$(instant $t=0$) .

Exercice
Factoriser $\sin\theta+\cos\theta$, $\sqrt{3}\cos x-\sin x$.

Correction
$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\sin\theta\sin\frac{\pi}{4}+\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$.
Comme $\sqrt{3}^2+1=4=2^2$, on a,

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\left(\sqrt{32}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{-\pi}{6}\cos x+\sin\frac{-\pi}{6}\sin x\right)=2\cos(x+\frac{\pi}{6})$$

Représentation - Quelques valeurs de $\arcsin x$



4. Trigonométrie réciproque

4.1. Arcsinus

Définition - Arcsinus
Pour tout $x \in [-1,1]$ il existe un unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $x = \sin\theta$. Ce réel θ est appelé arcsinus de x et noté $\arcsin x$ On a donc :

$$\theta = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin\theta = x \text{ et } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right)$$

Attention - Intervalle d'arrivée
De même qu'il a été choisi de prendre l'unique racine positive de a, lorsqu'on écrit $\sqrt{a}$ (et non $-\sqrt{a}$ qui vérifie également $(-\sqrt{a})^2 = a$) ; on choisit ici un résultat dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, il faut donc penser à ajouter un angle…

$$\sin\theta = x \Longleftrightarrow \theta \equiv \arcsin(x)[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \pi - \arcsin(x)[2\pi]$$

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$					

Exercice
Calculer $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3}), \arcsin(\sin\frac{23\pi}{6})$.

Correction
Où est le piège ? dans l'intervalle d'arrivée.
Comme $\frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3}) = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. De même $\frac{23\pi}{6} = 4\pi - \frac{\pi}{6}$, $\arcsin(\sin\frac{23\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6}$

Histoire - Série arcsin
On trouve chez Wallis et les mathématiciens anglais pré-newtonien :
$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times3}{2\times4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\frac{x^7}{7} + \ldots$

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et arcsin
On a :

$$\forall\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \arcsin(\sin\theta) = \theta$$
$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arcsin x) = x$$
$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

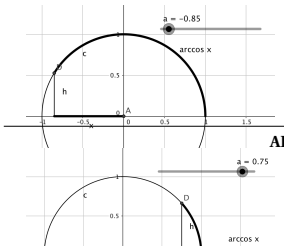
Démonstration
Les deux premiers résultats s'obtiennent en appliquant tout simplement la définition.
Comme $\cos^2 = 1 - \sin^2$, on a donc pour $x \in [-1,1]$,

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$$

donc $\cos(\arcsin(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
Or $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $\cos(\arcsin(x)) \geqslant 0$ et donc $\cos(\arcsin(x)) = +\sqrt{1-x^2}$ □

4.2. Arccosinus

Représentation - Quelques valeurs de arccos x



Définition - Arccosinus
Pour tout $x \in [-1,1]$ il existe un unique $\theta \in [0,\pi]$ vérifiant $x = \cos\theta$. Ce réel θ est appelé arccosinus de x et noté $\arccos x$ On a donc :

$$\theta = \arccos x \Leftrightarrow \left(\cos\theta = x \text{ et } \theta \in [0,\pi]\right)$$

Attention - Intervalle d'arrivée
Comme précédemment :

$$\cos\theta = x \Longleftrightarrow \theta \equiv \arccos(x)[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\arccos(x)[2\pi]$$

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$					

Exercice
Calculer $\arccos(\cos\frac{4\pi}{3}), \arccos(\cos\frac{25\pi}{6})$.

Correction
Comme $\frac{4\pi}{3} \in]\pi, 2\pi[$, $\arccos(\cos\frac{2\pi}{3}) = -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$. De même $\frac{25\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6}$, $\arccos(\cos\frac{25\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et arccos
On a :

$$\forall\theta \in [0,\pi], \quad \arccos(\cos\theta) = \theta$$
$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos x) = x$$
$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

Exercice
Faire la démonstration

Correction
Comme $\sin^2 = 1 - \cos^2$, on a donc pour $x \in [-1,1]$,

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$$

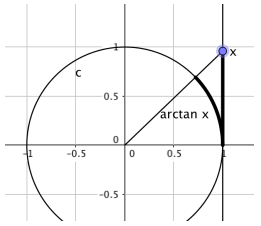
donc $\sin(\arccos(x)) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
Or $\arccos(x) \in [0,\pi]$, donc $\sin(\arccos(x)) \geqslant 0$ et donc $\sin(\arccos(x)) = +\sqrt{1-x^2}$

4.3. Arctangente

Définition - Arctangente
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant $x = \tan\theta$. Ce réel θ est appelé arctangente de x et noté $\arctan x$ On a donc :

$$\theta = \arctan x \Leftrightarrow \left(\tan\theta = x \text{ et } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$$

Représentation - Quelques valeurs de arctan x



Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$				

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et arctan
On a :

$$\forall\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan\theta) = \theta$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Histoire - Série arctan
On trouve chez Gregory et les mathématiciens anglais pré-newtonien :
$\arcsin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$.
Puis, avec, une formule d'approximation de π *:*
$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Démonstration
On exploite $\cos^2 = \frac{1}{1+\tan^2}$, puis la positivité.
Et $\sin^2 = 1-\cos^2 = 1-\frac{1}{1+\tan^2} = \frac{\tan^2}{1+\tan^2}\ldots$ □

Proposition - Relation complexe
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1+ix) = \arctan(x)$

Pour aller plus loin - Formule d'approximation de π : Formule de Machin (1706)
$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \cdots = \arg\left((1+\frac{i}{5})^4(1-\frac{i}{239})\right) = \arg(\frac{114244}{149375}(1+i)) = \frac{\pi}{4}$.
Comme $\arctan(x) \approx x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + \ldots$, *on trouve une excellente approximation de* π.
Cette formule donna la meilleure approximation de π *connue durant tout le XVIII ième siècle.*

Démonstration
Soit $z = 1+ix$, note $\rho = \sqrt{1+x^2}$ son module et θ sont argument.

$$z = 1+ix = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Donc a donc $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta} = \frac{x}{1} = x$.
Ainsi $\arctan x = \theta = \arg(1+ix)$. □

Remarque - Aspect analytique
On étudiera dans un prochain chapitre les aspects analytiques de ces fonctions (dérivées, développement limités...)

5. Bilan

Synthèse

- ⇝ En géométrie (et physique), nous pratiquons la projection orthogonale, cela consiste à multiplier par $\cos\theta$ (ou $\sin\theta$) la longueur de l'hypoténuse. Différents calculs se présentent à nous : $\cos(a+b)$, $\cos(a)\cos(b)$ ou $\cos a + \cos b$ (et tout ce que l'on peut imaginer de manière équivalente avec sin ou tan). Il existe alors de nombreuses relations calculatoires **à apprendre**!
- ⇝ Très souvent la question se pose de manière réciproque : étant donné une longueur de quel angle en est-elle le cos? Le problème, la fonction n'est pas injective : on peut avoir $\theta \neq \theta'$ et $\cos\theta = \cos\theta'$. On restreint donc l'intervalle image. On crée ainsi une fonction réciproque $\arccos$ à la fonction $\cos_{|[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$. De même pour les fonctions $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ et $\tan_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. Au passage, on trouve une méthode complémentaire (algébrique) dans le simple cas de la racine carrée d'un nombre complexe.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- — Savoir-faire - Cas d'égalité de sinus ou de cosinus
- — Truc & Astuce pour le calcul - Exploiter les symétries du calcul
- — Truc & Astuce pour le calcul - Combinaison linéaire en $\cos x$ et $\sin x$
- — Savoir-faire - Méthode pour transformer $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
cos, sin, tan	Fonctions cosinus, sinus et tangentes.	Dans un triangle ABC rectangle en A, $\cos B = \frac{AB}{BC}$, $\sin B = \frac{AC}{BC}$ et $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{\cos B}{\sin B}$	Tout un chapitre à connaître!
arccos, arcsin, arctan	Fonctions réciproques de $\cos_{|[0,\pi]}^{|[-1,1]}$, $\sin_{|[-\pi/2,\pi/2]}^{|[-1,1]}$, $\tan_{|[-\pi/2,\pi/2]}^{|[-1,1]}$ respectivement.	$\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout $x \in [-1,1]$	A savoir maîtriser

Retour sur les problèmes

16. Voir le cours
17. Les formules d'additions de cos et sin restent vraies si les angles sont en degré.
    Pourquoi changer d'unité au lycée?
    L'inégalité $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ est vraie pour x en radian. Pour x en degré, on aurait plutôt : $\sin x \leqslant \frac{\pi}{180}x \leqslant \tan x$.
    On trouve alors, en radian : $\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ en faisant $x \to 0$: on trouve $\sin'(x) = 1$, puis avec les formules d'addition : $\sin' = -\cos$.
    Si les angles sont en degré : il faut un coefficient multiplicatif. C'est donc une relation pénible.
    Bilan : si on passe en radian, c'est parce qu'on s'intéresse à propriétés analytiques des fonctions trigonométriques...
18. A apprendre. Mais l'apprendre, c'est toujours plus compliqué.
19. $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^n) = \mathrm{Re}((\cos\theta+i\sin\theta)^n) = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}} \binom{n}{2k}(-1)^k\cos^{n-2k}\theta(1-\cos^2\theta)^k = T_n(\cos\theta)$
20. arcsin et arccos...

Chapitre 4

Ensemble des nombres complexes

Résumé -

Dans ce chapitre, nous reprenons des résultats de lycée sur les nombres complexes et leur lien avec la géométrie du plan. Ce sont des bons outils pour reprendre les propriétés trigonométriques!
Comme, ces nombres ont été inventés/découverts pour résoudre tout type d'équation polynomiale, il est normal que ce chapitre soit associé à la recherche des solutions de $x^n = 1$, i.e. la recherche des racines de l'unité.
Puis nous nous intéressons aux transformations géométriques du plan. Lorsque l'espace géométrique étudié est de dimension 2 (plan $\mathbb{R}^2$), les nombres complexes sont de parfaits outils pour faire cette étude. En effet, ces nombres ont un lien fort avec la géométrie (revue au chapitre suivant) : addition de complexes = translation et multiplication de complexes = homothétie et rotation (similitude)...

- *Micmath - La conjugaison complexe est un automorphisme de corps. https ://www.youtube.com/watch ?v=AVDMpnwsztg*
- *Les maths en finesse - Racines nieme de l'unité. https ://www.youtube.com/watch ?v=aZLGdnktO8k*
- *Exo7Math - Nombres complexes part.4 : géométrie .https ://www.youtube.com/watch ?v=ej9zpQYsQs8*
- *AEV - Nombres complexes / Applications à la géométrie. https ://www.youtube.com/watch ?v=HfxqAQ1SiGo*

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 18 - Multiplication de nombres

Que représente la multiplication complexe $Z = z \times z'$ pour des points $M(z)$ et $M'(z')$.
En particulier, existe-t-il un algorithme géométrique pour tracer cette multiplication?
On pourra dans un premier temps, considérer que $z \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{U}$

? Problème 19 - Théorème de Napoléon

En exploitant les nombres complexes, démontrer le théorème de Napoléon :
Si nous construisons trois triangles équilatéraux à partir des côtés d'un triangle quelconque, tous à l'extérieur ou tous à l'intérieur, les centres de ces triangles équilatéraux forment eux-mêmes un triangle équilatéral.
Beaucoup de problèmes (théorème de Ptolémée, théorème de Cotes...), du plan se démontre par *calculs* avec des nombres complexes.

? Problème 20 - Transformation du plan

A l'aide des nombres complexes, comment trouver toutes les transformations du plan qui conserve les longueurs et/ou les angles?

? Problème 21 - Application en physique

On connait beaucoup d'applications en physique des nombres complexes (notés j), en particulier en électricité ou pour l'étude de Fourier.
La loi de Snell-Descartes donne pour la réfraction entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 : $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$.
Lorsque $n_1 > n_2$ et θ_1 proche de 0 (donc $\sin\theta_1$ proche de 1), on trouve $\sin\theta_2 = \dfrac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 > 1$, et donc $\cos\theta_2 \in \mathbb{C}$.
Avec ce nombre complexe, Augustin FRESNEL unifiait en une seule formule ce qui se présentait jusqu'alors sous deux formes. Quelle est cette formule?

2. EULER : manipulateur des nombres du diable

2.1. Racine de polynômes

Histoire - Citation
« Au reste tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas tousiours reelles ; mais quelques seulement imaginaires ; c'est à dire qu'on peut bien touiours en imaginer autant que iay dit en chasque Equation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine. » Descartes (1637)

Analyse - Problème de Cardan (1545)
Un segment de longueur 10 est coupé en deux parties de longueur a et b. De quelle manière le faire, de sorte que l'aire du rectangle dont chaque côté vaut a et b puisse valoir 40?
On a les équations $a+b=10$ et $a\times b = 40$, donc $a^2 - 10a = a(a-10) = a\times b = 40$.
Les racines de cette équation $x^2 - 10x - 40 = 0$ est $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$.
Evidemment cela est problématique (racine d'un nombre négatif) sauf que
- $(5+\sqrt{-15}) + (5-\sqrt{-15}) = 10$
- $(5+\sqrt{-15}) \times (5-\sqrt{-15}) = 5^2 - (-15) = 25+15 = 40$

La solution fonctionne avec ces nouveaux nombres, à condition de garder les même règles de calcul qu'avec les nombres classiques...
Les règles de calcul sont donnés par Raphaël Bombelli (1572), dans son algebra. Pendant deux siècles les mathématiciens se querellent quant à leur existence et à leurs emplois.
Exercice
On reprend un exercice historique de Bombelli.
En reprenant les règles classiques de calcul, évaluer $(2+\sqrt{-1})^3$.
En employant les formules de Cardan, trouver les racines de $x^3 = 15x+4$.

Correction
Binôme de Newton : $(2+\sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3\sqrt{-1}\times 2^2 + 3(\sqrt{-1})^2 \times 2 + (\sqrt{-1})^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$.

2.2. Calcul algébrique

Euler invente la notation i bien pratique et les manipule avec précision. Il écrit à Diderot : « $e^{i\pi} = -1$ donc Dieu existe ».

Remarque - Unicité
Un complexe est un « nombre » z qui s'écrit $z = a+ib$ où a et b sont des réels et i vérifie $i^2 = -1$. Cette écriture est unique et s'appelle la forme algébrique de z.

Comme la construction de $\mathbb{C}$ n'est pas donnée, il n'est pas possible de démontrer l'unicité de l'écriture de z, ni la justification des règles de calcul. Nous les admettons alors. Ce n'est pas rien...

Pour aller plus loin - Construction de $\mathbb{C}$
Rassurons nous : nous construirons bien $\mathbb{C}$ par la suite, selon la méthode proposée par Cauchy (avec des classes d'équivalence).

Définition - Notation de nombre complexe (1748)
Soit $z = a+ib$ un complexe (a et b sont des réels).
$a = \mathrm{Re}\, z$ s'appelle la **partie réelle** de z.
$b = \mathrm{Im}\, z$ s'appelle la **partie imaginaire** de z ;
z est dit **imaginaire pur** *($z \in i\mathbb{R}$) si sa partie réelle est nulle.*
$\overline{z} = a - ib$ s'appelle le **conjugué** de $z = a+ib$.
$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ s'appelle le **module** de z.

Notons tout de suite comment se comportent les calculs habituelles addition et multiplication sur $\mathbb{C}$ (il s'agit presque de définition ici...)

Définition - (et proposition?) $\mathbb{C}$ est un corps
Pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$,
- $\mathrm{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathrm{Re}(z) + \lambda' \mathrm{Re}(z')$ (*la partie réelle est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$*)
- $\mathrm{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathrm{Im}(z) + \lambda' \mathrm{Im}(z')$ (*la partie imaginaire est $\mathbb{R}$-linéaire sur $\mathbb{C}$*)
- si $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$, alors $z\times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
  En particulier $z\times\overline{z} = a^2+b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$, donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Exercice
En déduire que $\mathbb{C}$ est commutatif

Correction
Sur $\mathbb{R}$: $+$ est commutatif donc $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') = \mathrm{Re}(z') + \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z'+z)$.
De même $\mathrm{Im}(z+z') = \cdots = \mathrm{Im}(z'+z)$, donc $z+z' = z'+z$.
Sur $\mathbb{R}$: $+$ et $\times$ sont commutatifs, en gardant les mêmes notations :

$$z\times z' = (aa'-bb') + i(ab'+a'b) = (a'a - b'b) + i(a'b + ab') = z'\times z$$

Remarque - Importance du conjugué
Le fait que $z\overline{z}$ est un nombre réel (pur) explique l'importance de la notion de conjugué.

Démonstration
Comme
$$\lambda z + \lambda' z' = (\lambda a + i\lambda b) + (\lambda' a' + i\lambda' b') = (\lambda a + \lambda' a') + i(\lambda b + \lambda' b')$$
Donc
$$\mathrm{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathrm{Re}(z) + \lambda' \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathrm{Im}(z) + \lambda' \mathrm{Im}(z')$$
Puis :
$$z \times z' = (a+ib) \times (a'+ib') = (aa' + iab' + iba' + i^2 bb' = (aa' + bb') + i(ab' + a'b)$$
□

On a alors

Proposition - Conjugaison
On a les propriétés du conjugué :
$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall a \in \mathbb{R}, \quad \overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$
$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$
$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

Démonstration
Supposons que $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$. Alors
$$\overline{\overline{z}} = \overline{a-ib} = a+ib = z$$
$$\overline{z+z'} = \overline{(a+ib)+(a'+ib')} = \overline{(a+a')+i(b+b')} = (a+a') - i(b+b') = (a-ib) + (a'-ib') = \overline{z} + \overline{z'}$$
$$\overline{z \times z'} = \overline{(a+ib) \times (a'+ib')} = \overline{(aa'-bb') + i(ab'+a'b)} = (aa'-bb') - i(ab'+a'b) = (a-ib) \times (a'-ib') = \overline{z} \times \overline{z'}$$
$$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{|z|^2}\overline{\overline{z}} = \frac{1}{|\overline{z}|^2}\overline{\overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}}\left(= \frac{z}{|z|^2}\right)$$
$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{2a+i0}{2} = a = \mathrm{Re}(z) \qquad \frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{0+2ib}{2i} = b = \mathrm{Im}(z)$$
□

Proposition - Puissance et conjugaison
On définit les puissances d'un nombre complexe par
$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z^{n+1} = z^n z \end{cases}$$
On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$.
Pour $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = (z^n)^{-1}$, on a alors $\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Exercice
Faire la démonstration

Correction
Il faut faire une récurrence

Exercice
Démontrer la formule de Moivre (1707) : $(\cos a + i \sin a)^n = \cos(na) + i\sin(na)$.
(Il est compliqué de comprendre comment il a cette idée, au. hasard ?)

Correction
On le fait par récurrence.
Pour $n = 0$, on a bien $(\cos a + i\sin a)^0 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$.
Supposons que le résultat est vrai au rang n quelconque.
$(\cos a + i\sin a)^{n+1} = (\cos(na) + i\sin(na))(\cos a + i\sin a) = (\cos(na)\cos a - \sin(na)\sin a) + i(\cos(na)\sin a + \sin(na)\cos a)) = \cos((n+1)a) + i\sin((n+1)a)$

Proposition - Propriétés du module
On a les propriétés du module :
$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, a \in \mathbb{R}_+, \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}} \qquad |az| = a|z| \qquad |zz'| = |z||z'|$$
$$|z| = |\overline{z}| = |-z| \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \ (\text{si } z' \neq 0)$$

Démonstration
Les deux premiers résultats ont été démontrés. Puis
$$|zz'| = \sqrt{(zz')\overline{(zz')}} = \sqrt{zz'\overline{z}\overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} = |z||z'|$$
$$|z| = \left|z' \times \frac{z}{z'}\right| = |z'| \times \left|\frac{z}{z'}\right|$$
Il ne reste plus qu'à diviser par $|z'|$. □

Remarque - Valeur absolue et module
Pour un réel, valeur absolue et module coïncident !

2.3. Représentation graphique (addition et longueur)

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Le point M de coordonnées (a,b), caractérisé par $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, peut alors être représenté par le complexe $z = a + ib$.

Définition - Affixe d'un point. Affixe d'un vecteur
$z = a+ib$ est alors appelé **affixe** du point $M(a,b)$, on peut noter $z = \mathrm{Aff}(M)$.
Réciproquement, le point M est appelé (point) image de z.
De même, si $\overrightarrow{w}$ est un vecteur de coordonnées (a,b), $a+ib$ est appelé affixe de $\overrightarrow{w}$ (noté $\mathrm{Aff}(\overrightarrow{w})$), lui-même appelé (vecteur) image du complexe $a+ib$.

Remarque - Axes
Les points de l'axe des abscisses correspondent aux points d'affixe réelle.
Les points de l'axe des ordonnés correspondent aux points d'affixe imaginaire pure.

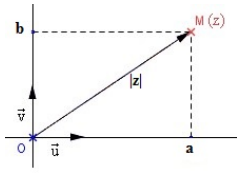
Proposition - Opération complexe et correspondance sur le plan géométrique
Si z est l'affixe de M alors $\overline{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
Si $z = \mathrm{Aff}(M)$ alors $|z|$ est égal à la distance OM.
Si $z = \mathrm{Aff}(M)$ et $z_0 = \mathrm{Aff}(M_0)$, alors $\mathrm{Aff}(\overrightarrow{M_0M}) = z - z_0$ et $|z - z_0| = M_0M$

Histoire - John WALLIS (1616-1703)

Il semble que John Wallis ait imaginé représenter les nombres complexes dans un plan.
Certainement, avait-il compris comment additionner les nombres complexes ; mais l'essentiel : il n'avait pas compris le rôle géométrique de la multiplication.
Wallis est par ailleurs un grand manipulateur de l'infini.

2.4. Inégalités

Théorème - Inégalités
Pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a les inégalités suivantes :
$$\mathrm{Re}\, z \leqslant |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in \mathbb{R}^+$$
$$\mathrm{Im}\, z \leqslant |z| \text{ avec égalité si et seulement si } z \in i\mathbb{R}^+$$
$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z+z'| \leqslant |z| + |z'| \ \textbf{(Inégalité triangulaire)}$$
avec égalité dans l'inégalité de droite
si et seulement si $z' = 0$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ $(z, z'$

Représentation - Affixe d'un point (ou d'un vecteur)


positivement liés).

⚠ Attention - Module ou valeur absolue?
Il y a des modules et des valeurs absolues partout ici

Analyse - Interprétation de l'inégalité triangulaire
Si A, B, C sont trois points tels que $z = \text{Aff}(\overrightarrow{AB})$ et $z' = \text{Aff}(\overrightarrow{BC})$, alors

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'| \text{ avec égalité si et seulement si } z, z' \text{ positivement liés}$$

signifie que $AC \leqslant AB + BC$ avec égalité si et seulement si A, B, C sont alignés et B entre A et C.

Démonstration
Avec les notations habituelles,

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \geqslant a^2 \Longrightarrow |z| \geqslant |a| = |\text{Re}(z)|$$

Il y a égalité si et seulement si $b = 0$, i.e. $\text{Im}(z) = 0$.
Pour l'inégalité triangulaire, réécrivons les calculs (au carrés) pour mieux voir comment comparer :

$$|z+z'|^2 = (a+a')^2 + (b+b')^2 = a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2 + 2aa' + 2bb' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\text{Re}(z\overline{z'})$$

$$(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\overline{z'}|$$

Or comme on a vu que $|z\overline{z'}| \geqslant \text{Re}(z\overline{z'})$, on a l'égalité attendue ;
la condition équivalente à l'égalité est $\text{Im}(z\overline{z'}) = 0$ et $\text{Re}(z\overline{z'}) > 0$
i.e. $ab' - a'b = 0$ et $aa' + bb' > 0$ i.e. $z' = \lambda z$ avec $\lambda = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} > 0$
Enfin, en supposant $|z| \geqslant |z'|$, en considérant $Z = z + z'$ et $Z' = -z'$, on a

$$|z| = |Z + Z'| \leqslant |Z| + |Z'| = |z + z'| + |z'| \quad \Longrightarrow \quad \Big||z| - |z'|\Big| = |z| - |z'| \leqslant |z + z'|$$

□

Par récurrence :

Proposition - Inégalités
Pour n complexes $z_1, \ldots, z_n$ on a

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|.$$

Démonstration
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$: « $\forall\, z_1, \ldots z_n \in \mathbb{C}, |z_1 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|$ ».
— Le résultat est vrai pour $n = 1$ (et démontré pour $n = 2$).
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Soient $z_1, \ldots z_n, z_{n+1} \in \mathbb{C}$. Alors d'après l'inégalité triangulaire avec $Z \leftarrow z_1 + \cdots + z_n$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = |Z + z_{n+1}| \leqslant |Z| + |z_{n+1}| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}|$$

d'après la relation $\mathscr{P}_n$. Et ainsi $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
□

Voici un dernier énoncé qui découle de tout ce que l'on a déjà démontré.

Proposition - Caractérisation des complexes remarquables
$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow \text{Re}\, z = \text{Im}\, z = 0$
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}\, z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = z \Leftrightarrow |z|^2 = (\text{Re}\, z)^2$
$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}\, z = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = -z \Leftrightarrow |z|^2 = (\text{Im}\, z)^2$

3. Le visionnaire : GAUSS et la multiplication complexe

3.1. Les complexes de module 1

En 1800, les mathématiciens manipulent les nombres complexes, mais ces nombres manquent de légitimité.
C'est Gauss qui les justifie géométriquement sur $\mathbb{R}^2$ (Argand et Wessel semblent, chacun de leur côté, avoir eu la même idée).

Le groupe unitaire $\mathbb{U}$

Définition - Groupe unitaire
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, c'est aussi le cercle unité de $\mathbb{C}$, ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Proposition - Conjugaison sur $\mathbb{U}$
$\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2,\ zz' \in \mathbb{U}, \qquad \forall z \in \mathbb{U},\ \overline{z} = \dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}.$
On dit que l'ensemble $\mathbb{U}$ muni de l'opération multiplication est un groupe commutatif.

Démonstration
$|zz'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$, donc $zz' \in \mathbb{U}$.
On a vu $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \overline{z}$ car $|z| = 1$. □

Interprétation géométrique du calcul $u \times z$ pour $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}$

Analyse - Géométrique
Soit $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C}$. Considérons les 4 points du plan $A(1)$, $B(u) \neq A$, $C(z)$ et $D(u \times z)$.
Alors $AC = |z - 1|$ et $BD = |uz - u| = |u| \times |z - 1| = AC$.
On a vu (raisonnement analyse-synthèse) alors que :
si (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, il existe une unique rotation r du plan tel que $r(A) = B$ et $r(C) = D$.
C'est la rotation dont le centre Ω est à l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[CD]$ et d'angle $\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}$. Or $OA = OB = 1$ et $OC = |z| = |u||z| = |uz| = OD$. Donc O est à l'intersection des médiatrices, par unicité de ce point : $O = \Omega$.
Ainsi, $r(C) = D$, où r est la rotation de centre $O(0)$ et d'angle $\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}$.
On montrera plus loin que $(AB)//(CD) \Longleftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
Or dans ce cas, on peut appliquer directement le théorème de Thalès : pour les triangles OAB et OCD semblables.
On retrouve donc le résultat précédent.

Définition - Argument de $u \in \mathbb{U}$, de $z \in \mathbb{C}$
Soit $u \in \mathbb{U}$. On note I, le point du plan d'affixe 1 et M celui d'affixe u.
On appelle argument de $u \in \mathbb{U}$ noté $\text{Arg}(u)$, l'angle (principal) $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \in\ ]-\pi, \pi]$.
Dans un premier temps, on note $\measuredangle\theta$ ce nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
On a alors $u = \cos\theta + i\sin\theta$, pour $\theta = \text{Arg}(u)$.

Remarque - Angle aigu
Le résultat se conçoit bien pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, mais il reste vrai pour toute mesure d'angle (dans $\mathbb{R}$), par propriété de parité (cos), imparité (sin) et 2π-périodicité.

Démonstration
Si on note X, le point d'affixe $\mathrm{Re}(u)$, alors le triangle OXM est rectangle en X.
Son hypothénuse a une longueur égale à $OM = |u| = 1$, donc comme $\theta \equiv (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$,
on a $OX = \cos\theta = \mathrm{Re}(u)$ et $XM = \sin\theta = \mathrm{Im}(u)$.
Ainsi $u = \cos\theta + i\sin\theta$. □

Pour aller plu
lié à la relatio
Nous allons essay
lorsqu'on aura pr
relations d'équivale

Proposition - Multiplication par $u \in \mathbb{U}$
Soit $z \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$.
Notons $\theta = \arg(u)$.
Alors $u \times z$ est l'affixe du point obtenu par rotation de centre 0 et d'angle θ, à partir du point d'affixe z

La démonstration a été faite plus haut (dans l'analyse).

Attention - Mauvaise définition de l'argument…
La définition donnée ici est peu satisfaisante; avec un argument principal, on n'a pas nécessairement $\mathrm{Arg}zz' = \mathrm{Arg}z + \mathrm{Arg}z'$, mais seulement des congruences.

3.2. Notation exponentielle

Argument ou argument (classe d'équivalence)

Corollaire - Propriété de $\angle\cdot$
Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\angle\theta \times \angle\theta' = \angle(\theta + \theta')$

Démonstration
$\angle\theta \times \angle\theta'$ est l'affixe du point M' obtenu à partir de M d'affixe $\angle\theta'$ par rotation d'angle θ.
Il s'agit donc du point de $\mathbb{U}$ d'argument $\theta + \theta'$.
A noter qu'on peut « dépasser » π… □

Analyse - Non injectivité
Mais pour revenir à la question de l'argument, i.e. de $z = \angle\theta$ à $\theta = \mathrm{Arg}z$, on a un soucis de non bijectivité (en fait de non injectivité) de $\angle$: $\angle\theta = \angle\theta' \not\Rightarrow \theta = \theta'$.
On doit considérer la classe d'équivalences de θ :

$$\overline{\theta} = \{\alpha \mid \exists\, k \in \mathbb{Z}, \alpha = \theta + 2k\pi\}$$

Notons donc $\theta \equiv \theta'[2\pi]$ pour exprimer : $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta' - \theta = 2k\pi$.

Définition - et Propriété. Argument de z
Pour tout $z \in \mathbb{U}$, on note $\arg z = \{\mathrm{Arg}z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on le considère *comme* un nombre.
Pour $z, z' \in \mathbb{U}$: $\arg(z \times z') = \arg z + \arg z'$ ou (de manière équivalente) : $\mathrm{Arg}(z \times z') \equiv \mathrm{Arg}z + \mathrm{Arg}z'\ [2\pi]$.

Démonstration
Notons $\theta = \mathrm{Arg}z$ et $\theta' = \mathrm{Arg}z'$. On a $\theta, \theta' \in]-\pi, \pi]$, donc $\theta + \theta' \in]-2\pi, 2\pi]$
Alors $zz' = \angle\theta \times \angle\theta' = \angle(\theta + \theta')$.
• Si $\theta + \theta' \in]-\pi, \pi]$, alors $\mathrm{Arg}zz' = \theta + \theta'$ *prime* $= \mathrm{Arg}z + \mathrm{Arg}z'$.
• Si $\theta + \theta' \in]\pi, 2\pi]$, alors $\theta + \theta' - 2\pi \in]-\pi, 0] \subset]-\pi, \pi]$ et $\mathrm{Arg}zz' = \theta + \theta' - 2\pi$.
• Si $\theta + \theta' \in]-2\pi, -\pi]$, alors $\theta + \theta' + 2\pi \in [0, \pi] \subset]-\pi, \pi]$ et $\mathrm{Arg}zz' = \theta + \theta' + 2\pi$.
Par conséquent, dans tous les cas : $\mathrm{Arg}zz' \equiv \mathrm{Arg}z + \mathrm{Arg}z'[2\pi]$. □

Notation d'Euler

Définition - Notation d'Euler
Nous verrons que dans le cas réel, on appelle exponentielle les fonctions qui vérifient $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.
Elles s'écrivent (dans le cas réel) sous la forme $x \mapsto A^x$ où $A = f(1)$.
Par uniformité de notation, suivant L. Euler, on notera maintenant $e^{i\theta} = \angle\theta = \cos\theta + i\sin\theta$

Pour aller plus loin - Une vraie démonstration
Euler a bien démontré cette démonstration; il ne s'agit pas d'une simple notation. Il faut donc voir qu'ici, :
— *il s'agit bien du nombre $e = 2{,}718281\ldots$*
— *il s'agit bien d'une puissance complexe*

On a alors, plus globalement :

Théorème - Propriétés
Soient $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'} \qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$
$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i\pi} = -1$$
$$e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \qquad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi]$$

Démonstration
On a alors $1 = e^{i0} = e^{i(\theta-\theta)} = e^{i\theta}e^{-i\theta}$, donc $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}$, car $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.
Le reste s'obtient facilement… □

Histoire - D'où vient la notation e ?
Ce n'est pas le e d'exponentielle, mais bien le e du suisse Leonard Euler
La formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ a été obtenue à partir du développement sous forme infinie de exp, cos *et* sin *(chapitre précédent), mais Euler n'a pas compris les propriétés géométriques du produit de complexes.*

Corollaire - Formule d'additions trigonométriques
Soient $a, b \in \mathbb{R}$,
$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

Démonstration
$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$
$= (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b)$
Reste à identifier les parties réelles et imaginaires. □

Exercice
En déduire les formules donnant $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.

Correction
Par parité de cos et imparité de sin, en faisant $b \mapsto -b$:
$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

3.3. Formules d'Euler et de de Moivre

Formules

Proposition - Formules d'Euler

$$\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exercice

Calculer $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, en déduire une expression de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.
On exploitera ces résultats plus tard.

Correction

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$, donc

$$e^{i\frac{7\pi}{12}}=e^{i\frac{1}{3}\pi+i\frac{1}{4}\pi}=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\times(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$
$$=(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\times(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Donc : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Proposition - Formule de Moivre
$\forall\, n\in\mathbb{Z},\ (e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$
$\forall\, n\in\mathbb{Z},\ (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

Démonstration
Par récurrence. On note pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$: « $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$ ».
— $(e^{i\theta})^0=1=e^{i0\theta}$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
— Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
On a donc $(e^{i\theta})^{n+1}=(e^{i\theta})^n\times e^{i\theta}=e^{in\theta}e^{i\theta}$ d'après $\mathscr{P}_n$.
puis $e^{i\theta})^{n+1}=e^{i(n+1)\theta}$, donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est alors vérifiée.
La récurrence fonctionne bien et le résultat est démontrée pour tout n entier naturel.
Puis si $m\in\mathbb{Z}$ avec $m<0$, alors en notant $n=-m$

$$(e^{i\theta})^m=(e^{i\theta})^{-n}=\frac{1}{(e^{i\theta})^n}=\frac{1}{e^{in\theta}}=e^{-in\theta}=e^{im\theta}$$

La seconde formule de Moivre est la notation algébrique de la précédente. □

Histoire - De l

Abraham De Mo
d'origine française,
Hormis la formule
pour son ouvrage s
chances

Angle moitié (pour factoriser)

Truc & Astuce pour le calcul - Factorisation de l'angle moitié
Lorsqu'on rencontre un expression de la forme $e^{ia}\pm e^{ib}$ (a,b réels), il faut toujours penser à factoriser par la moitié :

$$a=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\quad,\quad b=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}$$

Cela donne :

$$e^{ia}\pm e^{ib}=e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}\pm e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)$$

Et on applique les formules d'Euler

Exercice

Factoriser $1+e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta}$. (Re)trouver les formules donnant $1\pm\cos\theta$

Correction

$$1+e^{i\theta}=e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}\quad,\quad 1-e^{i\theta}=e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}$$

En prenant les parties réelles :

$$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}\qquad 1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Exercice

Nouveau calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos kt$ et $\sum_{k=0}^{n}\sin kt$

Correction

On fait un seul calcul, la partie réelle donnera le premier résultat, la partie imaginaire le second.

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}e^{ikt}=\sum_{k=0}^{n}(e^{it})^k=1\frac{1-(e^{it})^{n+1}}{1-e^{it}}=\frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}=\frac{e^{i(n+1)t/2}(-2i\sin\frac{(n+1)t}{2})}{e^{it/2}(-2i\sin\frac{t}{2})}=e^{int/2}\frac{\sin(n+1)t/2}{\sin t/2}$$

Formule d'Euler+ de Moivre + série géométrique + angle moitié +…
Donc

$$\sum_{k=0}^{n}\cos kt=\mathrm{Re}(S_n)=\frac{\cos(nt/2)\sin(n+1)t/2}{\sin t/2}\quad,\quad\sum_{k=0}^{n}\sin kt=\mathrm{Im}(S_n)=\frac{\sin(nt/2)\sin(n+1)t/2}{\sin t/2}$$

Linéarisation

Savoir faire - Linéarisation
Il s'agit d'exprimer $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ sous forme d'une somme de $\cos k\theta$ ou $\sin k\theta$
(il ne doit plus y avoir de puissances ni de produits de cosinus ou sinus).
— Ecrire $\cos^n\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$.
— Développer avec la formule du binôme.
— Regrouper les termes conjugués pour faire apparaître des cosinus ou des sinus.
Si il n'y a pas de faute de calculs, vous devez obtenir un nombre réel : **donc simplification des i…**

Exercice

Linéariser $\cos^3\theta$, $\sin^4\theta$.

Correction

$$\cos^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3=\frac{e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{3i\theta}}{8}=\frac{1}{4}\cos(3t)+\frac{3}{4}\cos(t)$$
$$\sin^4\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4=\frac{e^{4i\theta}-4e^{2i\theta}+6-4e^{-2i\theta}+e^{4i\theta}}{16}=\frac{1}{8}\cos(4t)-\frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{3}{8}$$

Savoir faire - Expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$
— Ecrire $\cos(nt)=\mathrm{Re}(e^{int})=\mathrm{Re}[(e^{it})^n]$ ou $\sin(nt)=\mathrm{Im}[(e^{it})^n]$.
— Utiliser la formule du binôme pour calculer $(e^{it})^n=(\cos t+i\sin t)^n$.
— Récupérer la partie réelle (ou imaginaire) en séparant les indices pairs des indices impairs.

Pour aller plus loin - Polynôme de Tchebychev
Les polynômes de Tchebychev (env. 1860) sont définis par récurrence par :

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x$$
$$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$$

Ils vérifient alors $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\,\theta\in\mathbb{R}$,

$$T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$$

Exercice

Ecrire $\cos 3t$ en fonction des puissances de $\cos t$, $\sin 3t$ comme le produit de $\sin t$ et d'une expression contenant des puissances de $\cos t$. Faire de même avec $\cos 5t$ et $\sin 5t$.

Correction

Là encore, on fait les deux questions en même temps, puis on prend la partie réelle et imaginaire.

$$\cos(3t)+i\sin(3t)=(e^{it})^3=(\cos t+i\sin t)^3=\cos^3 t+3i\cos^2 t\sin t-3\cos t\sin^2 t-i\sin^3 t$$
$$\cos(3t)=\cos^3 t-3\cos t\sin^2 t=\cos^3 t-3\cos t(1-\cos^2 t)=4\cos^3 t-3\cos t$$
$$\sin(3t)=3\cos^2 t\sin t-\sin^3 t=3(1-\sin^2 t)\sin t-\sin^3 t=3\sin t-4\sin^3 t$$
$$\cos(5t)+i\sin(5t)=(e^{it})^5=(\cos t+i\sin t)^5=\cos^5 t+5i\cos^4 t\sin t-10\cos^3 t\sin^2 t-10i\cos^2 t\sin^3 t+5\cos t\sin^4 t+i\sin^5 t$$
$$\cos(5t)=\cos^5 t-10\cos^3 t\sin^2 t+5\cos t\sin^4 t=16\cos^5 t-20\cos^3 t+5\cos t$$
$$\sin(5t)=5\cos^4 t\sin t-10\cos^2 t\sin^3 t+\sin^5 t=16\sin^5 t-20\sin^3 t+5\sin t$$

3.4. Argument, forme trigonométrique

Définition - Argument
Soit $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$, on a $\frac{z}{|z|}\in\mathbb{U}$ donc il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|}=e^{i\theta}$.
On dit que θ est un argument de z. On note $\theta=\arg z$.
L'écriture $z=re^{i\theta}$ où $r=|z|$ est appelée forme trigonométrique de z.

Pour aller plus loin - Moins loin…
Rappelons qu'on a dit précédemment que l'argument était plutôt à considérer comme un ensemble de valeurs; une classe d'équivalence.

L'argument est une fonction logarithmique (qui vérifie $f(ab)=f(a)+f(b)$), mais multivariée (à plusieurs valeurs).

Proposition - Arithmétique de la congruence
Si $(z,z') \in (\mathbb{C}^*)^2$, on a

$$\arg \overline{z} \equiv -\arg z \ [2\pi]$$
$$\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z \ [2\pi]$$
$$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z') \ [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv (\arg z - \arg z') \ [2\pi]$$

Attention - Pas d'unicité
Il n'y a pas unicité de l'argument, il est défini à 2π près. On peut imposer l'unicité de l'argument en le choisissant dans un intervalle de longueur 2π (en général $]-\pi,\pi]$ ou $[0,2\pi[$).

Remarque - Géométriquement
Soit z un complexe non nul et M le point d'affixe z. Toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$ est un argument de z.
Il faut savoir caractériser les complexes non nuls réels (resp. réels positifs, resp. réels négatifs, resp. imaginaires purs) par leur argument.

Proposition - Relation arg et arctan
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1+ix) \equiv \arctan x \ [2\pi]$.
Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $\arg z \equiv \arctan \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} \ [\pi]$. Précisément :

$$\arg z \equiv \begin{cases} \arctan \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} \ [2\pi] & \text{si } \mathrm{Re}(z) > 0 \\ \pi + \arctan \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} \ [2\pi] & \text{si } \mathrm{Re}(z) > 0 \end{cases}$$

Démonstration
Soit $z = 1+ix$, on note $\rho = \sqrt{1+x^2}$ son module et θ son argument principal.

$$z = 1 + ix = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta$$

On peut identifier :

$$x = \frac{x}{1} = \frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta} = \tan\theta \Longleftrightarrow \theta = \arctan x$$

□

4. Racines d'un nombre complexe

4.1. Recherche de racines carrées

On dit que $Z \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de $z \in \mathbb{C}$ si $Z^2 = z$. On dispose de deux méthodes pour chercher les racines carrées de z.

Résolution trigonométrique (la meilleure!)

Truc & Astuce pour le calcul - Racine carrée. Exploitation de la forme trigonométrique
On considère un complexe non nul z écrit sous forme trigonométrique $z = |z|e^{i\alpha}$, et on cherche Z sous forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$.
On a alors $Z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, on fait ensuite une sorte d'identification entre les modules et les arguments (mais attention...).

Exercice
Trouver les racines carrées de $z = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.
On rappelle que $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Correction
Il faut écrire z sous forme trigonométrique, on multiplie le dénominateur par la quantité conjuguée (non nécessaire) :

$$z = \frac{(1-i)(\sqrt{3}+i)}{3+1} = \frac{(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{4}$$
$$|z|^2 = \frac{1}{16}((1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2) = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si $\arg(z) = \theta$, alors $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) = \sin\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3}) = \cos\frac{7\pi}{12}$.
Donc $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12} = \frac{-\pi}{12}$ Les racines carrées de z sont alors : $Z_1 = \frac{1}{2^{1/4}}e^{-i\theta/24}$ et $Z_2 = -\frac{1}{2^{1/4}}e^{-i\theta/24}$.

La méthode-algorithmique précédente nous permet d'affirmer :

Proposition - Deux racines complexes
Tout complexe non nul possède exactement deux racines carrées complexes (opposées).

Résolution algébrique

Truc & Astuce pour le calcul - Racine carrée. Exploitation de la forme algébrique
On considère donc un complexe non nul z écrit sous forme algébrique $z = x+iy$, et on cherche Z sous forme algébrique $Z = X+iY$.
Le principe est d'écrire l'égalité des modules, des parties réelles et imaginaires de z et Z^2 pour se ramener à une résolution simple de système donnant X^2, Y^2 et le signe de XY.

$$Z^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} X^2+Y^2 = \sqrt{x^2+y^2} \\ X^2-Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases}$$

On résout le système formée par les deux premières équations, la troisième donne le signe de XY.

Exercice
Déterminer les racines carrées de $2-3i$.

Correction
On considère $Z = X+iY$ avec $Z^2 = 2-3i$.
Donc $|Z|^2 = X^2+Y^2 = |Z^2| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
Puis $\mathrm{Re}(Z^2) = X^2-Y^2 = 2$.
On a donc $X^2 = \frac{2+\sqrt{13}}{2}$ et $Y^2 = -1+\frac{\sqrt{13}}{2}$.
Et comme $\mathrm{Im}(Z^2) = 2XY = -3 < 0$, X et Y sont de signe opposé.
Ainsi $Z = \pm\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{13}}{2}} - i\sqrt{-1+\frac{\sqrt{13}}{2}}\right)$

Equation du second degré

Le théorème suivant a déjà été vu. Mais ici, on insiste sur le fait que les coefficients peuvent être des nombres complexes.

Proposition - Nombre de racines et degré
L'équation $az^2+bz+c = 0$, avec $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$, admet deux solutions

complexes (éventuellement confondues) $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ où δ est une racine carrée complexe de b^2-4ac.

Remarque - Bien connu...

On retrouve le résolution déjà connue d'une équation du second degré à coefficients réels.

Proposition - Théorème de Viète

Soient $(S,P) \in \mathbb{C}^2$. Les solutions du système

$$\begin{cases} z_1+z_2 = S \\ z_1 \times z_2 = P \end{cases}$$

sont exactement (à permutation près) les solutions de $z^2 - Sz + P = 0$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équation $\begin{cases} z_1+z_2 = 3 \\ z_1 \times z_2 = 1-3i \end{cases}$.

Correction

Il faut trouver les solutions de l'équation $z^2-3z+1-3i=0$.
Le discriminant est $\Delta = 9-4+12i = 5+12i$.
On cherche $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$, donc
$|\delta|^2 = a^2+b^2 = |\delta^2| = |\Delta| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$.
$\Re(\delta^2) = a^2-b^2 = \Re(\Delta) = 5$.
Donc $a^2 = \dfrac{13+5}{2} = 9$ et $b^2 = 4$.
Enfin, comme $2ab = \Im(\delta^2) = \Im(\Delta) = 12 > 0$, on a donc $\delta = 3+2i$ ou $\delta = -3-2i$.
Et par conséquent, les racines de l'équations sont (à permutation près) :
$z_1 = \dfrac{3+3+2i}{2} = 3+i$ et $z_2 = \dfrac{3-3-2i}{2} = -i$.

4.2. Racines n-ièmes de l'unité

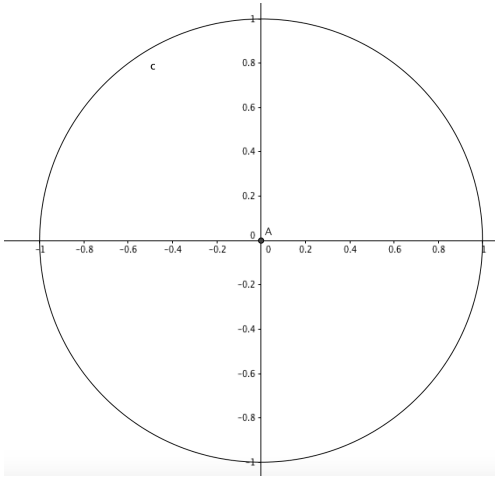
Pour aller plus loin - Groupes $(\mathbb{U}_n, \times)$

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ieme de l'unité, avec la loi de multiplication $\times$ en fait un groupe.
Nous reprendrons son étude plus précisément, dans quelques semaines (cours sur les groupes) et encore plus tard (cours sur les polynômes).

Théorème - Les n solutions de $z^n = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les n racines n-ièmes de l'unité, c'est à dire les solutions de l'équation $z^n = 1$, sont les n nombres $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$.
On note $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in \{0,1,\dots,n-1\} \right\}$

On obtient donc pour
$n=2$: 1 et -1 ;
$n=3$: 1, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \exp\frac{2i\pi}{3}$ et $j^2 = \overline{j} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \exp\frac{4i\pi}{3}$;
$n=4$: $1, i, -1$ et $-i$.
Il faut savoir les placer sur le cercle trigonométrique.



Démonstration

Soit $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, une solution de $z^n = 1$. Nécessairement $z \neq 0$, donc $\rho > 0$.
En outre $1 = |1| = |z^n| = |z|^n = \rho^n$, donc ρ est le nombre réel positif donc la puissance n-ième égale 1.
- Si $\rho > 1$, alors $\rho^n > \rho > 1$. Impossible.
- Si $\rho < 1$, alors $\rho^n < \rho < 1$. Impossible.
- Si $\rho = 1$, alors $\rho^n = 1$.

Il y a bien une et une seule solution à $\rho^n = 1$, c'est $\rho = 1$ et donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
On a alors $z^n = e^{in\theta} = e^0$ donc $n\theta \equiv 0\ [2\pi]$.
Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 0 + 2k\pi$ et donc $\theta = \frac{2k\pi}{n}$.
Ainsi $\mathbb{U}_n \subset \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\}$.
Enfin, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = e^{2ik\pi} = 1$, donc $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{U}_n$ Notons $\mathbb{U}'_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]\}$. Clairement : $\mathbb{U}'_n \subset \mathbb{U}_n$.
Réciproquement : si $z \in \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}\}$, il existe $h \in \mathbb{Z}$ tel que $z = e^{\frac{2ih\pi}{n}}$.
Notons h', le reste de la division euclidienne de h par n, donc $h' \in [\![0, n-1]\!]$ et $h \equiv h'\ [n]$.
Ainsi $\frac{2h\pi}{n} \equiv \frac{2h'\pi}{n}\ [2\pi]$, donc $z = e^{\frac{2ih\pi}{n}} = e^{\frac{2ih'\pi}{n}} \in \mathbb{U}'_n$.
Bilan : $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}'_n$. □

Proposition - Somme des racines n-ième

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.
En particulier $1 + j + j^2 = 0$.

Démonstration

On peut identifier dans le développement polynomiale ou faire le calcul :
$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik}{n}\pi} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{\frac{2i\pi}{n}})^k = 1\dfrac{1-e^{2in\pi/n}}{1-e^{2i\pi/n}} = 0$ □

4.3. Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Théorème - Racines n-ièmes de z_0

Soient $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors z_0 a exactement n racines n-ièmes (solutions de $z^n = z_0$).

Si $z_0 = |z_0|e^{i\alpha}$, alors ce sont les

$$z_k = |z_0|^{1/n} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \text{ où } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Démonstration
On a les équivalences :

$$z^n = z_0 \iff \left(\frac{z}{\sqrt[n]{|z_0|}e^{i\frac{\alpha}{n}}}\right)^n = \frac{z^n}{z_0} = 1$$

$$\exists\, k \in [\![0, n-1]\!] \text{ tel que } z = \sqrt[n]{|z_0|}e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$$

□

Exercice

Déterminer les racines n-ièmes de $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$.

On rappelle que $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ *et* $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Correction

On note $z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{2} = \sqrt{2}\times(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}) + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

Ainsi, les racines n-ièmes de z sont les nombres $\rho\epsilon_k$, pour $k \in \{0, 1, \dots n-1\}$, avec $\rho = 2^{1/2n}$ et $\epsilon_k = e^{i\frac{7\pi}{12n} + \frac{2k\pi}{n}}$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

Correction

On a donc $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^6 = -1$. Puis $\frac{z-1}{z+1}$, racine 6-ième de $-1 = e^{i\pi}$.

Donc $\frac{z-1}{z+1} = \epsilon_k$, avec $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$ et $\epsilon_k = e^{i(2k+1)\pi/6}$.

Et ensuite $z-1 = \epsilon_k(z+1)$ donc $(1-\epsilon_k)z = 1+\epsilon_k$, donc $z_k = \frac{1+\epsilon_k}{1-\epsilon_k}$.

En factorisant par l'angle moitié : $z_k = \frac{\cos(\frac{2k+1}{12}\pi)}{-i\sin(\frac{2k+1}{12}\pi)} = \frac{i}{\tan(\frac{2k+1}{12}\pi)}$

On voit bien sur ces exemples qu'il est préférable d'exploiter la forme géométrique lorsqu'on cherche des racines de nombres complexes…

5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C} = \mathscr{P}$

5.1. Regard géométrique sur le plan complexe

Proposition - Identification
On munit le plan $\mathscr{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soient A, B, A', B' quatre points du plan. On a alors (*mesure des angles orientés de vecteurs*) :

$$|z_A| = OA$$
$$AB = |z_B - z_A|$$
$$\arg z_A \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{OA})[2\pi] \qquad \text{et plus généralement : } \arg(z_B - z_A) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})[2\pi]$$

Le dernier résultat, essentiel, mérite une démonstration

Démonstration
Il s'agit d'angle orienté :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\vec{i}, \overrightarrow{A'B'}) - (\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_{B'} - z_{A'}) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}\right)$$

□

Analyse - Le nombre $Z = z' \times \overline{z}$

Etant donné deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ d'affixe $z(= z_B - z_A)$ et $\overrightarrow{A'B'}$ d'affixe $z'(= z_{B'} - z_{A'})$, alors le dernier calcul pour trouver l'angle entre les deux vecteurs conduit à nous intéresser au nombre complexe :

$$Z = z' \times \overline{z}$$

Son argument donne l'angle (orienté) entre ces deux vecteurs.

Définition - Le complexe Z
Soient A, B, A', B' quatre points du plan d'affixe z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ respectivement.
On note $Z = (z_{B'} - z'_A) \times \overline{(z_B - z_A)}$.
Alors

$$\arg Z \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})[2\pi] \quad \text{et} \quad |Z| = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{A'B'}\|$$

où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ est par définition la norme (longueur) du vecteur $\vec{u}(x, y)$.
Et donc

$$Z = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{A'B'}\|\left[\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) + i\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})\right]$$

Le calcul donne :

Proposition - Partie réelle et imaginaire de Z
Avec les mêmes notations et en notant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ d'affixe $z = z_B - z_A = x + iy$ et $\vec{u'} = \overrightarrow{A'B'}$ d'affixe $z' = z_{B'} - z_{A'} = x' + iy'$.
On rappelle que $Z = z' \times \overline{z}$. On a alors :

$$\mathrm{Re}(Z) = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{A'B'}\|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = xx' + yy'$$

$$\mathrm{Im}(Z) = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{A'B'}\|\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = xy' - x'y$$

Démonstration
Il s'agit juste de vérifier l'égalité avec les parties réelles et imaginaires de z et z'.

$$Z = z \times \overline{z'} = (x+iy) \times (x' - iy') = (xx' + yy') + i(xy' - x'y)$$

□

5.2. Transformations du plan (point de vue complexe)

Transformations « élémentaires »

Définition - Transformation du plan
On appelle transformation du plan toute bijection du plan dans lui-même.

Attention - Projection
Une projection sur une droite n'est pas une transformation du plan.

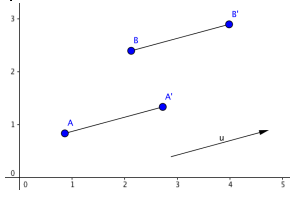
Définition - Translation
On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application

$$t_{\vec{u}} : \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \to & \mathscr{P} \\ M & \mapsto & M' \text{ tel que } \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \end{array}$$

En complexes, $t_{\vec{u}}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

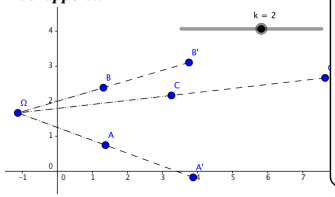
$$z \mapsto z + z_0$$

Représentation - Translation de vecteur $\vec{u}$



où z_0 est l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

Représentation - Homothétie de centre Ω et de rapport $k = 2$



Définition - Homothétie
On appelle homothétie de centre Ω et de rapport le réel $k \neq 0$ l'application

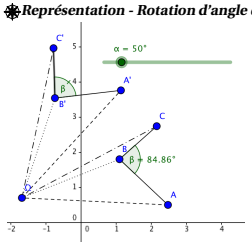
$$\begin{aligned} h_{\Omega,k} : \quad \mathscr{P} &\to \mathscr{P} \\ M &\mapsto M' \text{ tel que } \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \end{aligned}$$

En complexes, $h_{\Omega,k}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z_0 + k(z - z_0)$$

où z_0 est l'affixe du point Ω.

Représentation - Rotation d'angle α



Définition - Rotation
On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ l'application

$$\begin{aligned} R_{\Omega,\theta} : \quad \mathscr{P} &\to \mathscr{P} \\ M &\mapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases} \quad \text{si } M \neq \Omega \\ \Omega &\mapsto \Omega \end{aligned}$$

En complexes, $R_{\Omega,\theta}$ est représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)$$

où z_0 est l'affixe du point Ω.

Similitudes (directes)

Il s'agit de composition de rotation et d'homothétie…

Définition - Similitude directe
On appelle similitude directe du plan toute transformation représentée dans le plan complexe par une application de la forme

$$z \mapsto az + b$$

avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

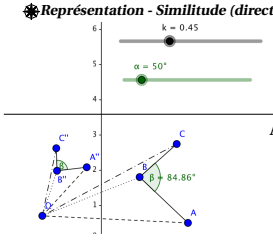
Pour aller plus loin - Groupe
Comme la composition de deux polynômes de degré 1 donne un polynôme de degré 1 (et que $a \neq 0$), l'ensemble des similitudes est un groupe !

Remarque - Les transformations élémentaires
Translations, homothéties et rotations sont des similitudes directes, il suffit de regarder leur expression en complexe.

Analyse - Résultats caractéristiques
Si A, B sont deux points distincts d'images respectives A', B' par la transformation associée à $z \mapsto az + b$, alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \arg a\,[2\pi] \text{ et } \frac{A'B'}{AB} = |a|.$$

Représentation - Similitude (directe)



Proposition - Similitude directe
Une similitude directe conserve les angles et les rapports des distances.

Si A, B, C sont trois points distincts d'images respectives A', B', C' par Alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})\,[2\pi] \qquad \text{et} \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Démonstration
Supposons que la transformation est $z \mapsto az + b$. Et notons z_M, l'affixe du point M, générique.

$$\frac{z_{A'} - z_{B'}}{z_{A'} - z_{C'}} = \frac{az_A + b - az_B - b}{az_A + b - az_C - b} = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$$

En prenant l'argument et le module, on retrouve respectivement la conservation des angles et des longueurs. □

Théorème - Caractérisation
Soit f la transformation du plan représentée par $z \mapsto az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$.
- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, f admet un unique point fixe (point invariant) $\Omega(\frac{b}{1-a})$ appelé centre de la similitude.
  f s'écrit alors : $f = h \circ r = r \circ h$ avec
  · r rotation de centre Ω d'angle de mesure $\arg a$
  · h homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.
  On dit que $|a|$ est le rapport de la similitude, et $\arg a$ est (la mesure de) l'angle de la similitude.

Démonstration
Soit $\Omega(z)$, un point fixe de f i.e. : $z = f(z)$ i.e. $z = az + b$, donc $z = \frac{b}{1-a}$ $(a \neq 1)$.
On a donc un unique point fixe. Notons $z_0 = \frac{b}{1-a}$.
Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) - z_0 = f(z) - f(z_0) = (az + b) - (az_0 + b) = a(z - z_0) \quad \Longrightarrow \quad f(z) = z_0 + a(z - z_0)$$

En notant $a = |a|e^{i\arg(a)}$, on retrouve le produit complexe ou la composition de transformation de la rotation $(\times e^{i\theta})$ et de l'homothétie $(\times |a|)$. □

Remarque - Cas particuliers avec $a \neq 1$:
- *Si $a \in \mathbb{R}^*$, f est l'homothétie de centre Ω de rapport a.*
- *Si $|a| = 1$, f est la rotation de centre Ω, d'angle $\theta = \arg a$.*

Corollaire - Caractérisation de la similitude
La similitude de centre d'affixe z_0, de rapport k et d'angle θ est représentée par

$$z \mapsto z_0 + ke^{i\theta}(z - z_0).$$

Savoir faire - Reconnaître une similitude
Etant donnée une transformation, pour reconnaître une similitude il faut :
1. chercher le point fixe : la solution de $f(z) = z$.
   On le note z_0, c'est le centre de la similitude.
2. chercher le complexe a tel que $f(z) - z_0 = a(z - z_0)$.
   Ce complexe a donne le rapport et l'angle de la similitude

Proposition - Composée de similitudes
La composée de deux similitudes est une similitude dont le rapport est le produit des rapports et l'angle, la somme des angles.
On a les cas particuliers suivants :
- la composée de deux translations est une translation de vecteur la somme des deux vecteurs,
- la composée de deux homothéties est soit une homothétie soit une translation,
- la composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle la somme des deux angles (éventuellement d'angle nul, i.e. l'identité du plan)
- la composée de deux rotations de centres distincts, d'angles respectifs θ et θ' est :
  - une rotation si $\theta+\theta' \not\equiv 0[2\pi]$
  - une translation (éventuellement de vecteur nul, i.e. l'identité) sinon.

Démonstration
Considérons les deux similitudes $z \mapsto az+b$ et $z \mapsto a'z+b'$.
La composée des deux similitudes est

$$z \mapsto a(a'z+b')+b = aa'z+(ab'+b)$$

On reconnait, à cas particuliers près, une similitude. Pour les cas particuliers, on reprend chacun dans le même ordre :
- la composée de deux translations est une translation de vecteur la somme des deux vecteurs.
  Dans ce cas $a=a'=1$, on a bien une translation.
- la composée de deux homothéties est soit une homothétie soit une translation.
  Dans ce cas $a,a' \in \mathbb{R}$, donc $aa' \in \mathbb{R}$; on a donc une homothétie ou une translation (si $aa'=1$)
- la composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle la somme des deux angles (éventuellement d'angle nul, i.e. l'identité du plan).
  Dans ce cas, en notant Ω ce centre : $r \circ r'(\Omega) = r(\Omega) = \Omega$. Donc Ω est centre de la similitude.
  Comme $a,a' \in \mathbb{U}$, alors $aa' \in \mathbb{U}$ et donc cette similitude est une rotation.
  Son angle est $\arg(aa') = \arg(a)+\arg(a')$.
- la composée de deux rotations de centres distincts, d'angles respectifs θ et θ'.
  On a $a=e^{i\theta}$ et $a'=e^{i\theta'}$, donc il s'agit de l'application $z \mapsto e^{i(\theta+\theta')}z+(ab'+b)$.
  Et donc il s'agit d'une
  - rotation si $\theta+\theta' \not\equiv 0[2\pi]$
  - translation (éventuellement de vecteur nul, i.e. l'identité) sinon.

□

Corollaire - Transformation réciproque (ou inverse)
On a les transformations réciproques suivantes :

$$t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}; \quad h_{\Omega,k}^{-1} = h_{\Omega,\frac{1}{k}}; \quad R_{\Omega,\theta}^{-1} = R_{\Omega,-\theta}.$$

Pour aller plus loin - Symétries
La symétrie centrale de centre Ω est la transformation du plan définie par $z \mapsto 2z_0 - z$ où z_0 est l'affixe du point Ω.
La symétrie (axiale) orthogonale d'axe la droite $\mathscr{D}$ (passant par O avec un angle θ) (ou réflexion d'axe $\mathscr{D}$) est $z \mapsto e^{2i\theta}\overline{z}$.

Proposition - Transformation du plan
Etant donné deux segments $[MN]$ et $[M'N']$ de longueurs non nulles, il existe une et une seule similitude directe transformant M en M' et N en N'.

Démonstration
On peut typiquement faire une démonstration en analyse-synthèse.
Supposons que cette transformation existe, notée $z \mapsto az+b$.
On a donc $z_{M'} = az_M+b$ et $z_{N'} = az_N+b$. Et donc $a = \dfrac{z_{M'}-z_{N'}}{z_M-z_N}$.

a est donc unique et de même $b = z_{M'} - \dfrac{z_{M'}-z_{N'}}{z_M-z_N}z_M$.
Mais pour s'assurer de l'existence, il faut qu'on retrouve bien $az_N+b=z_{N'}$:

$$az_N+b = \frac{z_{M'}-z_{N'}}{z_M-z_N}z_N + z_{M'} - \frac{z_{M'}-z_{N'}}{z_M-z_N}z_M = \frac{(z_{M'}-z_{N'})(z_N-z_M)}{z_M-z_N} + z_{M'} = -z_{M'}+z_{N'}+z_{M'} = z_{N'}$$

□

Pour aller plus loin - Inversion
L'inversion est une transformation essentielle en géométrie projective.
L'inversion par rapport au cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon $r \in \mathbb{R}$ est l'application $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $(z-\omega)\times(z'-\omega) = r^2$.
Pour que Ω puisse avoir une image, on la définit sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

6. Bilan

Synthèse

⇝ Les relations trigonométriques permettent d'obtenir une relation algébrique simple lorsqu'on considère la fonction d'EULER à valeurs complexes $t \mapsto \cos t + i\sin t$, notée e^{it} : $e^{i(a+b)} = e^{ia}\times e^{ib}$. A partir de celle-ci, on retrouve toutes les formules (en exploitant la relation de DE MOIVRE, le binôme de NEWTON ou les fonctions linéaires Re ou Im). **A savoir-faire manipuler absolument!**

⇝ Très souvent la question se pose de manière réciproque : étant donné une longueur de quel angle en est-elle le cos? Le problème, la fonction n'est pas injective : on peut avoir $\theta \neq \theta'$ et $\cos\theta = \cos\theta'$. On restreint donc l'intervalle image. On crée ainsi une fonction réciproque $\arccos$ à la fonction $\cos_{|[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$. De même pour les fonctions $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ et $\tan_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.

⇝ On se pose la même question pour $z \mapsto z^2$ et plus largement $z \mapsto z^n$. Etant donné un nombre complexe $Z = \rho e^{i\alpha}$, il y a exactement n nombres complexes différents $z_1,\dots z_n$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $(z_k)^n = Z$. Ce sont les racines n-ième de Z. Pour les obtenir, on se ramène **aux classiques racines $n$ième de l'unité** $e^{2ik\pi/n}$n en divisant par $\sqrt[n]{\rho}e^{i\alpha/n}$.
Au passage, on trouve une méthode complémentaire (algébrique) dans le simple cas de la racine carrée d'un nombre complexe.

⇝ La géométrie plane (de $\mathbb{R}^2$) se code parfaitement par du calcul, sur $\mathbb{C}$. Les concepts naturels de géométrie (longueur, orthogonalité, parallélisme) se réduise exactement par du calcul, selon le rêve de Descartes ou de Leibniz.

⇝ En retour, le calcul complexe simple : addition, multiplication, division devient une opération géométrique : translation, similitude sans ou avec conjugaison respectivement voire inversion…

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Truc & Astuce pour le calcul - Factorisation de l'angle moitié
- Savoir-faire - Linéarisation
- Savoir-faire - Expression de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$
- Truc & Astuce pour le calcul - Racine carrée. Exploitation de la forme trigonométrique
- Truc & Astuce pour le calcul - Racine carrée. Exploitation de la forme algébrique
- Savoir-faire - Reconnaître une similitude

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarq*
Re, Im	Fonctions partie réelles et parties imaginaires, appliquées à un nombre complexe	Elles sont $\mathbb{R}$-linéaires ($\forall\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(a_1 z_1 + a_2 z_2) = a\mathrm{Re}(z_1) + a_2\mathrm{Re}(z_2)\ldots$)	
$e^{i\theta}$	$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$ (Euler)	$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$	Relatior $\cos\theta$ = $\sin\theta$ = I
j	$j := e^{2i\pi/3} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$j^3 = 1, 1 + j + j^2 = 0$	Racine l'unité (
$\mathbb{U}_n$	Ensemble des racines n-ième de l'unité $\mathbb{U}_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$	$z \in \mathbb{U}_n$ si et seulement si $\exists!k \in \mathbb{N}_n$ (ou $\exists!k \in [\![0, n-1]\!]$) tq $z = e^{2ik\pi/n}$	Reviend

Retour sur les problèmes

16. Multiplication des nombres.
$z \times z'$ donne (géométriquement) le nombre complexe obtenu par similitude de centre O, de longueur $|z|$, et d'angle $\arg(z)$ à partir du point $Z'(z')$.
On peut l'obtenir en appliquant le théorème de Thalès. On note I, l'intersection du cercle unité et de la droite OZ'. Puis on trace la parallèle à IZ passant par Z'. L'intersection de cette droite avec OZ donne le point $Z''(z \times z')$.
17. Le centre du triangle équilatéral sur le côté $[AB]$ a pour affixe $z_1 = \dfrac{b - e^{i\pi/6}a}{1 - e^{i\pi/6}} = \dfrac{ibe^{-i\pi/12} - iae^{i\pi/12}}{2\sin\frac{\pi}{12}}$ car $(b - z_1) = e^{i\pi/6}(a - z_1)$....
18. Transformation du plan
Tout le chapitre répond à cet exercice
19. $\cos\theta_2 = i\dfrac{\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_1 - n_2^2}}{n_2}$. Pour le reste, voir avec M. Lagoute.

Chapitre 5

Calcul matriciel

Résumé -

Dans un premier temps nous (re)définissons les opérations matricielles : addition, multiplication par un nombre (ce qui donne un espace vectoriel) et multiplication (ce qui donne avec l'addition un anneau).
Puis nous nous concentrons sur les matrices carrées ; elles jouent un rôle très important, puisque très fréquemment, on est amené à multiplier une matrice par elle-même (pour cela elle doit être carrée). C'est l'occasion de définir et de voir les propriétés des puissances de matrice, ainsi que de la trace.
On cherche également à inverser de telle matrice (si possible). Le meilleur moyen est d'utiliser un algorithme de Gauss (pivot de Gauss ou algorithme de Gauss-Jordan).

Sommaire

Dans tout le chapitre, m, n, p, q sont des entiers naturels non nuls et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (on pourrait plus généralement considérer que $\mathbb{K}$ est un corps (commutatif)).

1. Problèmes

? Problème 22 - Pourquoi des matrices ?

Pour comprendre le monde qui nous entoure, on mesure des objets puis des dépendances entre ces objets.
Ces dépendances peuvent être multidimensionnelles, elles sont souvent enregistrées dans un tableau. C'est ce que l'on voit en particulier en économétrie, ou des domaines encore plus large : biologie, géographie…
Additionner des nombres a du sens lorsqu'on a des mesures de même unité d'objets de même nature. C'est seulement au XV-ième siècle que les additions se sont généralisées et se sont dégagées de leur signifiants.
Peut-on définir une addition des tableaux, qui ait du sens? Peut-on généraliser cette addition à tous tableaux?
Quelles sont les propriétés naturelles qui découlent : associativité, commutativité, élément neutre (Groupe)? Voire : espace vectoriel, avec une multiplication par un scalaire.

? Problème 23 - Pourquoi un tel produit ?

On peut addition des tableaux, peut-on les multiplier?
Donner une incarnation naturelle dans un problème physique qui justifie la règle de multiplication matricielle :

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} [A]_{i,k}[B]_{k,j}$$

? Problème 24 - Racines carrées

Puisque le produit de deux matrices existe, la puissance entière en découle : $A^2 = A \times A$ et par récurrence : $A^n = A \times A^{n-1}$.
Peut-on définir des puissances entières négatives : A^{-4}?
Et plus largement des puissances non entières. Par exemple, la racine carrée de A serait une matrice B tel que $B^2 = A$.
Concrètement, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet-elle une racine carrée? Plusieurs (combien?)?

? Problème 25 - Anneau non commutatif des matrices

L'anneau des matrices carrées de taille n : $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un exemple d'anneau non commutatif : $A \times B \neq B \times A$. Cela suggère quelques questions :

- Parmi les propriétés classiques d'anneaux, lesquelles ne sont plus vraies dans cet anneau?
- Et inversement, existe-t-il des matrices A tel que pour tout B : $A \times B = B \times A$
- Etant donnée A, existe-t-il une condition simple, nécessaire et/ou suffisante sur B pour que $A \times B = B \times A$?

- On sait que les éléments du groupe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\times := GL_n(\mathbb{K})$ sont les matrices inversibles et ne sont nécessairement pas des diviseurs de 0.

? Problème 26 - Matrices inversibles

Existe-t-il un moyen simple, algorithmique, pour étudier l'inversibilité d'une matrice? Peut-on l'exploiter pour obtenir également A^{-1} (dans le cas où A est inversible)?

2. Esnsemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Cet ensemble est considéré comme un espace vectoriel ici.

2.1. Ensemble des matrices

Définition - Matrices

Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. On parle aussi de matrice de type (n,p) ou de matrice $n \times p$. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n; 1\leqslant j\leqslant p} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

a_{ij} est le coefficient de la i-ième ligne, j-ième colonne.
Deux matrices A et B sont donc égales si elles ont même nombre de lignes, même nombre de colonnes et mêmes coefficients.
Si $n = p$ on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Exemple - Premier exemple

$$(i-j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2 \\ 1\leqslant j\leqslant 3}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Définition - Quelques cas particuliers

Quelques matrices « de référence » sont à connaître :

- La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice qui ne contient que des coefficients nuls :
$$(0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (0) = O_{n,p}$$
- si $n = 1$, on dit que $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.
- si $p = 1$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelée matrice colonne.

Parmi les matrices carrées d'ordre n, quelques matrices joueront un rôle particulier :

- La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice I_n qui possède des 1 sur

la diagonale et des 0 en dehors de la diagonale :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

où $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ii} = 1$ pour $i = 1$ à n.

— une matrice diagonale est une matrice carrée dont seuls les éléments diagonaux sont non nuls :

$$\operatorname{diag}(a_{11},\dots,a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0)$$

Ainsi $I_n = \operatorname{diag}(\underbrace{1,1,\dots 1}_{n})$.

— une matrice scalaire est une matrice diagonale dont tous les éléments sont identiques :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \quad (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \text{ et } a_{ii} = a_{jj} = \lambda)$$

— une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée dont les éléments au-dessous de la diagonale sont nuls :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0);$$

— une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée dont les éléments au-dessus de la diagonale sont nuls.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0);$$

2.2. Opérations (vectorielles) sur les matrices

Addition

Définition - Addition de deux matrices de même taille
La somme de deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice définie par la formule suivante :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n, \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

on ajoute les coefficients qui ont la même position.
Il s'agit d'une loi interne sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Application - Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 11 & 13 \end{pmatrix}.$$

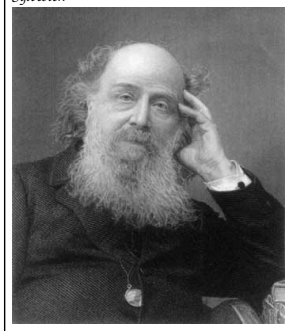
Analyse - Groupe $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$
On remarque que pour A, B, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

- $A + (0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} + A = A$.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- $A + B = B + A$.
- $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} + (-a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$;

Le théorème suivant en découle :

Théorème - Le groupe $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$
L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition + est donc un groupe commutatif, d'élément neutre la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Histoire - Le terme de matrice
Le terme de matrice pour désigner les tableaux rectangulaires considérées ici fut introduit en 1850 par le mathématicien américain d'origine anglaise : James Joseph Sylvester.



James Joseph Sylvester est né 1814 et mourut en 1897. Son origine juive l'obligea à aller enseigner en Amérique.

Multiplication par un scalaire

Définition - Multiplication par un scalaire
Le produit d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice notée αA définie par :

$$\alpha(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}.$$

On définit ainsi une loi externe sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ à domaine d'opérateur $\mathbb{K}$

Et on vérifie facilement les propriétés suivantes :

Proposition - Propriétés de la multiplication scalaire

- $1A = A$
- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Espace vectoriel de dimension finie

Analyse - Pour définir explicitement, sans quiproquo, une matrice, il faut…
$n \times p$ coefficients de $\mathbb{K}$ qu'il faut placer aux différentes positions de la matrice.
Il s'agit donc d'un espace vectoriel de dimension $n \times p$, et dont la base *canonique* est donnée par la référence de position.
Chaque élément de la base correspond à une position. Chaque élément de la base a donc un double indice : k et ℓ.

Théorème - L'espace vectoriel $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$
$(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-e.v de dimension np.
La base canonique est formée par les $n\times p$ matrices $E_{k\ell}$ $(1\leqslant k\leqslant n; 1\leqslant \ell\leqslant p)$ où $E_{k\ell}$ est la matrice ne contenant que des 0 sauf l'élément d'indices k,ℓ qui vaut 1, soit

$$E_{k\ell}=(\delta_{ki}\delta_{j\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

On a donc $\dim_{\mathbb{K}}\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})=n\times p$.

Savoir faire - Notations
Par la suite, on notera ${}^{i}[A]_{j}$ ou $\text{Coef}_{i,j}(A)$, le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice A.
On a donc

$${}^{i}[\lambda A+\mu B]_{j}=\lambda\,{}^{i}[A]_{j}+\mu\,{}^{i}[B]_{j}\qquad \text{Coef}_{i,j}(\lambda A+\mu B)=\lambda\text{Coef}_{i,j}(A)+\mu\text{Coef}_{i,j}(B)$$

$\forall\, i,j,\quad {}^{i}[\cdot]_{j}$ ou $\text{Coef}_{i,j}$ est une application linéaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On notera également $L_i(A)$ (respectivement $C_j(A)$), la ligne i (respectivement colonne j de A).
On note que ${}^{i}[AB]_{j}=L_i(A)\times C_j(B)$, c'est un nombre.

2.3. Transposition

Définition - Matrice transposée
Soit $A=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant p}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
on définit la **transposée** de A, notée ${}^{t}A$ ou A^{T} par

$$\forall\, i\leqslant p, j\leqslant n:\quad {}^{i}[A^{T}]_{j}={}^{i}[{}^{t}A]_{j}={}^{j}[A]_{i}$$

On a $A^{T}\in\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

La transposée d'une matrice s'obtient en « échangeant » lignes et colonnes :

Exemple - Matrice 3×3

$$\text{Si } A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-3\\0&1&3&1\\-1&1&1&3\end{pmatrix}\text{ alors }{}^{t}A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&1\\-1&3&1\\-3&1&3\end{pmatrix}$$

Théorème - Isomorphisme
Sous réserve que la taille des matrices permette d'effectuer les différentes opérations, on a :

$$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T};\quad (\lambda A)^{T}=\lambda A^{T};\quad (A^{T})^{T}=A$$

La transposition est donc un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Exercice
Faire la démonstration

Correction
Jeu d'écriture

3. Multiplication matricielle

3.1. Définition

Définition - Produit de deux matrices
Le produit d'une matrice $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice $B=(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est une matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par

$$C=AB=(c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}$$

où

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}.$$

Savoir faire - Notation et multiplication matricielle
Par la suite, on notera $\text{Coef}_{i,j}(A)$, le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice A.
On a donc

$${}^{i}[AB]_{j}=\sum_{k=1}^{p}{}^{i}[A]_{k}\,{}^{k}[B]_{j}$$

Il faut savoir passer d'un sens vers l'autre : $\text{Coef}_{i,j}(AB)=\sum_{k=1}^{p}\text{Coef}_{i,k}(A)\text{Coef}_{k,j}(B)$

et aussi $\sum_{k=1}^{p}\text{Coef}_{i,k}(A)\text{Coef}_{k,j}(B)=\text{Coef}_{i,j}(AB)$.

Pour aller plus loin - La convention d'Einstein
La convention d'Einstein en physique consiste à voir dans toute répétition de deux lettres muettes une somme. Ainsi le symbole $\sum$ peut être enlevé.
Le fait qu'une telle convention existe signifie la fréquence importante des opérations du type

$$\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$$

écrit par Einstein : $a_{i,k}b_{k,j}\ldots$

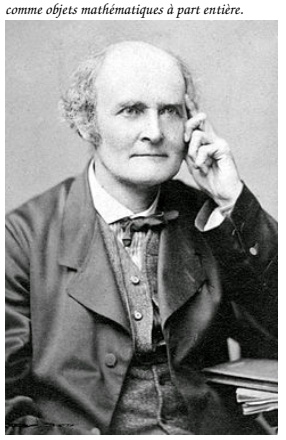
Attention - Taille des matrices
On ne peut pas multiplier une matrice de $\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{K})$ avec une matrice de $\mathscr{M}_{5,6}(\mathbb{K})$! Il faut que le nombre de colonnes de la première matrice soit égal au nombre de lignes de la seconde.

Savoir faire - Présentation des calculs
Une méthode pratique de présentation des calculs :

$$\begin{pmatrix}\ldots&\ldots&b_{1j}&\ldots\\\ldots&\ldots&b_{2j}&\ldots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\ldots&\ldots&b_{pj}&\ldots\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\ldots&a_{ip}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\ldots&\ldots&c_{ij}&\ldots\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{pmatrix}$$

Histoire - Arthur Cayley
C'est Arthur Cayley qui définit le produit matriciel, dans le premier article (1855) qui étudie les matrices comme objets mathématiques à part entière.



Arthur Cayley est un brillant avocat puis mathématicien anglais né en 1821 et mort en 1895. C'est un génie très hétéroclite.

Application - Produit de deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1+6+15 & 2+8+18 \\ 4+15+30 & 8+20+36 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

Pour aller plus loin - Interprétation en terme de graphes

Un dessin permettra d'expliquer au mieux ce à quoi peut servir une matrice. Il faut d'abord considérer :

1. *un ensemble de départ ; par exemple : $A = \{a_1, a_2\}$*
2. *un ensemble d'arrivée ; par exemple : $B = \{b_1, b_2, b_3\}$*
3. *un jeu de flèches entre les deux ensembles, associés à des nombres.*
   Par exemple, la flèche $a_i \rightarrow b_j = {}_i X^j$ indique la relation entre a_i et b_j.

C'est cette flèche qui est abstraite, la plus ouverte possible. Elle peut être par exemple un temps de trajet, un coefficient de proportionalité... Ainsi la figure 1 suivante est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \end{pmatrix}$.

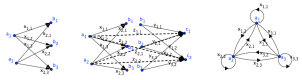


fig.1-Graphe - fig.2-Produit - fig.3- Carrée Matriciel

La figure 3 représente un matrice d'un ensemble dans lui-même (comme pour les endomorphismes), elle est nécessairement carrée.

La figure 2 représente alors le produit matriciel. En effet, il s'agit de savoir comment aller alors de $A = \{a_1, a_2\}$ à $C = \{c_1, c_2\}$. La réponse est obtenue sous forme de matrice $z_{i,j}$, où $z_{i,j}$ indique les chemins de a_i à c_j. Il y a en fait trois possibilités : passer par b_1, b_2 ou b_3, cela donne donc exactement :

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= x_{i,1}y_{1,j} + x_{i,2}y_{2,j} + x_{i,3}y_{3,j} \\ &= \sum_{k=1}^{3} x_{i,k}y_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{3} Coef_{i,k}(X)Coef_{k,j}(Y) \end{aligned}$$

Exemple - Petits calculs

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer, si cela est possible, AB, BA, A^2, B^2.

Exercice

Simplifier le produit :

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{\ell,j}b_{i,h}c_{h,\ell}d_{j,m}$$

Correction

Il est évident que le résultat dépend de i et de m et d'aucun autre nombre.

Les nombres ${}_\ell[A]^j \ldots$ sont des nombres réels, on peut donc les faire commuter.

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{\ell,j}b_{i,h}c_{h,\ell}d_{j,m} = \sum_{h=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,h}c_{h,\ell}a_{\ell,j}d_{j,m} = \text{Coef}_{i,m}(BCAD)$$

Il s'agit du nombre en ligne i et colonne m de la matrice $B \times C \times A \times D$.

3.2. Interprétation en terme de systèmes linéaires

Analyse - Multiplication par une matrice colonne

Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, alors

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p \end{pmatrix}$$

Proposition - $(S) \Leftrightarrow AX = B$

L'équation $AX = B$ pour des matrices est une manière compacte d'écrire un système linéaire général avec n équations, p inconnues et un second membre $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 & +\ldots & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +\ldots & +a_{2p}x_p & = b_2 \\ \vdots & + & +\vdots & = \vdots \\ a_{n1}x_1 & +\ldots & +a_{np}x_p & = b_n. \end{cases}$$

Nous reviendrons sur ce parallèle lorsque nous prendrons le temps de résoudre des systèmes linéaires.

3.3. Propriété du produit

Proposition - Associativité du produit

Le produit de matrices est associatif.

Plus précisément si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K})$ alors on a

$$(AB)C = A(BC)$$

qui est une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Pour aller plus loin - Application aux probabilités

Ecrire : « $z_{i,j}$ indique les chemins de a_i à c_j. Il y a en fait trois possibilités : passer par b_1, b_2 ou b_3 » nous rappelle la formule des probabilités totales.

En effet, on se souvient que si (B_1, B_2, B_3) forme un système complet d'événements, alors :

$$\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(B_1) \times \mathbf{P}_{B_1}(A_i) + \mathbf{P}(B_2) \times \mathbf{P}_{B_2}(A_i) + \mathbf{P}(B_3) \times \mathbf{P}_{B_3}(A_i)$$

Démonstration

Le seul problème réside dans la manipulation des indices.

Appelons $D = (d_{ih})$ la matrice AB ; le coefficient de la $i$ème ligne et de la $h$ème colonne est donné par

$$d_{ih} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh},$$

donc le coefficient i, j de $(AB)C = E$ est donné par

$$\sum_{h=1}^{p} d_{ih}c_{hj} = \sum_{h=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh}\right)c_{hj}$$

$$= \sum_{h=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh}c_{hj} = e_{ij}.$$

Calculons maintenant le coefficient k, j de $D' = BC = (d'_{kj})$

$$d'_{kj} = \sum_{h=1}^{p} b_{kh}c_{hj},$$

le coefficient i, j de $E' = A(BC) = (e'_{ij})$ est obtenu en faisant :

$$e'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}d'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{h=1}^{p} b_{kh}c_{hj}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{p} a_{ik}b_{kh}c_{hj}$$

d'où l'égalité que l'on appelle associativité. □

Remarque - En terme de Coef$_{i,j}$

Ce que l'on a démontré c'est :

$${}^i[(AB)C]_j = \sum_{h,k}^{i} [A]_h^h [B]_k^k [C]_j = {}^i[A(BC)]_j$$

Proposition - Bilinéarité
Si A et B sont des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et C, D de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors

$$A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD \quad \text{et} \quad (\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$$

En résumé l'application $(A, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \mapsto AC \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est bilinéaire.
Ce se résume en

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

Démonstration
On ne fera qu'un calcul.

$$[A(\lambda C + \mu D)]_{i,j} = \sum_{h=1}^{p} [A]_{i,h} \times [\lambda C + \mu D]_{h,j} = \lambda \sum_{h=1}^{p} [A]_{i,h} [C]_{h,j} + \mu \sum_{h=1}^{p} [A]_{i,h} [D]_{h,j}$$

(...) □

Proposition - Cas à connaître!
$(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ i.e. $[E_{i,j}]_{a,b} = \delta_{a,i}\delta_{b,j}$
et $(F_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ celle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Alors $E_{i,j} \times F_{k,\ell} = \delta_{k,j} G_{i,\ell}$, avec $(G_{s,t})_{\substack{1 \leqslant s \leqslant n \\ 1 \leqslant r \leqslant q}}$ base canonique de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$

Démonstration
Il s'agit de calculer $E_{i,j}F_{k,\ell}$ pour les différents quadruplets possibles (i, j, k, ℓ).
Résultat à retenir (ou à savoir retrouver rapidement). Il faut quatre lettres muettes (2 pour E et 2 pour F), et deux lettres (provisoires) pour préciser la position :

$$[E_{i,j}F_{k,\ell}]_{a,b} = \sum_{h=1}^{p} [E_{i,j}]_{a,h} [F_{k,\ell}]_{h,b} = \sum_{h=1}^{p} \delta_{a,i}\delta_{h,j}\delta_{h,k}\delta_{b,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \delta_{a,i}\delta_{b,\ell} & \text{si } k = j \end{cases}$$

Donc si $a \neq i$ ou $b \neq \ell$, $[E_{i,j}F_{k,\ell}]_{a,b} = 0$.
Et si $k = j$, alors pour $a = i$, $b = \ell$, on a $[E_{i,j}F_{k,\ell}]_{a,b} = 1$.
Donc $E_{i,j} \times F_{k,\ell} = \delta_{k,j} G_{i,\ell}$, avec $(G_{s,t})_{\substack{1 \leqslant s \leqslant n \\ 1 \leqslant r \leqslant q}}$ base canonique de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. □

Exercice
Comment écrire la matrice $AE_{i,j}$ à partir de la matrice A ?
De même pour $E_{i,j}A$?

Correction
Pour tout k, h,

$$[AE_{i,j}]_{k,h} = \sum_{s=1}^{n} [A]_{k,s}\delta_{i,s}\delta_{j,h} = \delta_{j,h}[A]_{k,i}$$

Donc si $h \neq 0$, on trouve le nombre nul et si $h = j$, on obtient le nombre $[A]_{k,i}$, situé précédemment en colonne i de A.
On obtient donc une matrice formée d'une unique colonne non nulle, l'ancienne colonne i de A, située en colonne j.
De même $E_{i,j}A$ est la matrice formée d'une unique ligne non nulle, l'ancienne ligne j de A, située en colonne i.
On peut aussi exploiter la formule précédente et la linéarité du produit (et distribution)

Pour aller plus loin - Transposition et graphe
La matrice transposée est la matrice associée au graphe où le sens des flèches s'inverse par rapport à la situation initiale

Proposition - Transposition d'un produit
Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T$$

Attention - Eviter d'écrire des bêtises
Notons bien que $B^T \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Donc le produit $A^T \times B^T$ n'aurait aucun sens (aucune raison que $n = q$.)

Démonstration
Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n \times N_q$,

$$[(A \times B)^T]_{j,i} = [(A \times B)]_{i,j} = \sum_{h=1}^{p} [A]_{i,h} \times [B]_{h,j}$$

$$= \sum_{h=1}^{p} [A^T]_{h,i} \times [B^T]_{j,h} = \sum_{h=1}^{p} [B^T]_{j,h} \times [A^T]_{h,i} = [B^T \times A^T]_{j,i}$$

□

3.4. Produit par blocs

Proposition - Produit par blocs
Soient deux matrices $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Considérons des entiers $k \leqslant n, \ell \leqslant p, m \leqslant q$ et des matrices $A \in \mathcal{M}_{k,\ell}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{k,p-\ell}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-k,\ell}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-k,p-\ell}(\mathbb{K})$, $A' \in \mathcal{M}_{\ell,m}(\mathbb{K})$, $B' \in \mathcal{M}_{\ell,q-m}(\mathbb{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{p-\ell,m}(\mathbb{K})$, $D' \in \mathcal{M}_{p-\ell,q-m}(\mathbb{K})$ telles que M et N s'écrivent par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

Alors, on peut calculer le produit MM' par blocs de la manière suivante :

$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Attention - Bien faire attention aux dimensions
Il est nécessaire que les dimensions correspondent bien.
Sinon, le calcul écrit n'aurait pas de sens

Démonstration
On calcule $\text{Coef}_{i,j}(MM')$ suivant la position de i par rapport à k et celle de j par rapport à m.
On va faire un cas : $i \leqslant k$ et $j \geqslant m+1$. Donc $\text{Coef}_{i,j}(M \times M')$ se trouve en haut à droite.

$$\text{Coef}_{i,j}(MM') = \sum_{h=1}^{p} \text{Coef}_{i,h}(M)\text{Coef}_{h,j}(M')$$

$$= \sum_{h=1}^{\ell} \text{Coef}_{i,h}(M)\text{Coef}_{h,j}(M') + \sum_{h=\ell+1}^{p} \text{Coef}_{i,h}(M)\text{Coef}_{h,j}(M')$$

$$= \sum_{h=1}^{\ell} \text{Coef}_{i,h}(A)\text{Coef}_{h,j-m}(B') + \sum_{h=\ell+1}^{p} \text{Coef}_{i,h-\ell}(B)\text{Coef}_{h-\ell,j-m}(D')$$

Car pour
— $i \leqslant k$, $h \leqslant \ell$, $\text{Coef}_{i,h}(M) = \text{Coef}_{i,h}(A)$,
— $i \leqslant k$, $h \geqslant \ell+1$, $\text{Coef}_{i,h}(M) = \text{Coef}_{i,h-\ell}(B)$,
— $h \leqslant \ell$, $j \geqslant m+1$, $\text{Coef}_{h,j}(M') = \text{Coef}_{h,j-m}(B')$,
— $h \leqslant \ell$, $j \leqslant m+1$, $\text{Coef}_{h,j}(M') = \text{Coef}_{h-\ell,j-m}(D')$,
Donc

$$\text{Coef}_{i,j}(MM') = \text{Coef}_{i,j-m}(AB') + \text{Coef}_{i,j-m}(BD') = \text{Coef}_{i,j-m}(AB' + BD')$$

□

On peut avoir intérêt à considérer les matrices sous forme d'une association de colonnes ou de lignes.
On peut voir ces opérations, comme une forme de calculs parallèles, à la physicienne.

Proposition - Matrice et association de colonnes ou de lignes
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il nous arrivera de noter $A = \begin{pmatrix} \frac{L_1}{L_2} \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix}$ comme une association de n (matrices ou vecteurs) lignes, avec $L_i(A) = L_i$

Il nous arrivera de noter $B = (C_1|C_2|\dots|C_n)$ comme une association de n (matrices ou vecteurs) colonnes, avec $C_j(B) = C_j$

On a alors $AB = (AC_1|AC_2|\dots|AC_n) = \begin{pmatrix} \frac{L_1B}{L_2B} \\ \hline \vdots \\ \hline L_nB \end{pmatrix}$ mais aussi ${}^{i}[A \times B]_j = L_i \times C_j$.

Exercice
Comment écrire la matrice $E_{i,j}A$ à partir de la matrice A et $AE_{i,j}$, en raisonnant par blocs ?

Correction
$L_k(E_{i,j}A) = L_k(E_{i,j})A = \delta_{k,i}L_i(E_{i,j})A = \delta_{k,i}(L_i(E_{i,j}C_1(A))|\dots|L_n(E_{i,j}C_1(A))) = \delta_{k,i}({}^{j}[A]_1|{}^{j}[A]_2|\dots{}^{j}[A]_n) = \delta_{k,i}L_j(A)$

4. Les matrices carrées

4.1. L'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$

Pour aller plus loin - Algèbre?
On appelle $\mathbb{K}$-algèbre un ensemble $\mathcal{A}$ muni de deux opérations interne (notées ici $+$ et $\times$) et une opération externe (notée ici $\cdot$) telle que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau.

Heuristique - Pourquoi les matrices carrées?
Si on multiplie deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on trouve un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la multiplication est donc interne dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On peut ainsi effectuer les calculs $A \times B$ et $B \times A$, mais aussi A^k pour tout entier k…
Nous verrons qu'ains $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

Théorème - La $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif et non intègre dès que $n \geqslant 2$, d'élément unité I_n.

Pour aller plus loin - Algèbre
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2.*

Exemple - Non commutativité et non intégrité
Vérifiez que
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
puis que
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple - L'inverse d'une matrice d'ordre 2
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Alors en notant $A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}$, on a :
$$A \times A' = A' \times A = (ad - bc)I_2$$
Donc si $ad - bc \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}A'$.

4.2. Puissance de matrices

Définition - Puissance d'une matrice
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit par récurrence :
$$A^0 = I_n, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, A^{k+1} = A \times A^k$$
On a alors, par commutation :
$$A^k = \underbrace{A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}} = A^m \times A^{k-m} \qquad \text{(pour tout } m \leqslant k)$$

Les règles de calcul dans un anneau (comme dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) s'appliquent d'où :

Proposition - Formules matricielles
Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $AB = BA$ alors
$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} \text{ (Formule du binôme de Newton)}$$
$$A^p - B^p = (A-B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \dots + AB^{p-2} + B^{p-1})$$
$$I_n - A^p = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1})$$

4.3. Inversibilité d'une matrice

Définition - Inversibilité de A
On dit qu'une **matrice carré d'ordre n** A est inversible, si elle admet un inverse pour la loi $\times$, c'est-à-dire s'il existe une matrice carrée d'ordre n B telle que
$$BA = AB = I_n$$
(où I_n est la matrice identité). B est alors notée A^{-1} et appelée inverse de A.

Remarque - Des matrices non inversibles
On ne peut pas inverser de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si $n \neq p$.
Une matrice carrée n'est pas nécessairement inversible :
par exemple, la matrice nulle O_n n'a pas d'inverse car
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AO_n = O_n \neq I.$$

Exemple - Matrice non inversible, moins triviale
De plus il y a des matrices non nulles qui n'ont pas d'inverse.
Par exemple $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas d'inverse.
En effet, pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,
$$A \times N = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$$
Elle ne peut pas être égale à I_2.

Remarque - Rappels
Nous avons vu que l'ensemble des inverses d'un anneau forme un groupe.
On l'avait noté $A^\times$.

Définition - Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$
L'ensemble $(GL_n(\mathbb{K}),\times)$ des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe, non commutatif.
On l'appelle le groupe linéaire.
On a donc pour $A,\ B\in GL_n(\mathbb{K})$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Proposition - Inverse de la transposé
Si A est une matrice carrée inversible alors ${}^tA$ est aussi inversible et $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$.

Démonstration
« Le coup des chaussettes dans le tiroir… »
$(AB)\times(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AA^{-1}=I_n$ et $(B^{-1}A^{-1})\times(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}B=I_n$
Donc $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
De même, en transposant un produit :

$$I_n={}^t(I_n)={}^t(A\times A^{-1})={}^t(A^{-1})\times{}^tA \qquad I_n={}^t(I_n)={}^t(A^{-1}\times A)={}^tA\times{}^t(A^{-1})$$

Donc $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$ □

Pour aller plus loin - Polynôme annulateur
On montrera en seconde année que pour tout matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des polynômes annulateurs de M

$$\{P\in\mathbb{K}[X]\mid P(M)=0\}$$

est non vide. On sait assurément qu'il existe au moins un polynôme de degré n dans cet ensemble (le polynôme caractéristique de M - d'après le théorème de Cayley-Hamilton).
Et mieux, comme $\mathbb{K}[X]$ est un anneau euclidien, cet ensemble est forcément de la forme

$$\{P\in\mathbb{K}[X]\mid P(M)=0\}=\mu_P\mathbb{K}[X]$$

où μ_P est un polynôme particulier : minimal (en degré), unitaire et propre à P. On l'appelle le polynôme minimal de P

Exercice
Soit $J\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont des 1.

1. On suppose $n=2$. Calculer J^2,J^3,J^k pour $k\in\mathbb{N}$.
2. Mêmes questions avec $n\geqslant 2$ quelconque. J est-elle inversible ?
3. Calculer A^p où $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

Correction

1. Pour $n=2$, on montre aisément que $J^2=2J$, $J^3=4J$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $J^k=2^{k-1}J$ (récurrence).
2. Maintenant, on suppose que $n\geqslant 2$.

$$\mathrm{Coef}_{i,j}(J^2)=\sum_{h=1}^{n}\mathrm{Coef}_{i,h}(J)\mathrm{Coef}_{h,j}(J)=\sum_{h=1}^{n}1=n=n\mathrm{Coef}_{i,j}(J)$$

Donc $J^2=nJ$ Par récurrence, supposons $J^k=n^{k-1}J$.

$$J^{k+1}=J^kJ=n^{k-1}JJ=n^{k-1}nJ=n^kJ=n^{(k+1)-1}J$$

Si J était inversible, on aurait les égalités :

$$J=J^{-1}\times J^2=nJ^{-1}J=nI_n$$

Ce qui est faux.

3. $A=I_3+J_3$, I_3 commute avec J_3 et donc on peut appliquer la formule de Newton :

$$A^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{\mathbb{K}}I_3^{p-k}J^k=I_3+\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{\mathbb{K}}I_3^{p-k}3^{k-1}J$$

$$=I_3+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{\mathbb{K}}3^k\right)J=I_3+\frac{1}{3}((3+1)^p-1)J$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^p+2&4^p-1&4^p-1\\4^p-1&4^p+2&4^p-1\\4^p-1&4^p-1&4^p+2\end{pmatrix}$$

(On peut vérifier pour $p=1$ que cela fonction bien…

Savoir faire - Exploiter un polynôme annulateur pour trouver M^{-1}

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que le polynôme $P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ annule M, c'est-à-dire que $P(M)=\sum_{k=0}^{d}a_kM^k=0$. Alors

— si $a_0\neq 0$, on a alors $I_n=\dfrac{-1}{a_0}\left(\sum_{k=1}^{d}a_kM^k\right)=M\times\dfrac{-1}{a_0}\left(\sum_{k=1}^{d}a_kM^{k-1}\right)$.

Et donc nécessairement M est inversible et $M^{-1}=\dfrac{-1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{d-1}a_{k+1}M^{\mathbb{K}}\right)$

— si $a_0=0$, alors il faut faire un raisonnement par l'absurde :
si M était inversible alors en multipliant par M^{-1}, on a

$$M^{-1}\times P(M)=\sum_{k=1}^{d}a_kM^{k-1}=0 \text{ et donc } \sum_{k=0}^{d-1}a_{k+1}M^{\mathbb{K}}=0.$$

Il y a alors deux options,
ou bien cette somme n'est pas nulle, et par l'absurde, M n'est pas inversible,
ou bien cette somme vaut bien 0 et donc on recommence au point initial.

Savoir faire - Exploiter un polynôme annulateur pour trouver M^n

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que le polynôme $P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ annule M, c'est-à-dire que $P(M)=\sum_{k=0}^{d}a_kM^k=0$.
Alors, on peut faire la division euclidienne de X^n par P :
il existe $Q_n,R_n\in\mathbb{K}[X]$ tels que $X^n=Q_n(X)\times P(X)+R_n(X)$ avec $\deg(R_n)<\deg(P)=d$.
On a alors, puisque $M^n=0+R_n(M)$ car $P(M)=0$.
Cela permet de
— démontrer que $\{M^n,\in\mathbb{Z}\}\subset\mathrm{vect}(I_n,M,M^2,\dots M^{d-1})$ (résultat théorique classique)
— calculer explicitement M^n, si l'on sait faire explicitement cette division euclidienne. Pour faire celle-ci, il arrive souvent qu'on utilise les racines de P…

Application - Inverse et puissance de $M=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

On remarque que $(M-I_3)^3=0$, donc on a un polynôme annulateur de M :

$$P(X)=(X-1)^3=X^3-3X^2+3X-1$$

Ainsi : $M(M^2-3M+3I_3)=M^3-3M^2+3M=I_3$.

Donc M est inversible d'inverse $M^{-1}=M^2-3M+3I_3=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ De même, si l'on fait la division euclidienne, on a :

$$X^n=Q_n(X-1)^3+R_n \qquad \text{où}\deg(R_n)\leqslant 2$$

On peut exploiter la formule de Taylor, en 1 (en notant $P(X)=X^n$) :

$$X^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(\mathbb{K})}(1)}{k!}(X-1)^k=\underbrace{P(1)+P'(1)(X-1)+\frac{P''(1)}{2}(X-1)^2}_{=R_n}+(X-1)^3\underbrace{\sum_{k=3}^{n}\frac{P^{(\mathbb{K})}(1)}{k!}(X-1)^{k-3}}_{=Q_n}$$

Or $P(1)=1$, $P'(1)=n$ et $P''(1)=n(n-1)$. Ainsi

$$R_n(X)=1+n(X-1)+\frac{1}{2}n(n-1)(X-1)^2$$

Ainsi $M^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

Exercice
Soit $A=(a_{pq})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{pq}=\exp(\frac{2i\pi pq}{n})$ et $\overline{A}=(\overline{a_{pq}})$.
Calculer $A\overline{A}$ et en déduire que A est inversible.

Correction
(On ne prendra pas i, à cause du i imaginaire pure).
Pour tout $k,\ell \in \mathbb{N}_n$,

$$\mathrm{Coef}_{k,\ell}(A\overline{A}) = \sum_{h=1}^{n} a_{k,h}\overline{a_{h,\ell}} = \sum_{h=1}^{n} \exp\left(\frac{2i\pi}{n}(kh-h\ell)\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \exp\left(\frac{2hi\pi}{n}(k-\ell)\right)$$

$$= \begin{cases} \sum_{h=1}^{n} 1 = n & \text{si } k=\ell \\ \sum_{h=1}^{n} \left(\exp\left(\frac{2i\pi}{n}(k-\ell)\right)\right)^h = \frac{1-\exp\left(\frac{2ni\pi}{n}(k-\ell)\right)}{1-\exp\left(\frac{2i\pi}{n}(k-\ell)\right)} = 0 & \text{si } k\neq\ell \end{cases}$$

Donc $A\overline{A} = nI_n$.
Notons alors que $\overline{A}A = \overline{A\overline{A}} = nI_n$.
Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}$.

4.4. Quelques sous-ensembles remarquables

Matrices diagonales

Proposition - Matrices scalaires
L'ensemble des matrices scalaires d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension 1, contenant I_n et stable par la multiplication (c'est un sous-anneau commutatif et aussi une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Pour aller plus loin - Base 1
Donc l'espace des matrices scalaires est $\mathrm{vect}(I_n)$*, de dimension 1.*

Proposition - Espace des matrices diagonales
L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n, contenant I_n et stable par la multiplication (c'est un sous-anneau commutatif et une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Pour aller plus loin - Base 2
Donc l'espace des matrices diagonales est $\mathrm{vect}\left((E_{i,i})_{i\in\mathbb{N}_n}\right)$*, de dimension* n*.*

Proposition - Inverse de matrices diagonales
Si D est diagonale, $D = \mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$, alors D est inversible si et seulement pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $d_i \neq 0$ et alors $D^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{d_1},\dots,\frac{1}{d_n})$.
Donc D^{-1} est elle-même une matrice diagonale.

Démonstration
Pour tout $i,j \in \mathbb{N}_n$, par définition de D

$$\mathrm{Coef}_{i,j}(A\times D) = \sum_{h=1}^{n} \mathrm{Coef}_{i,h}(A)\mathrm{Coef}_{h,j}(D) = d_j\mathrm{Coef}_{i,j}(A)$$

Donc pour que $A\times D = I_n$,
il faut pour tout $i\in\mathbb{N}_n$, $\mathrm{Coef}_{i,i}(AD) = d_i\mathrm{Coef}_{i,i}(A) = 1$, il est nécessaire que $d_i \neq 0$.
En prenant alors $\mathrm{Coef}_{i,i}(A) = \frac{1}{d_i}$, on a donc $\mathrm{Coef}_{i,i}(AD) = 1$.
il faut également pour tout $j\neq i$, $\mathrm{Coef}_{i,j}(AD) = 0 = d_i\mathrm{Coef}_{i,j}(A)$,
donc nécessairement $\mathrm{Coef}_{i,j}(A) = 0$.
Par conséquent, pour que D soit inversible, il faut $d_i\neq 0$, pour tout i.
Et la seule matrice qui conviendrait pour inverse est $A = \mathrm{diag}(\frac{1}{d_1},\dots\frac{1}{d_n})$ (car $AD = I_n$).
Un calcul simple confirme : $D\times A = I_n$ également.
On a trouvé alors une condition nécessaire et suffisante avec, alors, une expression de D^{-1}. □

Matrices symétriques et antisymétriques

Pour aller plus loin - Bases 3
Donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{vect}\left((E_{i,j}+E_{j,i})_{i\leqslant j\in\mathbb{N}_n}\right)$*, espace de dimension* $\frac{1}{2}n(n+1)$*.*
Et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{vect}\left((E_{i,j}-E_{j,i})_{i<j\in\mathbb{N}_n}\right)$*, espace de dimension* $\frac{1}{2}n(n-1)$*.*

Définition - Matrices symétriques et antisymétriques
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est dite **symétrique** si ${}^tA = A$, soit si pour tout (i,j), $a_{ij} = a_{ji}$ (ou ${}^i[A]_j = {}^j[A]_i$);
on note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
A est dite **antisymétrique** si ${}^tA = -A$, soit si pour tout (i,j), $a_{ij} = -a_{ji}$ (ou ${}^i[A]_j = -{}^j[A]_i$);
on note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathscr{AS}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

En l'absence d'ambiguité, on peut noter $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$.

Pour aller plus loin - Matrices et graphes
Que signifie pour un graphe que sa matrice associée est symétrique ? Antisymétrique ?

Proposition - Diagonale d'une matrice antisymétrique
Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Démonstration
A, antisymétrique. Pour tout $i\in\mathbb{N}_n$,

$$\mathrm{Coef}_{i,i}(A) = -\mathrm{Coef}_{i,i}(A) \Longrightarrow 2\mathrm{Coef}_{i,i}(A) = 0$$

□

Ensemble des matrices triangulaires (supérieures)

Théorème - Espace des matrices triangulaires
L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, contenant I_n.
Il est stable pour la multiplication (donc est un sous-anneau et une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Pour aller plus loin - Base 4
Donc il s'agit de $\mathrm{vect}\left((E_{i,j})_{i\leqslant j\in\mathbb{N}_n}\right)$*, espace de dimension* $\frac{1}{2}n(n+1)$*.*

Attention - Pas trop vite
L'ensemble des matrices triangulaires d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
L'addition d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure ne donne pas une matrice triangulaire, la plupart du temps

Pour aller plus loin - Inverse d'une matrice triangulaire supérieure
Nous verrons que si T *une matrice triangulaire supérieure, carrée.*
Alors T *est inversible ssi* $\forall\ i\in\mathbb{N}_n$*,* $Coef_{i,i}(T)\neq 0$*.*
Et dans ce cas, T^{-1} *est également triangulaire supérieure*

Remarque - Mais notons :
Une matrice à la fois triangulaire inférieure et supérieure est diagonale.

Savoir faire - Montrer qu'une matrice est triangulaire supérieure
Il faut montrer (condition nécessaire et suffisante) :

$$\forall\ i,j\in\mathbb{N}_n,\quad i>j \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{Coef}_{i,j}(T) = 0$$

Il faut démontrer la stabilité par somme (facile) et par multiplication de matrices triangulaires supérieures.

Démonstration
Soit T_1 et T_2 deux matrices triangulaires supérieures.
Pour tout $i>j$:

$$\mathrm{Coef}_{i,j}(T_1T_2) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Coef}_{i,k}(T_1)\mathrm{Coef}_{k,j}(T_2)$$
$$= \sum_{k=1}^{i-1}\underbrace{\mathrm{Coef}_{i,k}(T_1)}_{=0:\,i>k}\mathrm{Coef}_{k,j}(T_2) + \sum_{k=i}^{n}\mathrm{Coef}_{i,k}(T_1)\underbrace{\mathrm{Coef}_{k,j}(T_2)}_{=0:\,k\leqslant i>j} = 0$$

Donc T_1T_2 est triangulaire supérieure. □

4.5. Trace d'une matrice carrée

Définition - Trace d'une matrice
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle trace de A le scalaire égal à la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} {}^{i}[A]_{i} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Coef}_{i,i}(A)$$

Proposition - Propriété de la trace
L'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}: \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ A &\mapsto \mathrm{Tr}\, A \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}\, A + \mu \mathrm{Tr}\, B$ et

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Démonstration
Par linéarité de $\mathrm{Coef}_{i,i}$:

$$\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Coef}_{i,i}(\lambda A + \mu B) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Coef}_{i,i}(A) + \mu \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Coef}_{i,i}(B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B)$$

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} {}^{i}[AB]_{i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} {}^{i}[A]_{h}^{h}[B]_{i} = \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} {}^{h}[B]_{i}^{i}[A]_{h} = \mathrm{Tr}(BA)$$

□

5. Opérations élémentaires sur les matrices

5.1. Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

Heuristique - Lien résolution de système/inversion de matrice
Le calcul $A \times X = b$ où X et b sont des matrices colonnes est exactement l'écriture d'un système linéaire.
La résolution $X = A^{-1}b$ (si A est inversible donc carrée) exploite les opérations élémentaires sur les lignes du système pour appliquer l'algorithme de Gauss.
Essayons de transférer directement la même idée sur les colonnes de A.

Définition - Opérations élémentaires sur les lignes
On appelle opération élémentaire sur les lignes L_i de la matrice A l'une des transformations suivantes effectuée sur A :

- **Permutation (ou échange)de deux lignes**
  Pour $i \neq j$, $L_i \leftrightarrow L_j$ signifie que l'on permute la i-ième et la j-ième lignes de la matrice.
- **Addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne**
  Pour $i \neq j$, $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ signifie que l'on remplace la j-ième ligne L_j de la matrice par $L_j + \lambda L_i$, où $\lambda \in K$.
- **Multiplication d'une ligne par un scalaire NON NUL**
  Pour tout $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$ signifie que l'on remplace la i-ième ligne par αL_i.

Chacune des manipulations précédentes correspond à un produit matriciel :

Proposition - Transformation élémentaire sur les lignes comme un produit
Effectuer une transformation élémentaire sur les lignes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ revient à calculer le produit matriciel à gauche de A : EA où E est l'une des matrices suivantes :

- Pour $L_i \leftrightarrow L_j$,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

  C'est une matrice de transposition, notée habituellement $P_{i,j}$ $(= P_{j,i})$
- Pour $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & \lambda & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + \lambda E_{ij} \quad \lambda \text{ en ligne } i, \text{ colonne } j$$

  C'est une matrice de transvection, notée habituellement $T_{i,j}(\lambda)$
- Pour $L_i \leftarrow \alpha L_i$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \alpha & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$$

  C'est une matrice de dilatation, notée habituellement $D_i(\alpha)$

Démonstration
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une des matrices de la base canonique.
On rappelle que ${}^{h}[BA]_{k} = \sum_{r=1}^{n} {}^{h}[B]_{r}{}^{r}[A]_{k}$.

$$\text{Donc } {}^{h}[E_{i,j}A]_{k} = \sum_{r=1}^{n} {}^{h}[E_{i,j}]_{r}{}^{r}[A]_{k} = {}^{h}[E_{i,j}]_{j}{}^{j}[A]_{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq i \\ {}^{j}[A]_{k} & \text{si } h = i \end{cases}$$

On a donc $L_h(E_{i,j}A) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq i \\ L_j(A) & \text{si } h = i \end{cases} = \delta_{h=i} L_j(A)$ Alors $E_{ij}A$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont toutes les lignes sont nulles sauf la i-ième , qui est la j-ième ligne de A :

$$\forall\ h \neq i L_h(E_{i,j}A) = 0 \qquad L_i(E_{i,j}A) = L_j(A)$$

$$\forall\ h \neq i, \ell \in \mathbb{N}_n \mathrm{Coef}_{h,\ell}(E_{i,j}A) = 0 \qquad \mathrm{Coef}_{i,\ell}(E_{i,j}A) = \mathrm{Coef}_{j,\ell}(A)$$

Puis comme $I_n A = A$ et en examinant chacune des opérations élémentaires on obtient le résultat.
• $L_k\big((I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})A\big) = L_k(A) - \delta_{k,i}L_i(A) - \delta_{k,j}L_j(A) + \delta_{k,i}L_j(A) + \delta_{k,j}L_i(A)$.

$$L_k(EA) = \begin{cases} L_i(A) - L_i(A) + L_j(A) = L_j(A) & \text{si } k = i \\ L_j(A) - L_j(A) + L_i(A) = L_i(A) & \text{si } k = i \\ L_k(A) & \text{sinon} \end{cases}$$

• $L_k\big((I_n + \lambda E_{i,j})A\big) = L_k(A) + \delta_{k,i}\lambda L_j(A)$.

$$L_k(EA) = \begin{cases} L_i(A) + \lambda L_j(A) & \text{si } k = i \\ L_k(A) & \text{sinon} \end{cases}$$

• $L_k\big((I_n + (\alpha-1)E_{i,i})A\big) = L_k(A) + (\alpha-1)\delta_{k,i}L_i(A)$.

$$L_k(EA) = \begin{cases} L_i(A) + (\alpha-1)L_i(A) = \alpha L_i(A) & \text{si } k = i \\ L_k(A) & \text{sinon} \end{cases}$$ □

Proposition - Opération élémentaire en I_n
On considère une opération élémentaire, notée φ, qui transforme une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en la matrice $\varphi(A) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et la matrice I_n en $\varphi(I_n)$.
Alors $\varphi(A) = \varphi(I_n) \times A$.
Et par récurrence, si $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k$ sont k transformations élémentaires (sur les lignes) qui s'appliquent à des matrices possèdant n lignes, alors, pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
$[\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1](A) = \varphi_k(I_n) \times \cdots \times \varphi_1(I_n) \times A$.

Démonstration
Cela a bien un sens de considérer que φ peut s'appliquer à A et à I_n, car il s'agit d'opération sur les lignes et A et I_n ont le même nombre de lignes.
Pour prouver ce résultat il suffit de vérifier que pour les trois transformations possibles on a bien $E = \varphi(I_n)$, puisque $\varphi(A) = EA$.
On démontre ensuite l'hérédité de la récurrence : Supposons que $\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1(A) = \varphi_k(I_n) \times \cdots \times \varphi_1(I_n) \times A$.
Notons $A' = \varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1(A)$.
Alors

$$[\varphi_{k+1} \circ \varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1(A) = \varphi_{k+1}(\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1(A)) = \varphi_{k+1}(A') = \varphi_{k+1}(I_n) \times A' = \varphi_{k+1}(I_n) \times \varphi_k(I_n) \times \cdots \times \varphi_1(I_n) \times A$$

□

Cela se concrétise dans le savoir faire suivant

Savoir faire - Retenir les opérations matricielles codant les opérations élémentaires
Pour une opération sur les lignes de A, il s'agit toujours de produit à gauche de A.
(On verra pour les colonnes, il s'agit de produits à droites de A)
Par quelle matrice ?
C'est toujours par la matrice qu'on obtient lorsqu'on applique la transformation élémentaire en question à I_n.
Ainsi, par exemple, si l'on veut faire $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, pour $n = 3$, on multiplie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition - Inversibilité des opérations élémentaires
Si une matrice B est déduite de A par une opération élémentaire φ, alors A peut se déduire de B par l'opération inverse φ^{-1} suivant le tableau suivant :

φ	φ^{-1}
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
$L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$	$L_j \leftarrow L_j - \lambda L_i$
$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$L_i \leftarrow \dfrac{1}{\alpha} L_i$

Proposition - Inversibilité des matrices élémentaires
Si φ est une opération élémentaire sur les lignes alors la matrice carrée $\varphi(I_n)$ est inversible et $\varphi(I_n)^{-1} = \varphi^{-1}(I_n)$.
On a alors $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$ (symétrique, involutif),
$\big(T_{i,j}(\lambda)\big)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$, et $\big(D_i(\alpha)\big)^{-1} = D_i(\frac{1}{\alpha})$.

Démonstration
D'après la proposition précédente $\varphi^{-1}(I_n)\varphi(I_n) = \varphi^{-1}(\varphi(I_n)) = I_n$ □

Application - Inverse d'une matrice diagonale
Considérons D, une matrice diagonale. On note pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, ${}^i[D]_i = d_i$.
Le calcul donne directement : $D = \prod_{i=1}^{n} D_i(\lambda_i)$.
Attention à cette notation possible ici uniquement car ces matrices commutent deux à deux !
On a alors, si $\forall\, i \in \mathbb{N}_n$, $\lambda_i \neq 0$: $D \times \prod_{j=1}^{n} D_{n-j}\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) = I_n$.
Par conséquent D est inversible, d'inverse la matrice diagonale $\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots \frac{1}{\lambda_n}\right)$. Et si il existe i tel que $\lambda_i = 0$, alors D n'est pas inversible.
On fait un raisonnement par l'absurde, en notant que pour tout matrice A,
pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, ${}^i[A \times D]_k = \sum_{h=1}^{n} {}^i[A]_h \times .^h[D]_k = 0$.
Donc on ne peut pas avoir $A \times D = I_n$.

5.2. Opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice

On définit les mêmes opérations élémentaires sur les colonnes que sur les lignes. On obtient alors les résultats suivants :

Proposition - Transformation élémentaire sur les colonnes comme un produit
Effectuer une transformation élémentaire sur les colonnes d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ revient à calculer le produit matriciel AF où F est l'une des matrices suivantes :
— Pour $C_i \leftrightarrow C_j$,
$$F = I_p - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$
— Pour $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$
$$F = I_p + \lambda E_{ji}$$
— Pour $C_i \leftarrow \alpha C_i$
$$F = I_p + (\alpha - 1)E_{ii}$$

Démonstration
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{ij} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ une des matrices de la base canonique. Alors AE_{ij} est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la i-ième , qui est la j-ième colonne de A. $AI_p = A$ et en examinant chacune des opérations élémentaires on obtient le résultat. □

Proposition - Opération élémentaire en I_p
On considère une opération élémentaire, notée ψ, qui transforme une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en la matrice $\psi(A) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et la matrice I_p en $\psi(I_p)$.
Alors $\psi(A) = A\psi(I_p)$.
Et par récurrence, si $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_k$ sont k transformations élémentaires (sur les colonnes) qui s'appliquent à des matrices possédant p lignes, alors,

pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:
$\psi_k \circ \cdots \circ \psi_1(A) = A \times \psi_1(I_p) \times \cdots \times \psi_k(I_p)$.

Démonstration
On démontre le résultat par récurrence :

$$\psi_{k+1}(\psi_k \circ \cdots \circ \psi_1)(A) = \psi_{k+1}(A') = A'\psi_{k+1}(I_p) = A \times \psi_1(I_p) \times \cdots \times \psi_k(I_p) \times \psi_{k+1}(A)$$

par hypothèse de récurrence. □

5.3. Transformation par opérations élémentaires (matrices inversibles)

Conservation de l'inversibilité

Histoire - Gauss et le calcul matriciel linéaire
Encore Gauss… Voir le cours d'arithmétique.

Proposition - Conservation de l'inversibilité
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible.
Alors AB est inversible si et seulement si B est inversible

Pour aller plus loin - Mieux!
Plus que la conservation du caractère inversible, c'est le rang d'une matrice qui est exactement conservé par de telles opérations.
On reverra cela dans le cours d'algèbre linéaire…

Démonstration
Si B est inversible, alors AB est inversible (d'inverse $B^{-1}A^{-1}$).
Si AB est inversible, alors $B = A^{-1}(AB)$ est inversible (d'inverse $(AB)^{-1}A$) □

Corollaire - Conservation d'inversibilité par les opérations élémentaires
Les opérations élémentaires sur les lignes (ou sur les colonnes) d'une matrice carrée conservent le caractère inversible/non inversible d'une matrice.

Démonstration
Une opération élémentaire sur une matrice est un produit à gauche par une matrice inversible.
D'après le théorème précédent, on en déduit la conservation du critère d'inversibilité □

Application - Inverse d'une matrice triangulaire supérieure (algorithme)
Dans un premier temps, on considère T, une matrice triangulaire avec que des 1 sur la diagonale.
On suppose donc que pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, ${}^{i}[T]_i = 1$, ${}^{i}[T]_j = 0$ dès que $i > j$..
On peut alors annuler les coefficients de T par la suite des multiplications (attention, cela ne commute pas!) :
Pour i de 1 à $n-1$:
pour j de $i+1$ à n :
$T \leftarrow T \times T_{i,j}(-{}^{i}[T]_j)$ (Cela revient à faire $C_j \leftarrow C_j - {}^{i}[T]_j C_i$).
On obtient au bout de l'algorithme la matrice identité.
Cela fonctionne : lorsqu'on s'occupe de la ligne i, il n'y a dans la colonne que des 0 :
- ceux d'en-dessous sont donnés initialement
- ceux d'au-dessus sont obtenus lors des calculs précédents.

On notera que l'inversion ne s'obtient qu'avec un produit de matrices triangulaires supérieures ($j > i$).
Or le produit de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

Proposition - Inversibilité des matrices triangulaires supérieures
Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si il n'y a aucun zéro sur la diagonale.
Dans ce cas, la matrice inverse est également triangulaire supérieure.
On peut obtenir T^{-1} en suivant un algorithme simple : supprimer les

coefficients non nul ligne, après ligne, en exploitant le coefficient non nul de la diagonale.

En exploitant la transposition, on obtient un résultat semblable pour les matrices triangulaires inférieures.

Démonstration
Supposons T triangulaire supérieure avec des coefficients non nulles sur la diagonale.
On peut supposer que T s'écrit $(t_{i,j})_{i,j}$ avec $t_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $t_{i,i} \neq 0$, pour tout i.
On note $D = \text{diag}\left(\frac{1}{t_{1,1}}, \ldots, \frac{1}{t_{n,n}}\right)$, inversible. On a alors

$$D \times T = \begin{pmatrix} 1 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{T}$$

On applique l'algorithme précédent à $\overline{T}$. Montrons alors qu'au tour de boucle i, la matrice $\overline{T}$ obtenue est de la forme

$$\overline{T}_i := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & t_{i+1,i+2} & \cdots & t_{i+1,n} \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 1 & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $i = 0$, le résultat est vraie, c'est la matrice $\overline{T}$.
Supposons que le résultat est vrai au tour i (pour $i < n-1$).
Et considérons donc l'algorithme en $i+1$.
L'opération suivante consiste alors, pour j de $i+2$ à n à faire $C_j \leftarrow C_j - t_{i+1,j}C_{i+1}$.
Comme la colonne C_{i+1} ne possède qu'un 1 en ligne $i+1$, cela n'impacte que la ligne $i+1$.
Et celle-ci voit ses coefficients se transformer en $t_{i+1,j} - t_{i+1,j} = 0$.
Ainsi, après le tour de boucle $i+1$, la matrice a bien la forme $\overline{T}_{i+1}$.
Et en particulier à la fin du tour $n-1$, $\overline{T}$ est l'identité.
On a donc transformé $\overline{T}$ en matrice identité par opérations élémentaires inversibles. Donc T est inversible.
S'il y a au moins 1 zéro sur la diagonale. Notons $i_0 = \min\{i \mid t_{i,i} = 0\}$ (ensemble non vide).
On peut appliquer le même début d'algorithme jusqu'à la ligne $i_0 - 1$,incluse.
On obtient alors la matrice

$$\overline{T}_{i_0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & & & 0 & t_{i+1,i+2} & \cdots & t_{i+1,n} \\ & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 1 & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas inversible. En effet, elle possède une colonne de 0 (la i-ème), et donc le produit par toute matrice à sa gauche donne toujours une matrice avec la colonne i-ème nulle.
Par l'absurde, on ne peut jamais obtenir l'identité. □

Remarque - Opération sur les colonnes
On aurait pu, comme on le fait pour l'inversion d'un système linéaire (dans le seconde partie) transformé T en matrice identitié en opérant sur les lignes. Mais il aurait alors fallut commencer par les dernières lignes…

Algorithme

Le théorème suivant est donc un corollaire :

Histoire - Fang-cheng
« Cette méthode est connue des Chinois depuis au moins le Ier siècle de notre ère. Elle est référencée dans le livre chinois Jiuzhang suanshu (Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique), dont elle constitue le huitième chapitre, sous le titre « Fang cheng » (la disposition rectangulaire). La méthode est présentée au moyen de dix-huit exercices. Dans son commentaire daté de 263, Liu Hui en attribue la paternité à Chang Ts'ang, chancelier

Théorème - Transformation de Gauss-Jordan
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est inversible si et seulement s'il est possible de transformer A en une matrice triangulaire supérieure, sans 0 sur la diagonale, à l'aide uniquement d'opérations élémentaires portant sur les lignes.
Dans ce cas, on peut terminer la décomposition de A vers I_n par suite d'opérations élémentaires.
Si on applique alors à la matrice I_n les mêmes opérations élémentaires, dans le même ordre, on obtient A^{-1}.

Demi-inversion suffisante

Corollaire - Inversion à droite suffisante
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$.
Alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
(De même, B est inversible et $B^{-1} = A$)

Pour aller plus loin - Autres algorithmes
Il existe d'autre méthode (raffinement de Gauss) pour inverser une matrice. Elles ont une complexité algorithmique plus faible (on gagne sur la constante dans le O - ou mieux encore dans certains cas tout particulier de matrices). Il s'agit des méthodes LU, QR, Choleski.
On peut aussi employer des méthodes itératives assez différentes dans leur philosophie comme les méthodes de Jacobi... On crée une suite de matrice (A_n), avec $A_0 = A$ et $\lim(A_n) = A^{-1}$. On s'arrête quand on est « assez proche » de A^{-1}.

Démonstration
On applique une série de transformations élémentaires à A pour l'échelonner.

$$\exists\, E_1, E_2, \dots E_k, T \text{ telles que } E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = T$$

On a donc $TB = E_k E_{k-1} \cdots E_1$.
Puis en multipliant à droite par $E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$, on a $T(B(E_k E_{k-1} \cdots E_1)^{-1}) = I_n$.
On a vu que si T avait un coefficient nul sur la diagonale, il est impossible d'obtenir I_n.
Donc T n'a aucun coefficient nul sur la diagonale, il est inversible.
Par produit de matrices inversibles : $A = (E_k E_{k-1} \cdots E_1)^{-1} T$ est inversible.
Et donc $B = A^{-1} AB = A^{-1}$. □

Savoir faire - Inversibilité et inverse d'une matrice par l'algorithme de Gauss

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan en considérant $(A|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_3 \\ L_3 \leftarrow -L_2 \end{array}\right.$$

Par suite d'opérations élémentaires, on a transformé A en I_3 donc A est inversible.
Par suite des mêmes opérations élémentaires, on a transformé I_3 en A^{-1},
donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

A retenir : **dans une opération élémentaire, il ne faut pas perdre l'information d'une ligne**. Autrement écrit, il faut toujours pouvoir revenir en arrière!!

Exercice

Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

_____

Pour aller plus loin - Coût de l'algorithme de Gauss
Si l'on suit parfaitement la démarche de l'algorithme de Gauss, la complexité calculatoire est en $O(n^3)$ où n est l'ordre de la matrice considérée.
En effet, il faut mettre en place trois boucles imbriquées, indexée par n (pas tout à fait l'une est triangulaire).

Correction
On applique l'algorithme de Gauss-Jordan en considérant $(A|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \left\{ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \right. \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}\right.$$

Par suite d'opérations élémentaires, on a transformé A en I_3 donc A est inversible.
Par suite des mêmes opérations élémentaires, on a transformé I_3 en A^{-1}, donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Savoir faire - Invariant de boucle
On notera qu'à chaque étape, en partant du couple $(A|I_n)$, on obtient un couple de matrice de la forme $(C|D)$ qui vérifie : $C = A \times D$.
(Cela est vrai à l'étape 1 : $A = A \times I_n$ et à la dernière : $I_n = A \times A^{-1}$.)
Cela permet de vérifier les calculs intermédiaires.

Remarque - Et si A n'est pas inversible?
Si A n'est pas inversible, alors l'algorithme conduit à une matrice échelonné (triangulaire supérieure) dont la diagonale possède (au moins) un zéro. Il est alors totalement impossible d'obtenir I_n.
Nous verrons plus loin que l'algorithme donne alors une nouvelle information à propos de la matrice A : son rang!

Exercice
Déterminer les inverses de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

_____

Correction
On applique l'algorithme de Gauss-Jordan en considérant $(A|I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \right.$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3} L_2 \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{3}{11} L_3 \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{-1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right) \quad \left\{ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_3 \right.$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{11} & \frac{1}{22} & \frac{7}{22} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{-1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right) \quad \left\{ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2} L_2 + L_3 \right.$$

Par suite d'opérations élémentaires, on a transformé A en I_3 donc A est inversible.
Par suite des mêmes opérations élémentaires, on a transformé I_3 en A^{-1}, donc $A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 18 & 1 & 7 \\ -2 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 65 & -76 & 35 \\ -76 & 89 & -41 \\ 35 & -41 & 19 \end{pmatrix}$ et $D^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & 9 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ -6 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

6. Bilan

Synthèse

⇝ Les problèmes à double entrées se codent dans des tableaux. Ces problèmes s'articulent lorsqu'ils ont une entrée commune ; cela se code par la multiplication des tableaux. Nous avons ainsi défini des opérations sur les tableaux (à taille fixée), donnant une structure d'anneau et d'espace vectoriel à cet ensemble (lorsque les dimensions correspondent bien). Attention c'est un anneau non commutatif, avec des diviseurs de zéros…

⇝ Un espace est particulièrement intéressant, celui des matrices de taille carrée, car dans cette situation, elles codifient les transformations d'un espace sur lui-même. Cas très fréquent.
Pour ces matrices, on peut être amené à étudier leurs puissances A^n (cf. Sciences physiques). Mais ici on se concentre surtout sur l'étude de l'inversibilité de A et le calcul de A^{-1} si possible.

⇝ On met en place un algorithme pour répondre à ces questions. C'est un algorithme sur les matrices, mais qui se code aussi par du calcul matriciel. Ainsi on voit les matrices (ou plutôt des ensembles de matrices) agir sur les matrices (ou plutôt d'autres ensembles de matrices). Cela nous donne l'idée de considérer des actions de groupes $GL_n(\mathbb{K})$ (groupe des matrices carrées de taille n, inversibles) sur tout plein d'ensembles.
En exploitant cette idée, on dégage la notion de rang d'une matrice ; il est invariant par produit par matrices inversibles à droite et à gauche et on trouve une forme normalisée adaptée (pour la relation d'équivalence qui conserve le rang). Cette méthode est exploitée similairement dans plein d'autres parties des mathématiques (matrices congruentes, matrices semblables…)

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Notations
— Savoir-faire - Notation et multiplication matricielle
— Savoir-faire - Présentation des calculs
— Savoir-faire - Exploiter un polynôme annulateur pour trouver M^{-1}
— Savoir-faire - Exploiter un polynôme annulateur pour trouver M^n
— Savoir-faire - Montrer qu'une matrice est triangulaire supérieure
— Savoir-faire - Retenir les opérations matricielles codant les transformations élémentaires.
— Savoir-faire - Inversibilité et inverse d'une matrice par algorithme de Gauss
— Savoir-faire - Invariant de boucle

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{K})$	Ensemble (espace) des matrices avec n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$		On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$
$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$	Ensemble (espace) des matrices symétrique (nécessairement carrées), resp. antisymétrique	$A^T = A$, resp. $A^T = -A$	
$GL_n(\mathbb{K})$	Groupe (linéaire) des matrices carrées d'ordre n inversible		
${}^i[A]_j$ ou $[A]_{i,j}$ ou $\text{Coeff}_{i,j}(A)$	Coefficient en ligne i et colonne j de la matrice A	C'est une application linéaire	${}^i[AB]_j = \sum_{k=1}^{n} {}^i[A]_k {}^k[B]_j$
${}^tA$ ou A^T	Transposée de la matrice A	${}^i[A^T]_j = {}^j[A]_i$	Application linéaire involutive
A^n, A^{-1}	Puissance n^e de A (par récurrence). Inverse de A (si inversible)		
$\text{Tr}(A)$	Trace de A (somme des coeff. sur la diagonale)	$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} {}^i[A]_i$	$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
$(E_{i,j})_{i,j}$	Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	${}^h[E_{i,j}]_k = \delta_{i,h}\delta_{j,k}$	$E_{i,j} \times E_{h,k} = \delta_{j,h} E_{i,k}$
$P_{i,j} = I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$	Matrice de transposition	Inversion des lignes (resp. colonnes) i et j si multiplication par la gauche (resp. la droite)	$P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$
$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$	Matrice de transvection	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à gauche (resp. $C_j \rightarrow C_j + \lambda C_i$ - à droite)	$T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$
$D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{i,i}$	Matrice de dilatation	$L_i \leftarrow \alpha L_i$ à gauche (resp. $C_i \rightarrow \alpha C_i$ - à droite)	$D_i(\alpha)^{-1} = D_i(\frac{1}{\alpha})$
$J_r(n,p) = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$	Matrice J_r	$\text{rg}(A) = r \iff \exists P,Q \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ tel que $A = P \times J_r \times Q$	

Retour sur les problèmes

25. Addition naturelle des éléments de mêmes caractéristiques (donc situés dans une même case)

26. L'interprétation en terme de graphes qui figure dans la marge donne des éléments de réponse à ce problème.
$[A]_{ij}$ est le coefficient de dépendance de la moyenne de l'élève i par rapport à la note j.
$[B]_{j,k}$ est le poids de la partie k dans la note j.
Alors $[AB]_{i,k}$ est le coefficient de dépendance de la moyenne de l'élève i par rapport aux parties k.

27. La matrice de la question n'admet aucune racine. On démontre qu'on devrait la chercher parmi les matrices triangulaires avec des zéros sur la diagonale : $a = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors $a^2 = \begin{pmatrix} 0 & & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il n'y a pas de racine.
En revanche, le même calcul montre que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $a = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une racine de $a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui admet donc une double infinité de racines…

28. L'anneau des matrices n'est pas commutatif, les éléments ne sont pas tous inversibles ni régulier. Il y a des diviseurs de 0.
Les seules matrices qui commutent avec toutes les matrices sont les λI_n.
($AE_{i,j} = \sum_k [A]_{k,i} E_{k,j}$ et $E_{i,j}A = \sum_{\mathbb{K}} [A]_{j,k} E_{i,k} \Rightarrow [A]_{i,j} = 0$ si i $\neq j$ et $[A]_{i,i} = [A]_{j,j}$)
Essentiellement (à peu de choses près…) si B commute avec A, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$…

29. Oui si A n'est pas inversibles, alors $\mathrm{Ker}(A) \neq \emptyset$. Il existe une colonne X tel que $AX = 0$.
Si $B = (X|X|\cdots|X)$ alors $AB = 0$.
Pour étudier l'inversibilité de A, on peut étudier son noyau. On peut aussi exploiter la méthode de Gauss-Jordan.
30. Voir cours.

Deuxième partie

Techniques analytiques, à travers l'histoire

Chapitre 6

Fonctions *à la Euler*

Résumé -

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux principales fonctions usuelles des mathématiques pré-eulerien (donc, jusqu'à la fonction Γ*, exclue).*
Nous reprenons les constructions historiques qui conduisent à ces fonctions, en espérant qu'ainsi, les propriétés caractéristiques de chacune seront mieux mémorisées.
Pour préparer le cours sur la dérivation des fonctions usuelles, nous donnerons une série d'inégalités localisées suffisantes pour calculer les dérivées.
Enfin, nous terminons ce chapitre en donnant une liste d'évaluations numériques des fonctions usuelles sous forme de somme infinies (convergentes). Nous en reparlerons (beaucoup) plus tard.

— *Kahn Académy - Qu'est-ce qu'une fonction exponentielle ?. https ://www.youtube.com/watch ?v=pBeGfLoId4I*
— *Micmath - Merveilleux logarithmes. https ://www.youtube.com/watch ?v=rWfl7Pw8YVE*

Sommaire

1. Problèmes

Histoire - Evolution de la notion de fonction

Pour Leibniz puis Euler, qui a été le premier à utiliser le mot de « fonction » et pour les mathématiciens du XVIII-ième siècle, l'idée de relation fonctionnelle était plus ou moins assimilée à l'existence d'une formule mathématique simple exprimant la nature exacte de cette relation. Cette conception s'est révélée trop étroite pour les exigences de la physique mathématique, et l'idée de fonction, ainsi que la notion de limite qui lui est associée, ont subi un long processus de clarification et de généralisation.

Par exemple : $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ n'est pas une fonction pour Euler; mais pour nous (et vous ?) c'est bien une fonction !

Problème 27 - Fonction par morceaux

L'application $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est-elle bien une fonction (à la « Euler ») ?

Problème 28 - Comment calculer π^e ?

Pour l'étude des fonctions usuelles, il est très important pour chacun d'être en mesure de savoir comment faire le calcul des valeurs, sans raccourci avec la calculatrice.
Il faudra néanmoins faire ces calculs pour les nombres rationnels (et pour les nombres réels, on verra plus loin...).
Les nombres π et e sont des nombres réels bien définis.
Comment faire ce calcul ? Les nombres réels sont approchés par des nombres rationnels.
On va donc commencer par essayer de calculer $\left(\frac{22}{7}\right)^{\frac{8}{3}}$, puis de manière générale de r^z où $r, z \in \mathbb{Q}$.
Deux temps d'analyse :

1. On fixe $z \in \mathbb{Q}$ et on étudie $t \mapsto t^z$, pour $t \in \mathbb{R}$. Ce sont les fonctions puissances.
2. On fixe $r \in \mathbb{Q}$ puis $r \in \mathbb{R}$ et on étudie $t \mapsto r^t$, pour $t \in \mathbb{R}$. Ce sont les fonctions exponentielles.

Problème 29 - Interpolation de la suite géométrique

Existe-t-il une fonction simple (polynomiale) qui interpole la suite géométrique de raison r (= 2 par exemple) ?
Comment l'étudier ?

Problème 30 - De la multiplication à l'addition

Additionner deux nombres de tailles n se fait en gros en $2n$ calculs. Pour les multiplier l'algorithme classique nécessite n^2 multiplications de chiffres, puis une addition de n nombres...
Peut-on trouver un moyen simple qui transmute les multiplications en additions ? Une fonction telle que : $f(a \times b) = f(a) + f(b)$?

2. Généralités sur les fonctions

2.1. Définition et opérations sur les fonctions

Définition - Fonction

Une *fonction* d'une variable réelle, à valeurs réelles, est un "procédé" qui à chaque élément x d'un sous-ensemble $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ associe un réel $f(x)$ parfaitement déterminé. Une telle fonction est notée

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

$f(x)$ est appelé *image* de x par f.
Si $y \in \mathbb{R}$, tout élément x de $\mathscr{D}$ vérifiant $f(x) = y$ est appelé un *antécédent* de y.

Remarque - Ensemble de définition

Le fait d'écrire $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ sous-entend que $f(x)$ est parfaitement défini si $x \in \mathscr{D}$.
Il est toutefois fréquent en pratique que l'ensemble $\mathscr{D}$ ne soit pas connu a priori. A partir de l'expression de $f(x)$, il faut déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels elle a un sens. Cet ensemble est appelé domaine de définition de f (généralement noté $\mathscr{D}_f$). Il est souvent constitué d'une réunion d'intervalles.

Définition - Ensemble des applications

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.
On note $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (on parle aussi d'applications de I dans $\mathbb{R}$)

Définition - Opérations classiques

Dans $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ on définit les opérations suivantes :

— Addition : si $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})^2$, la fonction $f + g$ est définie sur I par
$$\forall x \in I, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

— Multiplication par un réel : si $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est définie sur I par
$$\forall x \in I, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

— Produit de deux fonctions : si $(f, g) \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})^2$, la fonction fg est définie sur I par
$$\forall x \in I, (fg)(x) = f(x) \times g(x)$$

— Valeur absolue d'une fonction : si $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ la fonction $|f|$ est définie sur I par
$$\forall x \in I, |f|(x) = |f(x)|$$

Remarque - Lois internes...

Addition et multiplication de deux applications sont des lois internes sur $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, commutatives, associatives, l'application nulle est élément neutre pour l'addition et toute application f admet un opposé : l'application $-f$, l'application constante égale à 1 est élément neutre pour la multiplication, la multiplication est distributive par rapport à l'addition. (On parle d'anneau pour décrire un ensemble ayant deux telles lois internes).

Définition - Composée

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(I) \subset J$. On définit la composée $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ par
$$\forall x \in I, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

En général, même lorsque les deux fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens, elles sont différentes.
Exercice
Définir proprement les deux composées (si cela est possible) des fonctions suivantes (ou de leurs restrictions) :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 1 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Correction

$f\circ g:\ \mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{x^2}-1$ et $g\circ f:\ \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{x^2-1}$

2.2. Représentation d'une fonction

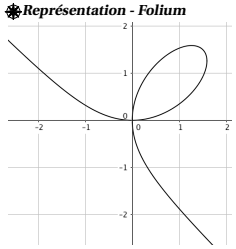
Graphe - sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$

Définition - Graphe dans $\mathbb{R}^2$
Soit $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.
On note $\Gamma_H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid H(x,y)=0\}$, une sous-partie de $\mathbb{R}^2$.
On dit que $H(x,y)=0$ est une équation du graphe Γ.

Sans condition supplémentaire sur H, Γ peut être très variés.

Exemple - Folium de Descartes
DESCARTES et ROBERTVAL ont étudié dans leur correspondance la courbe $\mathscr{F}$ d'équation $x^3+y^3-3xy=0$ (cubique).
Sa représentation graphique est dans la marge.

Représentation - Folium



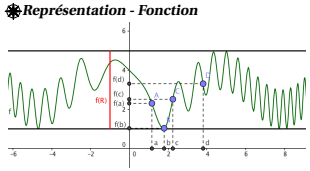
$\mathscr{F}$ *d'équation* $x^3+y^3-3xy=0$

Définition - Exemple. Graphe d'une fonction
Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on appelle représentation graphique de f (ou graphe de f), la courbe $\mathscr{C}=\{(x,f(x));x\in\mathscr{D}_f\}$.
On dit que $\mathscr{C}$ a pour équation $y=f(x)$ (car $\mathscr{C}=\{(x,y)/in\mathbb{R}^2\mid y=f(x)\}$.
On appelle aussi *représentation graphique* ou *courbe représentative de* f la représentation de cet ensemble dans le plan. La courbe représentative a pour équation $y=f(x)$.

Dans ce cas $H:(x,y)\mapsto y-f(x)$. Une telle courbe ne peut « revenir en arrière ». En effet, cela signifierait qu'un nombre x_0 aurait deux images.

Définition - Image de $\mathscr{D}$ par une fonction. Fonction restreinte
Si $\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}_f$ ($\mathscr{D}'$ sous ensemble de $\mathscr{D}_f$), on note $f(\mathscr{D}')$ l'ensemble des images des éléments de $\mathscr{D}'$: $f(\mathscr{D}')=\{f(x);x\in\mathscr{D}'\}$. $f(\mathscr{D}')$ s'appelle *l'ensemble image (ou image directe)* de $\mathscr{D}'$ par f.
Soit $f:\mathscr{D}_f\to\mathbb{R}$ une fonction et I un intervalle inclus dans $\mathscr{D}_f$. On appelle *restriction* de f à I la fonction g définie sur I par : $\forall x\in I,\ g(x)=f(x)$. On la note $f_{|I}$.

Représentation - Fonction



Pour tracer on commence bien par tous les points en noir : $x_i, f(x_i)$*, on en déduit* $A_i(x_i,f(x_i))$*. Puis on relie tous ces points* A_i*, une courbe apparait !*
L'image de f *est ici donné en rouge : c'est le segment* $[1,5]$.

Transformations graphiques

On commence par un travail d'analyse essentiel.

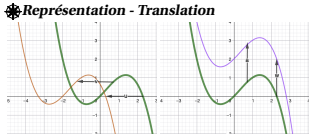
Analyse - Symétrique
$x\mapsto x'=2a-x$ associe à tout $x\in\mathbb{R}$, le nombre x', symétrique par rapport au point A d'ordonné a.
En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, le milieu de $[xx']$ (ou $[x'x]$) est le nombre $\frac{x+x'}{2}=\frac{2a-x+x}{2}=a$.
Ce résultat est vrai, également si l'on regarde les abscisses.

Heuristique - Lieu des transformations
Pour les transformations suivantes, on notera qu'il peut y avoir un impact sur $\mathscr{C}$ d'équation $y=f(x)$:

— sur l'axe des abscisses, lorsque la transformation g est du type $f\circ g$
— sur l'axe des ordonnées, lorsque la transformation g est du type $g\circ f$

Proposition - Translations
Le graphe de la fonction $x\mapsto f(x+a)$ s'obtient à partir de celui de f par une translation du vecteur $-a\vec{j}$. Le graphe de la fonction $x\mapsto f(x)+a$ s'obtient à partir de celui de f par une translation du vecteur $a\vec{j}$.

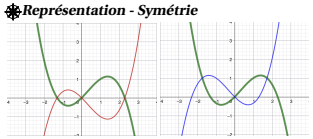
Représentation - Translation



$y=f(x+2)$ $y=f(x)+2$
$y=f(x)$ *est la courbe épaisse*

Proposition - Symétries
Le graphe de la fonction $x\mapsto f(-x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Oy).
Le graphe de la fonction $x\mapsto -f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Ox).

Représentation - Symétrie

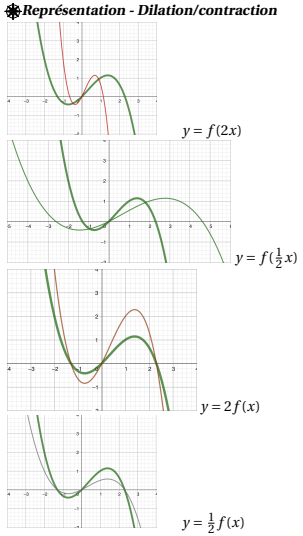


$y=f(-x)$ $y=-f(x)$

Pour la transformation suivante, on parle habituellement d'affinité (nom officiel des ces transformations), car il s'agit de dilatation/contraction selon une seule dimension (abscisse oux ordonnée) et non de deux dimensions (sinon ce serait une homothétie).

Proposition - Dilatation/contraction
Soit $\lambda>0$.
Le graphe de la fonction $x\mapsto f(\lambda\cdot x)$ s'obtient à partir de celui de f par une contraction horizontale de rapport λ (si $\lambda>1$) et une dilatation horizontale de rapport $\frac{1}{\lambda}$ (si $\lambda<1$).
Le graphe de la fonction $x\mapsto\lambda\cdot f(x)$ s'obtient à partir de celui de f par une dilatation verticale de rapport λ (si $\lambda>1$) et une contraction verticale de rapport $\frac{1}{\lambda}$ (si $\lambda<1$).

Représentation - Dilation/contraction

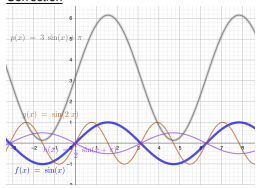


$y=f(2x)$
$y=f(\frac{1}{2}x)$
$y=2f(x)$
$y=\frac{1}{2}f(x)$

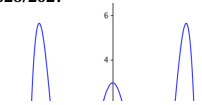
Savoir faire - Transformation sur le graphe
Soient $f:\mathscr{D}_f\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$.
Comment obtient-on les domaines de définition ainsi que les graphes (ou représentations graphiques) des fonctions $x\mapsto f(x)+a$, $x\mapsto f(x+a)$, $x\mapsto f(a-x)$, $x\mapsto af(x)$?
$x\mapsto f(x)+a:\mathscr{D}_1=\mathscr{D}$ et translation de $a\vec{j}$,
$x\mapsto f(x+a):\mathscr{D}_2=\{x\mid x+a\in\mathscr{D}\}=\mathscr{D}-a$ et translation de $-a\vec{i}$,
$x\mapsto f(a-x):\mathscr{D}_3=\{x\mid a-x\in\mathscr{D}\}$ (ex : si $\mathscr{D}=[c,d[$, alors $\mathscr{D}_3=]a-d,a-c]$) et reflexion (symétrie) d'axe d'équation $x=\frac{a}{2}$ $x\mapsto af(x)$: $\mathscr{D}_4=\mathscr{D}$ et homotétie-axiale de rapport a et de « centre » l'axe des abscisses.

Exercice
Tracer $y=\sin x$.
Puis les représentations de $y=\sin(2x)$, $y=\frac{1}{2}\sin(x+\pi)$, $y=3\sin(x)+\pi$

Correction



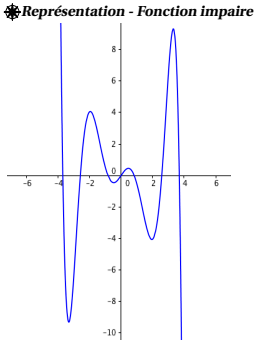
Représentation - Fonction paire



2.3. Vocabulaire d'analyse de fonctions

Parité, périodicité

❁ ***Représentation - Fonction impaire***



Définition - Vocabulaire (et propriétés)
Soit $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction
• On dit que f est *paire* si

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, -x \in \mathscr{D}_f \text{ et } f(-x) = f(x)$$

$\mathscr{C}_f$ est alors symétrique par rapport à Oy
• On dit que f est *impaire* si

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, -x \in \mathscr{D}_f \text{ et } f(-x) = -f(x)$$

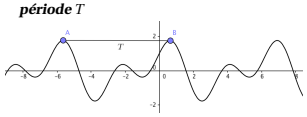
$\mathscr{C}_f$ est alors symétrique par rapport à O.
• $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que

$$\forall x \in D_f, x + T \in D_f, x - T \in D_f \text{ et } f(x + T) = f(x).$$

T est une période de f. $\mathscr{C}_f$ est alors invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.

On laisse les démonstrations au lecteur.

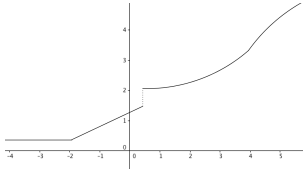
❁ ***Représentation - Fonction périodique de période*** T



Fonctions monotones

Définition - Fonction croissante, décroissante et monotone
On dit qu'une fonction f
— est croissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
— est décroissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
— est monotone sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.
— est *strictement* croissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
— est *strictement* décroissante sur I si $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

❁ ***Représentation - Fonction strictement croissante***



Fonction (a priori) croissante (et non dérivable !).

Proposition - Composition et monotonie
La composée de deux applications monotones de même sens de variation (respectivement de sens contraire) est une application croissante (respectivement décroissante).

La démonstration est simple…

Démonstration
Supposons que f et g sont décroissants.
Soit $x \leqslant y \in \mathscr{D}_{g\circ f}$, alors :
$f(x) \geqslant f(y)$
$(g \circ f)(x) \leqslant (g \circ f)(y)$.
Donc $g \circ f$ est décroissante…□

Fonctions convexes/concaves

Pour aller plus loin - Fonctions convexes
Nous étudierons tout particulièrement les fonctions convexes dans un prochain chapitre

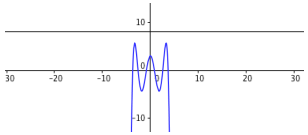
Définition - Fonction convexe, concave
On dit qu'une fonction f
— est convexe sur I si
$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1]\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
— est strictement convexe sur I si
$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in]0, 1[\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
— est concave sur I si
$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1]\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

— est strictement concave sur I si
$\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in]0, 1[\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Fonctions (ou applications) bornées

Définition - Fonctions majorées, minorées, bornées
On dit qu'une fonction f :
— est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathscr{D}_f, f(x) \leqslant M$.
— est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathscr{D}_f, m \leqslant f(x)$.
— est bornée si elle est majorée et minorée.

❁ ***Représentation - Fonction majorée, minorée?***



Fonction (a priori) majorée et non minorée, donc non bornée.

Proposition - Bilan
Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est bornée
si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$.

Extremums

Définition - Maximum, minimum et extremum
On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un maximum sur I de f si
- $\forall x \in I, f(x) \leqslant M$
- et il existe $a \in I$ tel que $f(a) = M$
on dit que f présente un maximum en a.

On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un minimum sur I de f si
- $\forall x \in I, f(x) \geqslant m$
- et il existe $a \in I$ tel que $f(a) = m$
on dit que f présente un minimum en a.

On parle d'extremum lorsque l'on a un maximum ou un minimum. On note

$$M = \max_{x \in I} f(x) \text{ et } m = \min_{x \in I} f(x)$$

Définition - Maximum local
On dit que $M = f(a)$ est un *maximum local* (maximum ou minimum)
s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap D_f$, $f(x) \leqslant f(a)$.
On parle de *maximum strict*, lorsque pour $x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap D_f$ et $x \neq a$, $f(x) < f(a)$.

Remarque - Voisinage de a (dans $\mathbb{R}$
Pour décrire un tel ensemble V, on parle souvent de voisinage de a.
Ainsi la restriction de f à $V =]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap D_f$ présente en a un extremum (stricte) respectivement).

Remarque - Extension de définition
La définition s'étend à minimum local et minimum local strict et à maximum local et maximum local strict.

❁ ***Représentation - Exemple***
Sur la représentation de la fonction majorée non minorée, on peut voir trois maximums (maxima) locaux, tous stricts et deux sont aussi maximum global…

2.4. Bijections et réciproques

On commence par rappeler ce qu'est une fonction bijective avant de voir le rôle joué ici par la dérivée.

Bijection

Définition - Bijection
Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$.
On dit que f est bijective de D sur J (ou réalise une bijection de D sur J)
— si tout élément de D a son image dans J
— et si tout élément de J admet un unique antécédent par f dans D
Formellement :

$$\forall x \in D,\ f(x) \in J \quad \text{et} \quad \forall y \in J, \exists! x \in D,\ y = f(x).$$

Remarque - Si, par convention $J = f(D)$
Si l'on pose $J = f(D) = \{f(x); x \in D\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D, y = f(x)\}$,
alors f *est une bijection de* D *sur* $J = f(D)$ *si et seulement si* $\forall y \in J, \exists! x \in D,\ y = f(x)$.

Exemple - Application exponentielle
L'application exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Définition - Application (bijection) réciproque
Si f est bijective de D sur J, on définit une fonction g par

$$g : \begin{array}{l} J \to D \\ y \mapsto x \quad \mid y = f(x) \text{ (unique antécédent de } y \text{ par } f) \end{array}$$

Cette fonction g est elle-même bijective et appelée bijection réciproque de f, et notée f^{-1}.

Exemple - Application logarithmique
L'application logarithmique (naturelle) est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. C'est la bijection réciproque de la fonction exponentielle.

Proposition - Application directe
Si f est une bijection de D sur J, on a

$$\forall x \in D, (f^{-1} \circ f)(x) = x;$$

$$\forall y \in J, (f \circ f^{-1})(y) = y;$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Théorème - Réciproque et représentation graphique
Soit $f : I \to J$ une bijection et $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque. Alors
— dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).
— Si f est monotone sur I alors f^{-1} est monotone sur J, de même sens de variations.

On verra des exemples plus loin.

Démonstration
Pour montrer la symétrie dans le graphique, il nous faut alors montrer l'équivalence entre :
$M(x,y) \in \mathscr{C}_f$ et $M'(y,x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}$.
Or

$$M' \in \mathscr{C}_{f^{-1}} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}_f$$

Concernant la monotonie, supposons que f soit croissante, :
considérons $x \leqslant y \in J$,
si $f^{-1}(x) > f^{-1}(y)$, alors par croissance de f : $x > y$. Absurde.
donc, nécessairement : $f^{-1}(x) \leqslant f^{-1}(y)$ et f^{-1} est croissante.
De même si f^{-1} est croissante, alors sa réciproque, i.e. f est également croissante.
Le cas décroissant est laissé en exercice.□

On admet les théorèmes qui suivent et qui seront démontrés ultérieurement :

Théorème - Théorème de la bijection
Soit f une fonction définie sur I, continue, strictement monotone sur I (intervalle de $\mathbb{R}$),
alors f est bijective de I sur $J = f(I)$.
Sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J.

2.5. Etude des branches infinies en ∞

Le but est de préciser l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de (+ ou -) l'infini.

Savoir faire - Etude des branches infinies (et définition)
Soit f une fonction définie au voisinage de $\pm\infty$.

1. si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, la courbe admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$.
2. si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, on calcule $\dfrac{f(x)}{x}$.
   (a) si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, il y a une **branche parabolique horizontale** (ou de direction Ox).
   (b) si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, il y a une **branche parabolique verticale** (ou de direction Oy).
   (c) si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, $a \in \mathbb{R}^*$, il faut calculer $f(x) - ax$.
      i. si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, la courbe admet une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$.
      ii. si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = \infty$ il y a une **branche parabolique oblique de direction** $y = ax$.

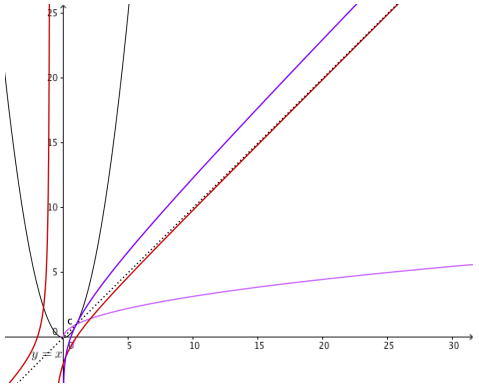
Exercice
Énoncer des fonctions présentant :

1. une asymptote horizontale (on donnera l'équation de cette asymptote)
2. une branche parabolique horizontale
3. une branche parabolique verticale
4. une asymptote oblique (on donnera l'équation de cette asymptote)
5. une branche parabolique oblique (on donnera la direction), mais pas d'asymptote oblique

Correction

1. $y = \arctan(x)$ admet une asymptote horizontale : $y = \frac{\pi}{2}$
2. $y = \sqrt{x}$ admet une branche parabolique horizontale
3. $y = x^2$ admet une branche parabolique verticale
4. $y = \dfrac{2x^2+x-2}{x+1} (= 2x - 1 - \frac{1}{x+1})$ admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 1$
5. $y = 3x + \ln x$ admet une branche parabolique oblique d'équation $y = 3x$.

Exercice
Indiquer sous chacun des quatre graphiques suivants lesquels présentent des branches paraboliques, des asymptotes…



Correction
En noir : branche parabolique verticale, en bleu une branche parabolique oblique d'équation $y = x$, en rouge un courbe avec asymptote d'équation $y = x$ et en violet une courbe avec une direction parabolique horizontale.

Remarque - Courbe asymptote
Plus généralement on dit que la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$ ou un réel a) admet pour courbe asymptote la courbe d'équation $y = g(x)$ si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = 0$.

3. Fonctions trigonométriques

On reprend, de manière analytique (où le paramètre x devient une variable) les fonctions trigonométriques vues précédemment.

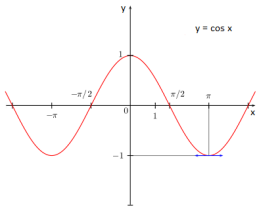
3.1. Fonctions circulaires

Proposition - Aspect analytique
Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.
sin est une fonction impaire alors que cos est une fonction paire.

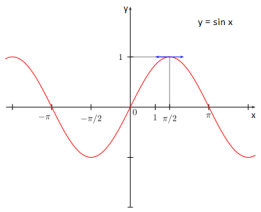
Savoir faire - Transférer un problème trigonométrique « en a », vers « en 0 »
Il faut exploiter les formules trigonométriques : $\sin(a+h) = \sin a\cos h + \cos a \sin h$ et $\cos(a+h) = \cos a\cos h - \sin a \sin h$, à connaître par coeur.

Analyse - Inégalité fondamentale
On termine cette partie par une observation essentielle :
Rappelons que θ est la longueur de l'angle
(on peut aussi comparer l'aire du triangle BCA', égale à $\frac{1\times CA}{2} = \frac{1}{2}\sin\theta$
à l'aire (plus grande) de la portion du disque BCA égale à $\frac{\theta}{2\pi}\times\pi 1^2 = \frac{1}{2}\theta$.)
Pour la seconde inégalité, on calcule deux aire :
— l'aire de la portion du disque BAC : elle vaut $\frac{\theta}{2}R^2 = \frac{\theta}{2}$ car $R = 1$
— l'aire du triangle rectangle $BA'C'$: elle vaut $\frac{1}{2}BA'A'C' = \frac{\tan\theta}{2}$.
« Clairement » la seconde aire est plus petite que la première.

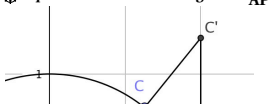
Représentation - Fonction cosinus



Représentation - Fonction sinus



Représentation - Cercle trigonométrique



Proposition - Inégalité
On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration
On a vu (dans l'analyse) que pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.
Puis en multipliant par $-1 < 0$: $-\sin x \geqslant -x \geqslant -\tan x$.
et par imparité si $x_- \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$: $\sin(x_-) = -\sin(-x_-) \geqslant -(-x_-) \geqslant -\tan(-x_-) = \tan(x_-)$.
Ainsi pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $|\sin(x)| \leqslant |x| \leqslant |\tan(x)| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$
Donc en divisant par $|x|$ et en séparant en deux inégalités :

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \cos x \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right|$$

Par encadrement : $\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
Ainsi sin est dérivable en 0 de dérivée égale à 1. □

Exemple - Calculatrice. Calculer $\sin(0,01234)$
On obtient $\sin(0,01234) = 0,01233968682$

Exercice
En majorant le module de $e^{ix} - 1$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + (\cos x - 1)^2 \leqslant x^2$.

Correction
Soit $x \in \mathbb{R}$, la factorisation par l'angle moitié donne : $e^{ix} - 1 = e^{i\frac{x}{2}}(2i\sin\frac{x}{2})$, donc

$$|e^{ix} - 1| = 1 \times 2|\sin\frac{x}{2}| \leqslant |x|$$

Si on élève au carré :

$$(\cos x - 1)^2 + \sin^2 x \leqslant x^2$$

Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique
La fonction tangente est ainsi définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ ($\mathbb{R}$ privé des points de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).
tan est impaire, π-périodique

Démonstration
Il s'agit de la division de deux fonctions dérivables. Sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ (le cosinus ne s'annule pas) : □

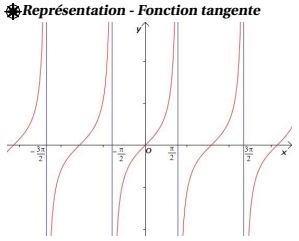
Exercice
Etudier et représenter la fonction tan

Correction
La fonction tan est définie sur $\mathscr{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos\theta \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
La fonction tan est π-périodique d'après la formule trouvée plus haut.
On peut l'étudier sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, puis exploiter des translations de vecteurs $\pi\vec{i}$.
Par division de deux fonctions dérivables, tan est dérivable sur son ensemble de définition.

$$\forall\, x \in \mathscr{D}, \qquad \tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

La fonction tan est donc strictement croissante sur les intervalles de la forme $]\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}[$ et à valeurs dans $]-\infty, \infty[$.
$\tan(0) = 0$ et la pente de la tangente au point 0a pour pente : $\tan'(k\pi) = \frac{1}{\cos^(k\pi)} = 1$.
Enfin, comme $\frac{1}{\cos^2}$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, tan est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $\frac{1}{\cos^2}$ est décroissante sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$, tan est concave sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$.
On obtient la représentation graphique suivante :

Représentation - Fonction tangente

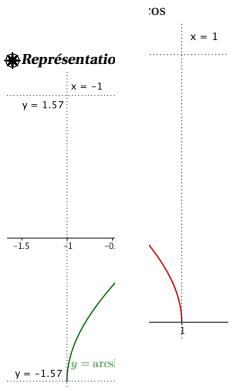


3.2. Fonctions circulaires réciproques

Fonction arcsin

Définition - Arcsinus
La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ donc réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$.
La bijection réciproque s'appelle arcsinus, $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
Elle est impaire, strictement croissante. On a donc :

$$t = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin t = x \text{ et } t \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right)$$



Proposition - Rappels
On a :
- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = x$
- $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arcsin x) = x$
- $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\forall x \in]-1,1[$, $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Analyse - Questions
Comment démontrer tout cela ?
Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Exercice
Comparer $\arcsin x$ et x, à partir de la double inégalité fondamentale du sinus.

Correction
On a vu pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|$.
Posons $x = \arcsin u$, pour $u \in]-1,1[$; donc $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

$$|u| \leqslant |\arcsin u| \leqslant |\tan(\arcsin u)| = \frac{|u|}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Fonction arccos

Définition - Arccosinus
La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
La bijection réciproque s'appelle arccosinus, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.
Elle est strictement décroissante et on a donc :

$$t = \arccos x \Leftrightarrow \left(\cos t = x \text{ et } t \in [0,\pi]\right)$$

Proposition - Rappels
On a :
- $\forall x \in [0,\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$
- $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos x) = x$
- $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
- $\forall x \in [-1,1], x \neq 0$, $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- $\forall x \in [-1,1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Fonction arctan

Définition - Arctangente
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque s'appelle arctangente, $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
Elle est impaire, strictement croissante et on a donc :

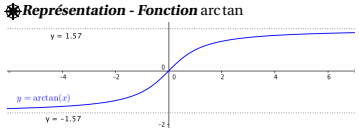
$$t = \arctan x \Leftrightarrow \left(\tan t = x \text{ et } t \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\right)$$

Proposition - Rappels
On a :
- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Représentation - Fonction arctan



4. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

On reprend, de manière analytique (où le paramètre x devient une variable) les fonctions puissances et polynomiales vues précédemment.

4.1. Fonction puissance entière relative

Définition

Définition - Puissance entière > 0
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on qualifie de fonction puissance entière l'application $x \mapsto x^n$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto x \times x^{n-1}$ et $x^0 = 1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. C'est une fonction continue (nous le verrons plus tard).
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

Pour aller plus loin - Besoin d'inégalités
Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a toujours besoin d'encadrement.
Dans chaque partie, on trouvera des inégalités importantes

Il faut savoir représenter ces fonctions.

Définition - Puissance entière < 0
Soit $m \in \mathbb{Z}_-$, on qualifie de fonction puissance entière négative l'application $x \mapsto x^m = \dfrac{1}{x^{-m}}$, i.e. définie par récurrence par $x \mapsto \dfrac{1}{x} \times x^{m+1}$ et $x^0 = 1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

Il faut savoir représenter ces fonctions, en particulier l'hyperbole $\mathscr{C}$ associé à $x \mapsto \frac{1}{x}$ $(m = -1)$.

Proposition - Morphisme
On a pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $x^m \times x^n = x^{m+n}$.
Vrai également en $x = 0$, si $n, m > 0$.

Exercice
A démontrer

Correction
On fixe $m \in \mathbb{Z}$, et on fait une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Puis, on étudie le cas $n < 0$, avec $-m \in \mathbb{Z}$: $x^{-m} \times x^{-n} = x^{-m+-n} \dots$

Inégalités de croissance

Fixons $n \in \mathbb{N}$.
Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton, par exemple :

Proposition - Binôme de Newton. Croissance
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$.
Avec $a, x > 0$, on a donc $x < x' \Rightarrow x^n < x'^n$, soit la croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration
$a = x' - x > 0$, $x'^n = x^n + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k}_{>0} > x^n$. □

Exercice
Faire la démonstration par récurrence.
On fera bien attention aux variables fixées et celles qui sont libres

Correction
On peut fixer x et x' dans $\mathbb{R}_+$, par exemple : $0 \leqslant x < x'$.
Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$: « $0 \leqslant x^n < x'^n$. »
— $\mathscr{P}_1$ est vraie par hypothèse.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
Comme $x \geqslant 0$: $x^{n+1} = x^n \times x \leqslant x'^n \times x$, d'après $\mathscr{P}_n$.
Puis comme $x < x'$ et $x'^n > 0$: $x'^n \times x < x'^n \times x' = x'^{n+1}$.
Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
La récurrence est démontrée : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x^n < x'^n$.
Ceci est vraie pour tout $0 \leqslant x < x'$, on a donc :
$\forall\, (x, x', n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $x < x'$: $x^n < x'^n$,
On a donc encore : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, 0 \leqslant x < x'$, $x^n < x'^n$, donc $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Peut-on se passer de $0 \leqslant$ dans l'écriture de $\mathscr{P}_n$?

Histoire - Not
sances négati
Cette notation ém
(1572), Simon Stev

Inégalités de Bernoulli

Proposition - Inégalités de Bernoulli
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^n \leqslant \dfrac{1}{1-nx}$

Démonstration
Par récurrence, on note $\mathscr{P}_n$: « $\forall\, x > -1$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ et $\forall\, x \in [-1, \frac{1}{n}]$, $(1+x)^n \leqslant \dfrac{1}{1-nx}$ ».
— Le résultat est vrai pour $n = 0$ (et $n = 1$ (immédiat)).
Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
Soit $x > -1$. On a donc $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x) \leqslant (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$,
car : $1 + x > 0$ et $nx^2 \geqslant 0$.
De même si $x \in]-1, \frac{1}{n+1}[(\subset]-1, \frac{1}{n}[$, $(1+x)^{(n+1)} = (1+x) \times (1+x)^n \leqslant \dfrac{1+x}{1-nx}$ car $1 + x > 0$.
Or $(1+x)(1-(n+1)x) = 1 - nx - (n+1)x^2 \leqslant 1 - nx$ car $(n+1)x^2 \geqslant 0$.
Ainsi, en divisant par $(1-(n+1)x)(1-nx) \geqslant 0$: $(1+x)^{(n+1)} \leqslant \dfrac{1+x}{1-nx} \leqslant \dfrac{1}{1-(n+1)x}$
Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie.
On obtient ainsi la première et la troisième inégalité (en composant par $t \mapsto \frac{1}{t}$ décroissante sur $\mathbb{R}+$).
□

L'exercice suivant permet de montrer la continuité des fonctions puissances.
Exercice
On fixe $n \in \mathbb{N}$.Montrer que $\lim_{x \to 0} (1+x)^n = 1$, puis la continuité à droite de $t \mapsto t^n$ en 1 et en tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction
Soit n fixé. Pour tout $x \in [0, \frac{1}{n}$,
$$1 + nx \leqslant (1+x)^n \leqslant \frac{1}{1-nx}$$
Par encadrement : même limite à gauche et à droite, pour $x \to 0$, on a donc $(1+x)^n \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, alors $(a+h)^n = a^n (1 + \frac{h}{a})^n$, ainsi si $0 \leqslant \frac{|h|}{a} \leqslant \frac{1}{2}$,
on a : $a^n (1 + n\frac{h}{a}) \leqslant (a+h)^n = a^n (1 + \frac{h}{a})^n \leqslant a^n (1 + 2n\frac{h}{a})$.
Là encore, pour $h \to 0^+$, on a donc $(a+h)^n \to a^n$, ce qui conduit à la continuité à droite de $t \mapsto t^n$.

4.2. Fonctions polynomiales

Définition - Fonction polynomiale
On appelle fonction polynomiale une fonction de la forme :
$$f : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
où $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ;
Il s'agit d'une combinaison linéaire finie de puissances entières de la variable x. On parle de polynôme simple ou de polynôme à une variable.
On dit que $f(x) = b$ est une équation polynomiale si f est une fonction polynomiale.

Remarque - Notations
On remarque que les lettres de fin d'alphabet sont en générale associées à des inconnues. Les lettres de début d'alphabet aux variables connues.
On comprend pour les inconnues : on ne peut pas faire autrement. Mais pourquoi associer des lettres à des nombres connus ?

Par propriétés calculatoires sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Proposition - Propriété de l'ensemble des fonctions polynomiales
Si f et g sont deux fonctions polynomiales, alors :
— $f+g$ est une fonction polynomiale
— $f\times g$ est une fonction polynomiale
— $f\circ g$ est une fonction polynomiale.

Démonstration
Il suffit d'écrire les calculs. Cela est lié aux propriétés des anneaux $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
Pour la composition, c'est plus subtile. On note que, par récurrence, grâce au résultat sur les produits :
Pour tout g, polynomiale, tout $k\in\mathbb{N}^*$: $g^k = g^{k-1}\times g$ est également polynomiale.
puis d'après le résultat sur la somme, par récurrence : $\sum_{k=0}^{n} a_k g^k(x) = f\circ g$ est polynomiale.
□

Rappelons :

Théorème - Factorisation multiple
Soit f une fonction polynomiale de degré n. Soit $p\leqslant n$
Si $x_1, x_2, \dots x_p$, p solutions différentes de l'équation $f(x)=0$ (racines de f).
Alors il existe g_p, fonction polynomiale de degré $n-p$ tel que

$$\forall\, x\in\mathbb{K},\qquad f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_p)\times g_p(x)$$

Corollaire - Nombre maximal de solution
Une équation polynomiale de degré n admet au plus n solutions différentes

4.3. Fonction puissance rationnelle

Définition

Analyse - Bijection de $x\mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x\mapsto x^n$ est strictement croissante sur $I=\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $J=\mathbb{R}_+$.
Elle est continue et donc admet une application réciproque de $J=\mathbb{R}_+$ sur $I=\mathbb{R}_+$.
Dans le cas où n est impair, on peut élargir la définition de $I=\mathbb{R}$ sur $J=\mathbb{R}$.

Définition - Racine n-ième
On note $\sqrt[n]{\cdot}$ la bijection réciproque de $x\mapsto x^n$.
On a donc :

$$\begin{array}{lll} \text{si } n \text{ est pair} & \sqrt[n]{x} = & x^{1/n} \qquad\qquad\qquad \text{pour } x\geqslant 0 \\ \text{si } n \text{ est impair} & \sqrt[n]{x} = & \begin{cases} x^{1/n} & \text{pour } x\geqslant 0 \\ -|x|^{1/n} = -(-x)^{1/n} & \text{pour } x\leqslant 0 \end{cases} \end{array}$$

Pour n impair on a donc $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

Définition - Puissance rationnelle
Soit $r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}^*$ (avec $q\in\mathbb{N}^*$, $p\in\mathbb{Z}$), on qualifie de fonction puissance rationnelle l'application $x\mapsto x^r$ où x^r vérifie $(x^r)^q = x^p$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}_+^*$. C'est une fonction croissante et continue (nous l'admettons à ce stade).

Exemple - $5^{2/3}$
Il s'agit du nombre y tel que $y^3 = 5^2 = 25$. (Existe-t-il un et un seul nombre y qui vérifie cette équation $y^3=25$?).
Par dichotomie (et croissance) : $2^3=8$ et $3^3=27$, donc $y\in]2,3[$. Et l'on peut chercher à préciser…
$2,9^3 = 24,389$. Donc $y\in]2,9;3[$…

Inégalités complémentaires

Analyse - Image de $[0,1[$ et image de $]1,+\infty[$ par $x\mapsto x^r$
Si $x>1$, alors pour $n,m\in\mathbb{N}$: $x^n>1$.
Et pour tout $y<1$, $y^m<1$.
Et nécessairement y tel que $y^m = x^n > 1$ vérifie $y>1$.

Proposition - Comparaison des fonctions puissances
Soient $r<r'\in\mathbb{Q}$.
Alors pour tout $x>1$, $x^r<x^{r'}$. Et si $x<1$, $x^r>x^{r'}$

Démonstration
La soustraction $r'-r=r''$ donne un nombre rationnel, positif.
On a alors, par positivité de x^r :
$x^r < x^{r'} \iff x^{r''} = x^{r'-r} > 1$.
Or $x>1$ et $r''\in\mathbb{Q}^+$, donc $x^{r''}>1$.
Si $x<1$, on raisonne avec $\frac{1}{x}>1$.
□

Attention - Ne pas confondre les variables x et n
Dès maintenant, on fait bien attention lorsqu'on compare à x fixé x^r et x^s,
et lorsqu'on compare à r fixé x^r et x'^r.

5. Exponentielles et logarithmes

Heuristique - Histoire
Les mathématiciens ont d'abord rencontrer les fonctions logarithmiques (Stevin, Briggs, Neper) au XVIeme siècle.
Ils cherchaient un processus pour transformer multiplication (complexe) en addition (plus simple).
Il s'agissait d'interpoler la réciproque des suites géométriques : $n\mapsto a^n$, vérifiant $a^{n+m} = a^n\times a^m$.
Pour faciliter les démonstrations du cours, nous remonterons l'histoire (d'abord exponentielles avant logarithmes).

5.1. ExponentielleS

Heuristique - Equation fonctionnelle
Soit $a\in\mathbb{R}$, si $n,m\in\mathbb{N}$, $a^{n+m} = a^n\times a^m$.
Cette relation est centrale si l'on s'intéresse à $x\mapsto a^x$.
Considérons donc $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant pour tous nombres réels $x,y\in\mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x)\times f(y)$.
Est-ce qu'une telle relation est suffisante pour définir parfaitement aucune (non car $t\mapsto 2^t$ semble bien aller, au moins pour $t\in\mathbb{Q}$), une fonction f, ou plusieurs? Et dans ce cas, que

Pour aller plus loin - Notation
Dans Quadrature n°137, on trouve les notations . pour +, · pour × et ˙ pour une puissance.
On trouve alors $a^{\dot{p}}\cdot a^{\dot{q}} = a^{\dot{(p.q)}}$ ce qui s'interprète comme $a^p\times a^q = a^{p+q}$ et autres relations automatisées du même genre.

, rajouter pour différencier ces différentes fonctions?

On notera le pluriel :

Définition - Fonctions exponentielles
On qualifie de fonctions exponentielles les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non nulles vérifiant :
$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

Proposition - Propriété commune à toutes les exponentielles
Si f est une fonction vérifiant : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$, alors f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Puis : ou bien $f : x \mapsto 0$, ou bien $f(0) = 1$.
Donc une fonction exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 1$.

Démonstration
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \left(f(\frac{x}{2})\right)^2 \geqslant 0$.
$f(x) = f(0+x) = f(0) \times f(x)$.
Si il existe x tel que $f(x) \neq 0$, alors en divisant par $f(x)$: $f(0) = 1$.
Sinon, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ et on a bien (réciproquement) $f(x+y) = 0 = f(x) \times f(y)$. □

Proposition - Base
Si f est une fonction exponentielle non nulle, alors il existe un nombre $a \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = a^x$

Savoir faire - Etude d'une équation fonctionnelle de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$
L'étude d'une équation fonctionnelle se fait souvent de la façon suivante :

1. Par récurrence, en étudiant $f(sn)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et s quelconque.
2. Par imparité/parité (ou autre symétrie), on étudie $f(sm)$ pour $m \in \mathbb{Z}$.
3. On retrouve ensuite le résultat pour $m \in \mathbb{Q}$.
4. Ensuite, on exploitera (plus tard) un argument de continuité ou bien un argument de croissance

Démonstration
Considérons une fonction exponentielle, non nulle.
Soit $s \in \mathbb{R}$, fixé.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$: « $f(sn) = (f(s))^n$.
— Le résultat est vraie pour $n = 0$ (car $f(s)^0 = 1 = f(0)$) et $n = 1$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
Alors $f(s(n+1)) = f(sn+s) = f(sn) \times f(s) = (f(s))^{n+1}$ d'après $\mathscr{P}_n$.
Soit $t \in \mathbb{R}$, $f(t + (-t)) = f(0) = 1 = f(t) \times f(-t)$, donc $f(-t) = \dfrac{1}{f(t)}$.
Ainsi, pour $t \leftarrow sn$, alors $f(s \times (-n)) = \dfrac{1}{f(sn)} = \dfrac{1}{(f(s))^n} = (f(s))^{-n}$ Ainsi, $s \leftarrow 1$ et $a = f(1) > 0$, on a pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $f(m) = f(1m) = f(1)^m = a^m$.
Considérons, alors $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
on a $f(qr) = f(p) = a^p$ et $f(qr) = f(r)^q$ avec $s \leftarrow r$ et $n \leftarrow q$.
on a donc, en prenant la racine q-ième : $f(r) = a^{\frac{p}{q}} = a^r$ □

Proposition - Variations
Soi f une fonction exponentielle est non nulle,
f est strictement croissante sur $\mathbb{Q}$ si $f(1)(= a) > 1$
et elle est décroissante sur $\mathbb{Q}$ si $f(1)(= a) < 1$

Démonstration
Supposons que $f(1) = a > 1$. Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, avec $r_1 \leqslant r_2$. Notons $r = r_2 - r_1 \in Q \cap]0, +\infty[$
$f(r_2) = f(r_1 + r) = f(r_1) \times f(r)$. Or $f(r) = a^r > 1$ car $a > 1$.
Donc $f(r_2) > f(r_1)$, ainsi f est croissante sur $\mathbb{Q}$.
De même si $f(1) < 1$.
□

Analyse - Comment définir $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
Il reste à étendre la définition pour des nombres $x \in \mathbb{R}$.
Considérons le développement décimal de x, il existe (on le démontrera plus tard) une suite d_n tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n \leqslant x < d_n + 10^{-n}$ avec $(d_n)_n$ croissante et $(d_n + 10^{-n})_n$ décroissante de limite x.
Supposons que $a > 1$.
La suite $(a^{d_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante, majorée par a^{d_0+1}, elle converge.
On note $f(x) = a^x$, cette limite.

Exercice
On note $a = f(1)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = f(x)^r$.
Quelle formule obtient concernant les puissances de a ?

Correction
En reprenant pour $m \in \mathbb{Z}$, $f(mx) = (f(x))^m$, puis pour $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = f(x)^r$.
On a donc $a^{rx} = (a^x)^r$. Puis en passant à la limite pour $(r_n) \to x'$: $a^{xx'} = (a^x)^{x'}$.

Pour aller plus loin - Suite décimale
Prenons un exemple pour mieux comprendre ici.
Considérons le nombre π, on a alors $\pi = 3,1415\ldots$.
Dans ce cas : $d_0 = 3$, $d_1 = 3,1$, $d_2 = 3,14$, $d_3 = 3,141\ldots$

Pour aller plus loin - Définition de a^x
Il faudrait démontrer que cette valeur ne dépend pas de la suite (d_n) choisie, convergente vers x.

On résume et admet les derniers résultats (il nous manque la continuité) :

Théorème - Fonctions exponentielles. Bilan
Les fonctions exponentielles non nulles sont continues.
Elles vérifient : $f(0) = 1$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ et $f(x \times y) = f(x)^y$ ($y \in \mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R}$ par densité et continuité).
Il existe $a (= f(1)) \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a^x$ (par définition de a^x si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).
Si $a > 1$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
Si $a < 1$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

Exercice
Soit $a > 0$ et f une fonction exponentielle de base a.

1. Soit $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geqslant 0$
2. Montrer que pour tout $x < y \in \mathbb{R}$, $\lambda = \frac{1}{2}$,
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
3. Montrer que le résultat reste vrai pour tout λ de la forme $\frac{r}{2^n}$ avec $r \in [\![0, 2^r]\!]$.
On dit alors que f est convexe

Correction

1. $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = f(x)f(h) + f(x)f(-h) - 2f(x) = f(x)\left[f(h) + \frac{1}{f(h)} - 2\right] = f(x)\left(\sqrt{f(h)} - \frac{1}{\sqrt{f(h)}}\right)^2 \geqslant 0$
2. On considère la relation précédente, avec $x \leftarrow \frac{x'+y'}{2}$ et $h \leftarrow \frac{y'-x'}{2}$ On a alors $x + h = y'$, $x - h = x'$ et donc
$$f(y') + f(y') \geqslant 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
3. On fait une récurrence sur n, en supposant au rang n que le résultat est vrai pour tout $r \in [\![0, 2^n]\!]$.
Passons au cas 2^{n+1} et considérons $r \in [\![0, 2^{n+1}]\!]$.
si r est divisible par 2, alors $\frac{r}{2^{n+1}} = \frac{r/2}{2^n}$ et on applique $\mathscr{P}_n$.
si r est impair, $r = 2k+1$ et donc $\frac{r}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n} + \frac{k+1}{2^n}\right)$ est le milieu entre $\frac{k}{2^n}$ et $\frac{k+1}{2^n}$.

On a de même : $1-\frac{r}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{2^n}+1-\frac{k+1}{2^n}\right)$.

On applique la question précédente et l'hypothèse de récurrence :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) = f\left(\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{k}{2^n}x+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)y\right)}_{:=X}+\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{k+1}{2^n}x+\left(1-\frac{k+1}{2^n}\right)y\right)}_{:=Y}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(f(X)+f(Y)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(\frac{k}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)f(y)\right)}_{\mathscr{P}_n}+\underbrace{\left(\frac{k+1}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{k+1}{2^n}\right)f(y)\right)}_{\mathscr{P}_n}\right)$$

$$\leqslant \cdots = \frac{r}{2^{n+1}}f(x)+\left(1-\frac{r}{2^{n+1}}\right)f(y)$$

Par densité des suites rationnelles à dénominateur en puissance de 2, on étant le résultat à tout $\lambda \in [0,1]$.

5.2. LA fonction exponentielle

Nous verrons que ces fonctions sont dérivables. L'une a la propriété essentielle de vérifier $f'(0)=1$. C'est LA fonction exponentielle avec $a=e$ (LE « e »). Prenons un autre définition.

Définition - La fonction exponentielle naturelle
Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(x_n) = ((1+\frac{x}{n})^n)$ est majorée, croissante à partir d'un certain rang, donc convergente.
Notons $\exp(x)$ la limite de (x_n).

Pour aller plus loin - Critère de convergence pour une suite réelle
Nous verrons, sans cercle vicieux, que toute suite de nombres réelles, majorée et croissante (à partir d'un certain rang) est convergente.
C'est une propriété caractéristique de $\mathbb{R}$.

Il faut démontrer la convergence de la suite :

Démonstration
• Positivité à partir d'un certain rang.
Pour tout réel x, notons que $\frac{x}{n} \to 0$ pour $n \to +\infty$.
Donc à partir d'un certain rang N_x tel que $\forall\, n \geqslant N_x$, $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{n} \leqslant \frac{1}{2}$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant N_x$, $x_n > 0$. On notera plus simplement que ce rang N_x est $\max(0, \lceil -x \rceil)$.
• Croissance (à partir d'un certain rang)
On peut utiliser le critère d'une suite positive (à partir d'un certain rang) : par comparaison relative à 1).

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{\frac{n+1+x}{n+1}}{\frac{n+x}{n}}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+x}{n}\right)\left(\frac{n^2+nx+n}{n^2+nx+n+x}\right)^{n+1}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$$

Rappelons l'inégalité de Bernoulli : $(1+a)^m \geqslant 1+ma$ si $a > -1$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
Prenons alors $m \leftarrow n+1 (\in \mathbb{N}^*)$ et $a \leftarrow -\frac{x}{(n+1)(n+x)}$.
On a bien : $a > -1$, car :
• si $x \geqslant 0$, $x < n+x$ donc $x < (n+1)(n+x)$ dès que $n > 0$.
• si $x < 0$, $-x > 0$ et $(n+1)(n+x) > 0$ dès que $n > -x$, i.e. $n \leqslant N_x$.
Donc :

$$\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\frac{-x}{(n+1)(n+x)} = \frac{n}{n+x}$$

Enfin, comme $\frac{n+x}{n} \geqslant 0$, le sens de l'inégalité est inchangé :

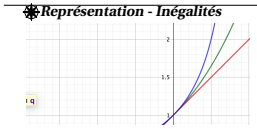
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant \frac{n+x}{n}\times\frac{n}{n+x} = 1$$

• Majoration.
Soit $s = \lfloor |x| \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$, donc $\frac{x}{sn} \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$.

$$x_{sn} = \left(\left(1+\frac{x}{sn}\right)^n\right)^s \leqslant \left(\frac{1}{1-n\frac{x}{sn}}\right)^s = \left(\frac{s}{s-x}\right)^s \text{ (constante en } n\text{).}$$

(La fonction $t \mapsto t^s$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.)
Soit $m \geqslant \max(N_x, N'_x)$, et $n = \lfloor \frac{m}{s} \rfloor + 1$
on a $n \geqslant \frac{m}{s}$, donc $N'_x \leqslant m \leqslant ns$.
puis par croissance de (x_n) pour tout $m \geqslant N'_x$: $x_m \leqslant x_{ns} \leqslant \left(\frac{s}{s-x}\right)^s$ □

Représentation - Inégalités



Proposition - Inégalités
On a pour tout $x \in]-1,1[$, $1+x \leqslant \exp x \leqslant \frac{1}{1-x}$.

Remarque - Elargissement de l'intervalle
En fait, le résultat est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ *pour la première inégalité et sur* $]-\infty,1[$ *pour la seconde.*
Mais en réalité, elles nous serviront surtout pour x *proche de* 0, *où les trois termes valent* 1…

Démonstration
On applique les inégalités de Bernoulli, à partir d'un certain rang, puisque $\frac{x}{n} \to 0$ ($\frac{x}{n} < \frac{1}{n}$) :

$$1+x = 1+n\frac{x}{n} \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x_n \leqslant \frac{1}{1-n\frac{x}{n}} = \frac{1}{1-x}$$

On passe ensuite à la limite : à gauche et à droite les termes sont constants. Au centre, la suite converge vers e^x. □

Théorème - exp est une fonction exponentielle.
La fonction $x \mapsto \exp x$ est une fonction exponentielle appellée LA fonction exponentielle.
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
Elle vérifie donc : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x)\times\exp(y)$ et $\exp(x\times y) = e^{xy} = (e^x)^y = (\exp(x))^y$.

Démonstration
Plus compliqué. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
Notons $x_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1+\frac{y}{n}\right)^n$ et $z_n = \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n$.
Alors $\frac{x_n y_n}{z_n} = \frac{\left(1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n}{\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{t_n}{n}\right)^n$,
avec $t_n = \frac{xy}{n+x+y} \to 0$ pour $n \to +\infty$.
Il existe donc une valeur N tel que pour tout $n \geqslant N$, $t_n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc $\frac{t_n}{n} \in \subset [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\subset [-1, \frac{1}{n}[$
On a alors $1+t_n \leqslant \frac{x_n y_n}{z_n} \leqslant \frac{1}{1-t_n}$ et donc par unicité des limites : $\frac{\exp(x)\exp(y)}{\exp(x+y)} = \lim\frac{x_n y_n}{z_n} = 1$.
Donc $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
exp est une fonction exponentielle. □

Application - Evaluation approchée de $(1+\frac{1}{30})^{100}$
Si l'on considère $n = 100$ proche de l'infini, on a donc

$$\left(1+\frac{1}{30}\right)^{100} = \left(1+\frac{\frac{10}{3}}{100}\right)^{100} \approx \exp\left(\frac{10}{3}\right)$$

On vérifie à la calculatrice : $\exp\frac{10}{3} = 28{,}03162$ et $(1+\frac{1}{30})^{100} = 26{,}548739$.

Analyse - Binôme de Newton pour $(1+\frac{1}{n})^n$ **et une approximation d'Euler**
L'argument d'Euler, à partir du binôme de Newton donne :

$$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3}+\dots$$
$$= 1+1+\frac{1(1-\frac{1}{n})}{2!}+\frac{1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}+\dots$$

Euler ajoute : « *si* n *est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable, la fraction* $\frac{n-1}{n}$ *égalera l'unité* » et conclue par $e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots$.
La méthode laisse à désirer, mais le résultat est juste :

Histoire - D'où vient la notation e **?**
Leonard Euler (1707-1783) est le mathématicien le plus prolixe de l'histoire (avec Cauchy ?).
C'est un calculateur de génie, doté d'une mémoire prodigieuse (hypemnésique).

Proposition - Formules d'Euler (1746)

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$$

5.3. LogarithmeS

Les fonctions exponentielles non constante égale à 0 ou 1 sont continues et strictement monotone, elles admettent donc une fonction réciproque.

Définition - Fonctions logarithmes
On appelle fonctions logarithmes toute fonctions g réciproques de fonctions exponentielles f non constantes.
Si cette dernière est $x \mapsto a^x$ (avec $a \notin \{0,1\}$), alors la fonction logarithme est qualifiée « de base a ». On note souvent $g = \log_a$ ou $\ln_a$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifie alors
$\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+,\ g(x\times y) = g(x)+g(y)$.

Exemple - Différents logarithmes bien connus
Le logarithme en base 10 est un classique de la physique.
Il indique en gros la taille en nombre de chiffres.
Le logarithme en base 2 est un classique de l'informatique.

Démonstration
L'existence de g est liée à la bijectivité de f.
f étant à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $X = f(x) \in \mathbb{R}_+$ (x existe bien, c'est $g(X)$) et $Y = f(y) \in \mathbb{R}_+$: $g(X\times Y) = g(f(x)\times f(y)) = g(f(x+y)) = x+y = g(X)+g(Y)$. □

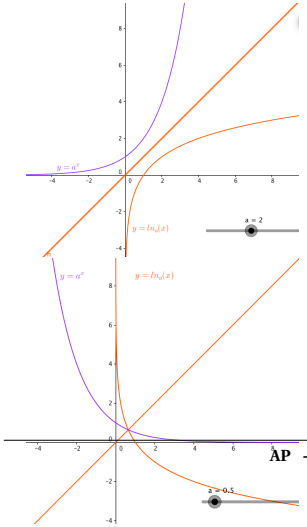
Théorème - Fonctions logarithmes. Bilan
Les fonctions logaritmes sont continues, définies sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Elles vérifient : $g(1) = 0$ et pour tout $x, y, t \in \mathbb{R}_+$, $g(x\times y) = g(x)+g(y)$ et $g(x^t) = t\times g(x)$.
Il existe $a(= f(1)) \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = 1$.
Si $a > 1$, alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_0 g = -\infty$ et $\lim_{+\infty} g = +\infty$.
Si $a < 1$, alors g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_0 g = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = -\infty$.

Démonstration
Faisons juste la démonstration de $g(x^t)$:
On sait, pour $X = g(x)$ que : $f(t\times X) = f(X)^t$, i.e. $f(t\times g(x)) = x^t$. Puis en composant par g : $t\times g(x) = g(x^t)$. □

Savoir faire - Calculer « à la main » le logarithme en base a de x?
On n'a pas d'autre solution (pour le moment) mais cela est suffisant (compte-tenu de la contrainte que l'on s'est donné) de procéder par dichotomie.
On regarde la suite (a^n) et l'on trouve $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \leqslant x < a^{n+1}$.
Puis, on sélectionne $a_0 = n$ et $b_0 = n+1$. Puis on peut (par exemple), considérer $c = \frac{a_0+b_0}{2} \in \mathbb{Q}$, évaluer a^c.
Si $a^c < x$, on prend $a_1 = c$ et $b_1 = b_0$, sinon on prend $a_1 = a_0$ et $b_1 = c$…

Histoire - Neper
L'écossais John Napier (1550-1617) (ou Neper) cherche au XVI siècle une fonction qui faciliterait les calculs : elle transformerait le produit (compliqué car beaucoup de calculs) en addition (moins de calculs).
Il trouve le logarithme.
On a donc $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
L'histoire peut être un moyen mnémotechnique.

Représentation - Exponentielles et logarithmes selon la valeur de a



On a deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) convergente vers y avec $a^y = x$, donc $y = \log_a(x)$.

Définition - Le logarithme naturel
La fonction logarithme réciproque de la fonction exponentielle, donc le logarithme en base $e = \exp 1$ est appelé logarithme naturel.
On le note ln.
ln est définie, continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Numériquement : $\ln(1) = 0$, $\ln e = 1$, $\lim_0 \ln = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$.
On a les propriétés algébrique : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^b) = b\ln a$…
On a pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln u \leqslant u-1$.

Tout est immédiat, sauf l'inégalité qu'on démontre :

Démonstration
On sait que pour tout $x \in]-1,+\infty[\subset \mathbb{R}$, $1+x \leqslant \exp(x)$.
En composant par ln, croissante : $\ln(1+x) \leqslant x$.
Posons $u = 1+x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln u \leqslant u-1$
□

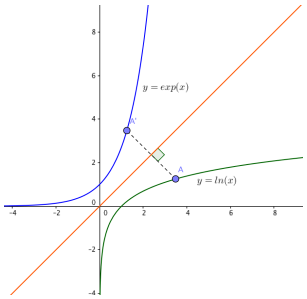
Proposition - Ecriture en fonction du logarithme naturel
Soit g la fonction logarithme de base a, réciproque de $f : x \mapsto a^x$.
Alors on a :
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = a^x = \exp(x\times\ln a) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Démonstration
Comme ln est un logarithme : $\exp(x\ln a) = \exp(\ln a^x) = a^x$, car ln est réciproque de exp.
Puis, $G : x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ est une fonction logarithme

$$G(x\times y) = \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = G(x)+G(y)$$

de base a, car $G(a) = \dfrac{\ln a}{\ln a} = 1$. Donc $G = g$ □

Représentation - Exponentielle et logarithme naturels



5.4. Retour sur les fonctions puissances, avec un exposant non rationnel

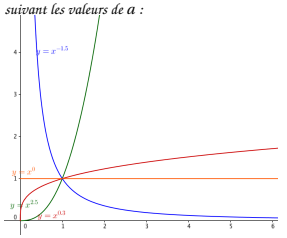
Définition - Fonction puissance réelle
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction puissance α par :

$$\begin{array}{rccc} g_\alpha : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^\alpha = \exp(\alpha\ln x) \end{array}$$

Proposition - Fonction puissance réelle
Elle vérifie les propriétés suivantes :
$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$, $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$,
— $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
— $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
— $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
— Si $\alpha = 0$, g_α est constante égale à 1.
— Si $\alpha > 0$, g_α est croissante et $\lim_{x\to0^+} g_\alpha(x) = 0$
— Si $\alpha < 0$, g_α est décroissante et $\lim_{x\to0^+} g_\alpha(x) = +\infty$
Pour $\alpha > 0$, on étudie l'existence d'une demi-tangente en 0 :
— Si $\alpha < 1$, la courbe $y = g_\alpha(x)$ admet une tangente verticale en 0.
— Si $\alpha = 1$, la courbe $y = g_\alpha(x)$ admet une tangente de pente 1 en 0.
— Si $\alpha > 1$, la courbe $y = g_\alpha(x)$ admet une tangente horizontale en 0.

Histoire - Logarithme naturel
Il y a un abus historique ici.
On a démontré historiquement qu'il s'agit bien du logarithme naturel en le définissant comme primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ *(primitive dont on a démontré qu'il s'agissait d'un logarithme (Fermat - 1636)). C'est le naturel car* $\ln'(1) = 1$.
La définition donnée ici vient de Euler (un siècle plus tard)

Représentation - Fonctions puissances réelles (différentes valeurs de α)
On en déduit les variations et la courbe représentative suivant les valeurs de α :



5.5. Croissances comparées

Heuristique - Logarithme comme nombre de chiffres

Commençons par une remarque, avec $x = 10^n$, on a $\frac{\ln(x)}{x} = n10^{-n}\ln 10 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Notons que $\ln 10 \approx 2{,}302$, donc $\ln x = \ln(10) \times \log_{10}(x)$ et que $\log_{10}(x)$ est en première approximation le nombre de chiffres de x, alors pour x grand, $\ln x$ est le nombre de chiffres de x multiplié par un peu plus de 2.
Exemple : $\ln(123456789) \approx 2{,}3 \times \log(1{,}23 \times 10^9) = 2{,}3 \times (9 + \ln(1{,}23)) \approx 20$, ce qui est petit

Il s'agit, a priori, de formes indéterminées. Elles sont levées :

Théorème - Croissance comparée
Soient a et b deux réels strictement positifs. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0; \quad \lim_{x\to 0^+} x^a |\ln x|^b = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0.$$

Démonstration
On commence par lever l'indétermination de $\frac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$. Tout en découlera…

Commençons par une remarque, avec $x = 10^n$, on a $\frac{\ln(x)}{x} = n10^{-n}\ln 10 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On sait que pour tout $x > 0$, $\ln x \leqslant x - 1 < x$,
en particulier $\frac{1}{2}\ln x = \ln(\sqrt{x}) < \sqrt{x}$.

Donc, pour $x > 1$: $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$. Par encadrement : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
Pour $a, b > 0$,

$$\frac{(\ln x)^b}{x^a} = \left(\frac{\frac{b}{a}\ln(x^{a/b})}{x^{a/b}}\right)^b \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par composition de limites : avec $u = x^{a/b}$, puis $v \mapsto v^b$.
Avec cette nouvelle limite, en composant avec $x : t \mapsto \frac{1}{t}$,

$$x^a|\ln x|^b = \frac{|-\ln t|^b}{t^a} \underset{\substack{t\to+\infty \\ x\to 0}}{\longrightarrow} 0$$

Avec la première limite, en composant avec $x : t \mapsto \ln(t)$ i.e. $t = e^x$,

$$\frac{e^{ax}}{x^b} = \frac{t^a}{(\ln t)^b} \underset{\substack{t\to+\infty \\ x\to+\infty}}{\longrightarrow} +\infty$$

Avec la deuxième limite, en composant avec $x : t \mapsto \ln(t)$ i.e. $t = e^x$,

$$|x|^b e^{ax} = |\ln t|^b t^a \underset{\substack{t\to 0 \\ x\to-\infty}}{\longrightarrow} 0$$

□

Exercice
Fixons $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que pour x grand : $e^{\frac{a}{b+1}x} \geqslant \frac{a}{b+1}x$, en déduire $\frac{e^{ax}}{x^b} \geqslant \left(\frac{a}{b+1}\right)^{b+1} x$.
Conclure sur la valeur de $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b}$.

Correction

5.6. Fonctions hyperboliques directes

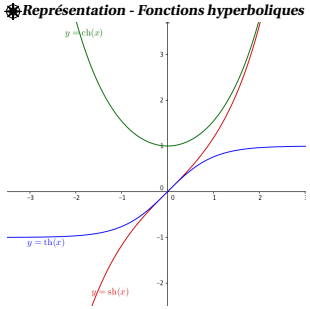
Définition - Fonctions hyperboliques
Les fonctions ch (cosinus hyperbolique), sh (sinus hyperbolique) et th (tangente hyperbolique) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Proposition - Fonctions hyperboliques
La fonction ch est paire, les fonctions sh et th sont impaires.

$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$ $\quad$ $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$
$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$ $\quad$ $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$
$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$ $\quad$ $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$
$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$

Représentation - Fonctions hyperboliques



Démonstration
$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1$.
$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}) = e^x$ et $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}) = e^{-x}$
$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{4}((e^a + e^{-a})(e^b + e^{-b}) + (e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b})) = \frac{1}{4}(e^{a+b} + e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-a-b} + e^{a+b} - e^{a-b} - e^{-a+b} + e^{-a-b}) = \frac{1}{2}\left(e^{a+b} + e^{-(a+b)}\right) = \operatorname{ch}(a+b)$. □

6. Sommes numériques infinies

On commence par une extension de notation :

Définition - Extension du coefficient binomial
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

La section suivante donne des résultats connus pour l'essentiel depuis le XVIII siècle, au moins.
Mais les démonstrations satisfaisantes sont plus tardives (ABEL et successeurs du XIX).
Pour vous, elles auront officiellement lieu l'année prochaine lorsque vous verrez le cours sur les séries entières.

Proposition - Egalités sommatoires
On a les égalités suivantes :

$x \in ?$	fonction	somme	Auteur (Année)
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$	NEWTON(1669), LEIBNIZ(1691)
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$	NEWTON(1669), LEIBNIZ(1691)
$\mathbb{R}$	$\tan(x)$	$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\frac{17}{315}x^7+\dots$	JAC. BERNOULLI(1702)
$[-1,1]$	$\arctan(x)$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$	GREGORY(1671), LEIBNIZ(1674)
$[-1,1]$	$\arcsin(x)$	$=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\dots$	NEWTON(1669)
$\mathbb{R}$	$(1+x)^n$	$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$	PASCAL(1654)
$]-1,1[$	$(1+x)^\alpha$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$	NEWTON(1666)
$\mathbb{R}$	$\exp(x)$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}x^k$	EULER(1748)
$]-1,1[$	$\ln(1+x)$	$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$	MERCATOR(1668)
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$	EULER(1748)
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$	EULER(1748)

Pour aller plus loin - Produit infini
Euler démontre également (1748) :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}, \sin x = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Exercice
Donner l'expression formalisée de $\arcsin(x)$.

Correction
$\arcsin(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!^2}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

Exercice
On rappelle la formule de MACHIN : $\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$.
Combien de calcul pour obtenir 10 décimales de π satisfaisantes ? Faites les à la calculatrice

Correction
$\frac{1}{5}=0.2$, et donc $\left(\frac{1}{5}\right)^n=2^n\times10^{-n}$.
Avec $n=10$, on a $2^10\approx10^3$ et donc $\left(\frac{1}{5}\right)^n\approx10^{3-10}=10^{-7}$.
Avec $n=14$, cela doit être suffisant...

7. Bilan

Synthèse

⇝ On s'intéresse aux fonctions dont le domaine est dans $\mathbb{R}$. Beaucoup de définitions : images, restrictions, ou additions, multiplications et compositions de fonctions. Des adjectifs pour les fonction : périodiques, paires ou impaires, majorées, minorées, bornées, monotone, strictement croissante...

⇝ Plusieurs fonctions de référence sont à connaître : exponentielle(s) et logarithme(s) en toute base ; les fonctions puissances ; les fonctions circulaires (sin, arccos...) et hyperboliques directes. On doit savoir

comment comparer ces fonctions lorsqu'elles sont en compétition au voisinage de point problématique.

⇝ Les fonctions complexes de la variables réelles s'étudient de la même façon (même si la représentation est plus complexe). En fait, ce qui compte, c'est la nature de la variable « de départ ».

Plusieurs inégalités sont apparues. Il est bon de s'en souvenir :

$\forall\, x\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\quad \lvert\sin x\rvert\leqslant\lvert x\rvert\leqslant\lvert\tan x\rvert=\frac{\lvert\sin x\rvert}{\lvert\cos x\rvert}$	Inégalité de fondamentale de trigonométrie
$\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \forall\, x\in]-1,+\infty[,\quad 1+nx\leqslant(1+x)^n$ $\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \forall\, x\in\left]-1,\frac{1}{n}\right[\quad (1+x)^n\leqslant\frac{1}{1-nx}$	Inégalité de Bernoulli
$1+x\leqslant\exp(x)\leqslant\frac{1}{1-x}\forall\, x>0\qquad \ln x\leqslant x-1$	Inégalité de l'exponentielle/logarithme
$x<y(\in\mathbb{R}_+^*)\Longrightarrow x^\alpha<y^\alpha$	strictes croissances des fonctions puissances ($\alpha>0$)
$\alpha<\beta\Longrightarrow x^\alpha<x^\beta$	strictes croissances des fonctions exponentielles ($x>1$)
$\forall\, (x,y)\in[0,1],\quad f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ $x\mapsto x^\alpha$ ($\alpha>1$), $x\in[0,\pi]\mapsto\sin x$ sont convexes	Inégalité de convexité
$\forall\, (x,y)\in[0,1],\quad \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\leqslant f(\lambda x+(1-\lambda)y)$ $\forall\,\lambda\in]0,1[$, $x\in[-\pi,\pi]\mapsto\cos x$ sont concaves	Inégalité de concavité

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Transformation sur le graphe
— Savoir-faire - Etude des branches infinies (et définition)
— Savoir-faire - Transférer un problème trigonométrique « en a », vers « en 0 »
— Savoir-faire - Etude d'une équation fonctionnelle de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$
— Savoir-faire - Calculer « à la main » le logarithme en base a de x ?

Retour sur les problèmes

30. Elle est bien continue, mais elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$. Euler ne l'aurait probablement pas considérée comme une fonction.
31. C'est l'application $x\mapsto 2^x u_0 = u_0 e^{x\ln 2}$
32. Les seules applications de cette forme sont les applications $x\mapsto A\ln(x)$ (où A est constante).
Elles sont définie sur $\mathbb{R}_+$. Peut-on les étendre sur $\mathbb{R}$ en entier ?
Si $x>0$, $\ln(-x)=\ln(e^{i\pi}x)=\ln x+i\pi[2\pi]$...
33. On vient de terminer ce chapitre en répondant à cette question.

Chapitre 7

Utilisation de la dérivation

Résumé -

Ce chapitre se présente comme un large résumé du cours de première S avec ajouts de fonctions usuelles (vues en terminale ou en MPSI). On reprend tous les résultats en admettant la notion fine de limite, ils nous serviront d'outils pour des études plus poussés par la suite ou bien pour leur application dans d'autres domaines scientifiques. Le but est donc de raffiner notre technique (calculs)....
Il ne faut pas oublier que la notion de fonctions est une notion fine des mathématiques modernes, elle a mis plusieurs siècle à émerger : Leibniz, puis Euler, puis Cantor et Weierstrass... pour arriver jusqu'à nous. Et encore, le joyau n'est pas encore définitivement ciselé (distributions de Schwartz...). Sur internet :

- *OptimalSup-Spé - Cours Fonctions usuelles. https ://www.youtube.com/watch ?v=xTbtre9dgmQ*
- *Micmaths - Merveilleux logarithmes - https ://www.youtube.com/watch ?v=rWfl7Pw8YVE*
- *El Jj - Différences équations/fonctions (pas de questions stupides#01)*

Sommaire

AP - Cours de maths MPSI (Fermat - 2026/2027

1. Problèmes

? Problème 31 - Optimisation par FERMAT. Raisonnement prédérivatoire

Reprenons l'exemple de Fermat qui cherche à trouver la position E sur un segment $[AC]$ de manière à ce que $AE \times EC$ soit maximum.
Notons $a = AE$ et $b = EC$. On a donc $a + b = d (= AC)$ fixé. On cherche la valeur maximal de $AE \times EC = a(d-a) = ad - a^2$.
La méthode de Fermat consiste donc à ajouter une valeur e à AE, on a alors une nouvelle valeur qui vaut : $(a+e)d - (a+e)^2 = ad - a^2 + e(d - 2a) - e^2$.
Ajouter une valeur e à AE consiste donc à faire évaluer $AE \times EC$ d'une valeur $ad - a^2 + e(d-2a) - e^2 - ad + a^2 = e(d-2a) + e^2$.
Fermat dit qu'il faut « adégaler » les deux valeurs cela donne $e(d-2a) + e^2 = 0$. On peut simplifier par $e \neq 0$.
On trouve donc $d - 2a + e = 0$, et il prend $e = 0$ et donc $a = \frac{d}{2}$. E est au milieur de $[AC]$. Qu'en pensez-vous ?

? Problème 32 - Optimisation

On passe notre vie à optimiser nos actions, nos décisions (la plus efficace, la moins longue…).
Comment assurément trouver une stratégie qui permet à tous les coups d'optimiser (au moins localement) nos décisions.
Si elle se mesure sous la forme Résultat(Action), on doit trouver : Résultat(Action+δ)<Résultat(Action) et Résultat(Action-δ)<Résultat(Action) également…

? Problème 33 - Dérivation : concept local ou global ?

A priori l'optimisation précédente de la fonction Résultat donne des valeurs différentes selon la valeur Action où l'on se place. Ainsi, la notion de dérivation est un concept local.
Et donc, dans un second temps, une fois que pour tout x, $f'(x)$ est bien défini, on peut seulement réunir toutes ces valeurs en une seule fonction f.
D'où vient le miracle que dans la pratique, on peut directement agir de f à f' (de fonction à fonction) ?

? Problème 34 - Dérivations de fonctions usuelles et des opérations

Et ainsi, en particulier, quelles sont les transformations de dérivation pour les fonctions usuelles ? Et également, que deviennent les opérations classiques $(+, \times, \circ)$ pour la dérivation ?

? Problème 35 - Se concentrer sur un problème

D'une certaine façon, regarder la dérivation de f en x_0, c'est faire l'approximation affine (donc relativement simple) mais juste des valeurs $f(x)$ pour x proche de x_0.
Ces valeurs approchées peuvent se concentrer autour de 0. Et si l'on se trouve autour d'un cas de limite problématique du type : $\frac{\to 0}{\to 0}$, ne peut-on pas exploiter les approximations affines (et donc les dérivées) pour obtenir une bonne évaluation de cette forme indéterminée ?

? Problème 36 - Etude de fonctions complexes

Comment étudier des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (comme $\theta \mapsto e^{i\theta}$) ?
Nous les avons définies lors du chapitre précédent ; comment les dériver maintenant ?
Mieux : comment étudier des fonctions de la variables complexes ? Peut-on les dériver, comment cela s'adapte ?

2. Dérivation

2.1. Approche historique

Remarque - Connaissance a priori

$\mathcal{L}$
a dérivation est une limite, il faudrait donc commencer par définir proprement (=formellement) la définition de la limite (d'une suite ou d'une fonction en un point). Or on suit (pour commencer l'année) le parcours historique des mathématiques, cette définition n'a été formalisée qu'au XIXème siècle (Bolzano, Cauchy, Weierstrass), après les théorèmes fondamentaux de Newton, Leibniz (fin du XVIIème siècle), Euler (XVIIIème siècle)… Nous nous contenterons de savoir que :

- toute suite de réels, croissante et majorée, converge (dans $\mathbb{R}$)
- si les limites existent bien et que les calculs sont possibles, alors la limite d'une somme, respectivement d'un produit, respectivement d'une composition est la somme des limites, respectivement le produit des limites, respectivement la composition des limites.

Pour aller plus loin - Analyse non standard

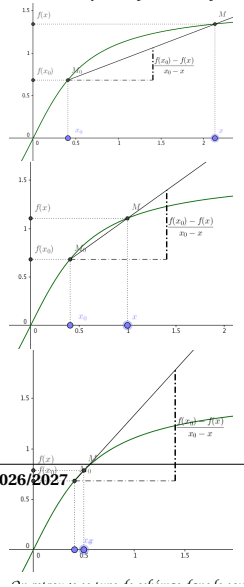
En 1961, Abraham Robinson crée une nouvelle logique mathématique en s'appuyant sur les nombres hyperréels. Edward Nelson, en 1977, renouvelle l'analyse non standatd (IST) en donnant un nouveau sens aux infinitésimaux et définit un nouveau calcul…

Heuristique - Infinitésimaux

Le calcul différentiel et le calcul intégral ont été finalisés indépendamment et associés par Leibniz (1684) et Newton (1671, publié en 1736).
Leurs raisonnement repose sur une notion floue d'infinitésimaux (ou de fluente), notion non convaincante à l'époque.
Johan Bernoulli (1692) popularise auprès de toute sa dynastie, du marquis de L'Hospital et surtout d'Euler, la découvert de Leibniz (« une énigme plutôt qu'un explication ») et pense que des explications trop abondantes au sujet de l'infiniment petit pourrait troubler l'entendement de ceux qui ne sont pas « accoutumés à de longues explications ».
En fait, il manque la notion claire de limite, dont d'Alembert (1754) s'approche le plus. La bonne notion de limite est définie par Bolzano (1817), Cauchy (1823) ou Weierstrass (1861) et donnent ainsi une définition bien formalisée et solide mathématiquement (permettant de démontrer des résultats), abandonnant la notion d'Infinitésimaux.
Ce chapitre s'appuie sur des mathématiques du XVII. Nous ferons les démonstrations après avoir défini la notion de limite.

Représentation - Nombre dérivée

Il s'agit d'une notion « dynamique » (limite). Il faut le voir comme un film, en plusieurs temps $x \mapsto x_0$:



Remarque - Cours de physique

En physique, en MPSI, le cours est proche des idées de Leibniz et Newton, et c'est très bien ainsi.
La notation $\frac{\partial f}{\partial x}$ est celle de Leibniz. La notation $\dot{x}$ est due à Newton !
C'est Lagrange, après un détour par Euler, qui impose la notation f'.

Remarque - Limite

On va faire comme si on connaissait la notion de limite, application linéaire ($\lim \lambda f + g = \lambda \lim f + \lim g$*)…*

2.2. Dérivabilité

Définition - Nombre dérivée
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et x_0 un point de I.
f est dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, définie sur $I-\{x_0\}$, admet une limite finie en x_0.
On a alors

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.
$f'(x)$ s'appelle le nombre dérivé en x et la fonction qui à $x \in I$ associe $f'(x)$ s'appelle la (fonction) dérivée de f.

2.3. Approximation linéaire

On donne parfois une définition équivalente de la dérivation de f en x_0.
Son avantage : elle cache la question de la limite dans l'hypothèse de continuité de ϵ en x_0. .

Pour aller plus loin - Continuité = limite
Nous verrons que la notion de continuité de f en un point x_0 est équivalente à la notion d'existence de limite de f en x_0.

Proposition - Définition de Weierstrass
Soit f définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$
f est dérivable en x_0 si et seulement si
il existe $A \in \mathbb{R}$, ϵ continue en x_0 avec $\epsilon(x_0) = 0$ tels que

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)(A+\epsilon(x))$$

On a alors $A = f'(x_0)$

Démonstration
Si f est dérivable en x_0, on considère $A = f'(x_0)$ et $\epsilon : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$.
Ces fonctions répondent aux conditions.
Réciproquement, si $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)(A+\epsilon(x))$, alors $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite égale à A en x_0. □

Application - Pour quelques fonctions usuelles (connaissant les dérivées en 0
On trouve avec $\epsilon_i(x) \to 0$ pour $x \to 0$:

$$\exp(x) = 1 + x + x\epsilon_1(x)$$

$$\ln(1+x) = x + x\epsilon_2(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + x\epsilon_3(x)$$

C'est le début du calcul des équivalents.

Pour aller plus loin - Linéarisation
Autre idée essentielle pour l'exploitation de la dérivation : transformer un problème paramétré par une fonction plus ou moins compliquée en un autre problème linéaire. Pour cela on remplace f par une droite, la plus proche c'est-à-dire la dérivée de f (en un x_0 bien choisi). C'est en particulier la méthode de Newton que nous reverrons en informatique. Il s'agit de resoudre $f(x) = 0$.

Définition - Équation de la tangente
Soit f définie sur I, dérivable en $x_0 \in I$.
La droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

s'appelle la tangente à la courbe représentative de f en $M(x_0, f(x_0))$

Truc & Astuce pour le calcul - A propos de la tangente
On notera :
- qu'il s'agit bien de l'équation d'une droite ($y = ax + b$)
- qu'elle passe bien par le point M : $f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0)$.
- que sa pente vaut $f'(x_0)$.

2.4. Règles de dérivation

Les résultats suivants seront démontrées plus tard dans l'année (linéarité de la limite). Ils ont été énoncés pour la première fois par LEIBNIZ en 1684. Le but pour le moment est de se former pour le calcul!

Proposition - Résultats
Soient u et v dérivable en x_0
- $u+v, uv, u^n, \exp u$ sont dérivables en x_0 ;
- si, en outre, u ne s'annule pas sur un intervalle contenant x_0 et est dérivable en x_0 alors $\frac{1}{u}, \ln|u|$ sont dérivables en x_0 ;
- si, en outre, v ne s'annule pas sur un intervalle contenant x_0 et est dérivable en x_0 alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en x_0 ;
- si, en outre, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et si u est strictement positive sur un intervalle contenant x_0, alors u^α est dérivable en x_0

Si $u \circ \phi$ est définie, si φ est dérivable en x_0 et u dérivable en $\varphi(x_0)$ alors $u \circ \varphi$ est dérivable en x_0 et $(u\circ\varphi)'(x_0) = \varphi'(x_0) \times u'(\varphi(x_0))$.

Résumé :

Proposition - Résumé des formules usuelles de dérivation

fonction f de la forme	fonction dérivée f'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$u_1u_2\dots u_n$	$u_1'u_2\dots u_n + u_1u_2'u_3\dots u_n + \dots + u_1u_2\dots u_{n-1}u_n'$
u^n où $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$u\circ\phi$	$\phi' \times u'\circ\phi = u'\circ\phi \times \phi'$
$u_1\circ\cdots\circ u_n$	$(u_1'\circ u_2\circ\cdots\circ u_n)\times(u_2'\circ u_3\circ\cdots\circ u_n)\times\cdots\times u_n'$
$\exp u$	$u' \times \exp u$
$\ln\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u}$
u^α où $\alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$

Ces formules sont vraies, sous réserve, évidente, de dérivabilité des fonctions qui interviennent.
Exercice
Avec les résultats admis en début de chapitre, démontrer la formule de dérivation de $u \times v$.

Correction
On exploite la méthode de Weierstrass

$$\begin{aligned}[uv](x) - [uv](x_0) &= u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0) = [u(x_0) + (x-x_0)(u'(x_0)+\epsilon_1(x))][v(x_0)+(x-x_0)(v'(x_0)+\epsilon_2(x))] - u(x_0)v(x_0)\\ &= (x-x_0)[v(x_0)u'(x_0)+u(x_0)v'(x_0) + \underbrace{\epsilon_1(x)[v(x_0)+(x-x_0)v'(x_0)] + \epsilon_2(x)[u(x_0)+(x-x_0)u'(x_0)] + \epsilon_1(x)\epsilon_2(x)(x-x_0)}_{:=\epsilon(x)}]\end{aligned}$$

Comme $\epsilon(x) \to 0$ (par addition et produit des limites), on trouve bien le résultat attendu.
Nous reprendrons toutes ces démonstrations par la suite.

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

Fonctions exponentielles et logarithmes

Savoir faire - Encadrement pour le calcul de limite

Pour obtenir des résultats sur les limites (indéterminées), la meilleure stratégie est l'encadrement :
si $a(x) \leqslant b(x) \leqslant c(x)$ et que a et c admettent la même limite en x_0 égale à ℓ,
alors b admet également une limite en x_0, égale à ℓ.

Analyse - Exponentielle (naturelle) en 0

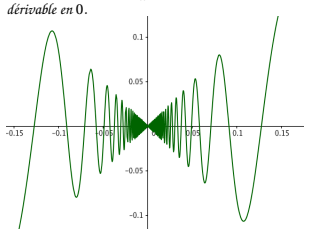
On sait que pour tout $x \in]-1,1[$, $1+x \leqslant e^x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$, donc $x \leqslant e^x - 1 \leqslant \dfrac{x}{1-x}$.
Puis en divisant par $x \neq 0$:

$$1 \geqslant \frac{e^x-1}{x} \geqslant \frac{1}{1-x} \text{ (cas } x<0 \qquad 1 \leqslant \frac{e^x-1}{x} \leqslant \frac{1}{1-x} \text{ (cas } x>0$$

Par encadrement : exp est dérivable en 0, de valeur égale à 1.

Pour aller plus loin - Toutes les fonctions sont dérivables ?

La fonction $x \mapsto x\cos\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en 0.



Mais pire, il existe des fonctions partout continues et nulle part dérivable. La construction est subtile. Par exemple :

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(10^n \pi x)}{2^n}$$

Proposition - Dérivation des fonctions exponentielles

exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
Pour $a > 0$ et $a \neq 1$. Si $f : x \mapsto a^x$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \ln a \times a^x$.

Savoir faire - Transférer un problème exponentiel « en a », vers « en 0 »

Si on étudie exp au voisinage de a, donc des points de la forme $a+h$ avec h proche de 0,
on exploite $\exp(a+h) = \exp a \times \exp(h)$.
Donc on factorise (à l'extérieur) par $\exp a$ et on se concentre sur une étude en ϵ, ϵ proche de 0

On appliquera souvent cette méthode dans le calcul de développement limité.

Démonstration
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $h = x - x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\exp(x)-\exp x_0}{x-x_0} = \frac{\exp(x_0+h)-\exp x_0}{h} = e^{x_0}\frac{e^h-1}{h} \to e^{x_0}$$

On rappelle que $a^x = \exp(x \times \ln a)$. En posant $u = \ln a(x-x_0)$:

$$\frac{a^x - a^{x_0}}{x-x_0} = \frac{\exp(x_0 \ln a + h\ln a) - \exp(x_0 \ln a)}{h \ln a} \times \ln a = e^{x_0 \ln a} \times \ln a \frac{e^u - 1}{u} \to \ln a a^{x_0}$$

car pour $x \to x_0$, on a $u \to 0$ □

Par addition et composition (démontrée plus loin)

Proposition - Fonction trigonométrique hyperbolique

Les fonctions ch, sh et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}\, x$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\, x$ et $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$.

Démonstration
$\mathrm{ch}'(x) = e^x + (-1)e^{-x} = \mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{sh}'(x) = e^x - (-1)e^{-x} = \mathrm{ch}(x)$.
$\mathrm{th}'(x) = \dfrac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$. □

Remarque - $\frac{\partial}{\partial x} e^{-x}$?

On peut noter que $e^{-x} = \left(e^{-1}\right)^x$, c'est une fonction exponentielle de base e^{-1}.
Donc de dérivée : $\ln(e^{-1}) \times (e^{-1})^x = -e^{-x}$.

Analyse - Logarithme (naturel) en 1

On vient de voir que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.
En composant par $X = e^x$ et donc $x = \ln X$, avec l'équivalence $x \to 0 \Leftrightarrow X \to 1$, on a

$$\lim_{X\to 1} \frac{X-1}{\ln X - \underbrace{\ln 1}_{=0}} = 1$$

En prenant l'inverse, on a donc ln est dérivable en 1, de valeur égale à $\frac{1}{1} = 1$.

Proposition - Dérivation des fonctions logarithmes

ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Si $g : x \mapsto \ln_a(x)$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = \dfrac{1}{(\ln a) \times x}$.

Savoir faire - Transférer un problème logarithme « en a », vers « en 1 »

Si on étudie ln au voisinage de a, donc des points de la forme $a+h$ avec h proche de 0,
on factorise (à l'intérieur) par a : $a+h = a(1+\frac{h}{a})$ et exploite $\ln(a+h) = \ln a + \ln(1+\frac{h}{a})$.
Et on se concentre sur une étude en $1+\epsilon$, ϵ proche de 0

On appliquera souvent cette méthode dans le calcul de développement limité.

Démonstration
Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$, pour tout $h = x - x_0 \in \mathbb{R}$ (et $u = \dfrac{x-x_0}{x_0}$),

$$\frac{\ln(x)-\ln x_0}{x-x_0} = \frac{\ln(x_0(1+\frac{h}{x_0}))-\ln x_0}{h} = \frac{1}{x_0} \times \frac{\ln(1+u)}{u} \to \frac{1}{x_0}$$

On rappelle que $\ln_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Par produit (démontré plus loin), $\ln'_a(x_0) = \dfrac{1}{\ln a}\ln'(x_0) = \dfrac{1}{(\ln a) \times x_0}$ □

Fonctions puissances

Proposition - Fonctions puissances

La fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur son ensemble de définition (privé de 0, si besoin : $\alpha - 1 < 0$ alors que $\alpha > 0$), de dérivée : $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration
Il faudrait étudier tous les cas $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$.
Notons que $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$, de dérivée (par composition) : $x \mapsto \alpha \dfrac{1}{x}\exp(\alpha \ln x) = \alpha \dfrac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. □

Par sommation, on retrouve ce qu'on a déjà démontré :

Proposition - Fonctions polynomiales

Les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et précisément, si $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$.

On notera qu'il s'agit encore d'un polynôme, de degré $\deg f - 1$.

L'ensemble de définition des fonctions puissances entières étant $\mathbb{R}$ en entier, les résultats précédents ne sont pas suffisants. Il faut refaire une démonstration.
Il serait tout de même étonnant de trouver des résultats différents…

Fonctions circulaires

Proposition - Fonction trigonométrique
sin, cos et tan sont dérivables sur leur ensemble de définition. Précisément :
$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos x$, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin x$. et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

On applique une méthode déjà connue.

Démonstration
Par encadrement (chapitre précédent) : $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
Ainsi sin est dérivable en 0 de dérivée égale à 1.
De même étudions la dérivabilité de cos en 0 :
$\cos x - 1 = \mathrm{Re}(e^{ix} - 1) = \mathrm{Re}(e^{ix/2}(2i \sin\frac{x}{2})) = -2\sin^2\frac{x}{2}$.
Donc $\dfrac{\cos x - 1}{x} = -\sin\frac{x}{2}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \to 0$ (par produit 0×1).
Ainsi cos est dérivable en 0 de dérivée égale à 0.
Puis $\dfrac{\sin(x_0) - \sin x}{x_0 - x} = \dfrac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \dfrac{\sin x_0(\cos h - 1) + \sin h \cos x_0}{h} = \dfrac{\cos h - 1}{h}\sin x_0 + \dfrac{\sin h}{h}\cos x_0 \to \cos x_0$ pour $h \to 0$.
Puis $\dfrac{\cos(x_0) - \cos x}{x_0 - x} = \dfrac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h} = \dfrac{\cos x_0(\cos h - 1) - \sin h \sin x_0}{h} = \dfrac{\cos h - 1}{h}\cos x_0 - \dfrac{\sin h}{h}\sin x_0 \to -\sin x_0$ pour $h \to 0$.
Pour la fonction tangente, on se souvient que $\tan(x_0 + h) - \tan x_0 = \dfrac{\tan x_0 + \tan h}{1 - \tan x_0 \tan h} - \tan x_0 = \dfrac{\tan h(1 + \tan^2 x_0)}{1 + \tan x_0 \tan h}$.
Donc $\dfrac{\tan(x_0 + h) - \tan x_0}{h} = \dfrac{\sin h}{h}(1 + \tan^2 x_0)\dfrac{1}{\cos h(1 + \tan x_0 \tan h)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1 + \tan^2(x_0) = \dfrac{1}{\cos^2 x_0}$
□

Les résultats sur les dérivées des fonctions réciproques arcsin… seront vus loin lorsqu'on étudiera la dérivation de fonctions réciproques.

2.6. Dérivées seconde, troisième...

Définition - Dérivables
Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I.
On dit que f est deux fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et si f' est elle-même dérivable sur I, on note f'' la dérivée seconde de f (c'est-à-dire la dérivée de f').
Si f'' est encore dérivable sur I, on dit que f est trois fois dérivable sur I et on note $f''' = f^{(3)} = (f'')'$ sa dérivée troisième, et ainsi de suite.

Définition - Fonction de classe $\mathscr{C}^k$
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ ou continûment dérivable si elle est dérivable et que f' est continue, de classe $\mathscr{C}^2$ ou 2 fois continûment dérivable si elle est deux fois dérivable et que f'' est continue...

Comme les dérivées des fonctions usuelles vues plus haut sont de la forme de fonctions usuelles, par récurrence :

Proposition - Fonctions usuelles
Les fonctions usuelles vues précédemment sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition (sauf les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ qui peuvent perdre le 0 dans l'ensemble à la dérivée n-ième si $n > \alpha$…).

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

En utilisant les théorèmes suivants (qui seront démontrés ultérieurement), on peut étudier les variations d'une fonction que l'on résume **systématiquement** dans un tableau de variations, complété par les limites aux bornes (et non par des phrases!)

Théorème - Monotonie et fonction dérivée
Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I. Alors :
f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$;
f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$;
f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sauf en un nombre fini de points de I, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Attention - Intervalle!
Il est indispensable que I soit un intervalle. On peut en effet trouver f définie sur D, dérivable sur D et vérifiant $\forall x \in D,\ f'(x) < 0$ mais qui n'est pas décroissante sur D.

Exercice
Donner un tel contre-exemple

Correction

3.2. Bijections et réciproques

Théorème - Dérivation de la bijection réciproque
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ bijective de I sur J. On suppose que f est dérivable en $x_0 \in I$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ **si et seulement si** $f'(x_0) \neq 0$
et on a alors
$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$
ou encore, avec $y_0 = f(x_0)$,
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

Remarque - Se souvenir

On peut retrouver la formule en dérivant l'égalité $f^{-1}\circ f = \mathrm{Id}$, en effet :

$$(f^{-1}\circ f)' = f' \times (f^{-1})'\circ f = (\mathrm{Id})' = (x \mapsto 1)$$

mais attention à ne pas oublier la condition de dérivabilité de f^{-1} !

Si $f'(x) \neq 0$: $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$ si $y = f(x)$ et $f'(x) = f'(f^{-1}(y)) \neq 0$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Proposition - Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions arcsin et arccos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$,
avec $\forall\, x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La fonction arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,
avec $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Démonstration

$x \in \mathscr{D}_{(\sin^{-1})'} \iff \sin'(\arcsin(x)) \neq 0 \iff \cos(\arcsin(x) \neq 0 \iff \arcsin x \notin \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} \iff x \notin \{-1,1\}$.
Donc $\mathscr{D}_{\arcsin'} =]-1,1[$ et
$\forall\, x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$x \in \mathscr{D}_{(\cos^{-1})'} \iff \cos'(\arccos(x)) \neq 0 \iff \sin(\arccos(x) \neq 0 \iff \arccos x \notin \{0,\pi\} \iff x \notin \{-1,1\}$.
Donc $\mathscr{D}_{\arccos'} =]-1,1[$ et
$\forall\, x \in]-1,1[$, $\arccos'(x) = \dfrac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$x \in \mathscr{D}_{(\tan^{-1})'} \iff \tan'(\arctan(x)) \neq 0 \iff x \notin \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Or cette dernière affirmation est toujours vraie. Donc $\mathscr{D}_{\arctan'} = \mathbb{R}$ et
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$. □

Pour aller plus loin - Création de fonctions

Dans un autre sens, on peut considérer :

1. *f strictement monotone et continue de I sur J.*
2. *Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} de J sur I.*
3. *Notons Φ, une primitive de f^{-1}.*

Que peut-on dire de Φ ?
Montrer que la plupart des fonctions transcendantes rencontrées dans ce cours peuvent être obtenus de la sorte…

Corollaire -

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est :
- continue strictement monotone sur l'intervalle I,
- dérivable sur I et
- $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$

alors f est bijective de I sur $J = f(I)$, donc $f^{-1} : J \to I$ existe (et est bijective).

Mieux : f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$.

Graphiquement : $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est la symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe $y = x$.

Savoir faire - Etudier si f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme

On considère f, de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I.

1. On coupe I, en réunion d'intervalles $I_1, I_2, \dots I_n$ sur lesquels f est strictement monotone
   (A noter que cela n'est pas toujours possible…. Donnez des contre-exemple).
   Cela conduit à étudier le signe strictement non nul de f'. Les frontières sont en dans $\{x \mid f'(x) = 0\}$.
2. Sur chaque intervalle I_k, on note $J_k = \{y = f(x), x \in I_k\}$ et donc $f_k = f|^{J_k}_{I_k} : I_k \to J_k$ est bijective.
3. Puis, on considère $J'_k = \{y = f(x), x \in I_k \mid f'(x) \neq 0\} \subset J_k$.
   (Souvent les problèmes sont sur les bords des J_k, lié à la jonction de I_k et I_{k+1} ou I_{k-1}, mais cela n'est pas nécessaire).
   Alors $f_k^{-1} : J_k \to I_k$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J'_k et pour tout $y \in J'_k$:

$$(f^{-1})'(y) = (f_k^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f_k^{-1}(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y)}$$

Gardons en mémoire que graphiquement : $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est la symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe $y = x$.
Les cas problématique correspond à une pente nulle pour $\mathscr{C}_f$ et donc infinie pour $\mathscr{C}_{f^{-1}}$…

Exercice

La fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est notée argsh (argument sinus hyperbolique).
La fonction ch réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. La bijection réciproque est notée argch (argument cosinus hyperbolique).
La fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. La bijection réciproque est notée argth (argument tangente hyperbolique).

1. Dérivées.
   (a) Montrer que les fonctions argsh, argch, argth sont dérivables respectivement sur $\mathbb{R}$, $]1,+\infty[$ et $]-1,1[$.
   (b) Montrer que $(\mathrm{argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$
   (c) Montrer que $(\mathrm{argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1,+\infty[$
   (d) Montrer que $(\mathrm{argth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$
2. Expressions logarithmiques.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{argsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
   (b) Montrer que $\forall x \in]1,+\infty[$, $\mathrm{argch}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
   (c) Montrer que $\forall x \in]-1,1[$, $\mathrm{argth}\, x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

Correction

3.3. Inégalités

Savoir faire - Obtenir une inégalité

Pour démontrer une inégalité, une méthode est d'étudier la fonction formée par la différence des deux membres, d'établir son tableau de variations pour obtenir son signe.

Exercice

Montrer les inégalités :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^-,\ x - \frac{x^3}{6} \geqslant \sin x \geqslant x.$$

Correction

Commençons par noter que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leqslant 1$.
Les fonctions sin, cos et polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de même de leurs additions :

$$f_1 : x \mapsto \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \qquad f_2 : x \mapsto \sin x - x \qquad f_3 : x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

Les dérivées sont respectivement :

$$f_1' : x \mapsto -\sin x + x \qquad f_2' : x \mapsto \cos x - 1 \qquad f_3' : x \mapsto \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

On en déduit les tableaux de variations dans l'ordre déductif suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_2'		$-$		$-$	
f_2		↘	0	↘	
$f_1'(=-f_2)$		$-$	0	$+$	
f_1		↘	0	↗	
$f_3'(=f_1)$		$+$	0	$+$	
f_3		↗	0	↗	

Donc $\cos x \leqslant 1$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f_1(x) \geqslant 0$, donc $\cos x \geqslant 1-x$.

Et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_3(x) \geqslant 0$, donc $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$ et $f_2(x) \leqslant 0$ donc $\sin x \leqslant x$.

Et pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f_3(x) \leqslant 0$, donc $\sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6}$ et $f_2(x) \geqslant 0$ donc $\sin x \geqslant x$.

Savoir faire - Obtenir un maximum (avec une dérivée)

Pour obtenir un extremum de f (dérivable deux fois) sur I, on résout $f'(x) = 0$.

On note x_0 la solution de cette équation (donc $f'(x_0) = 0$).

- si $f''(x_0) > 0$, alors f présente un minimum (local) en x_0.
- si $f''(x_0) < 0$, alors f présente un maximum (local) en x_0.
- si $f''(x_0) = 0$, alors on ne peut rien dire.

Remarque - Convexité

On rappelle que si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$, on dit que f est convexe sur I.

3.4. Calculs de limites (lever les indéterminations)

On peut calculer certaines limites en reconnaissant le taux de variations d'une fonction dérivable connue.

Exercice

Rappeler les valeurs des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}.$$

En déduire

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

Correction

Il s'agit de limite de taux de variations donc d'un calcul de dérivée :

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$, $\frac{\tan x}{x} = \tan'(0) = 1+\tan^2(0) = 1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} = \cos'(0) = \sin(0) = 0$.

Enfin, en posant $u = \frac{x}{2}$:

$$\frac{\cos x-1}{x^2} = -2\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = -\frac{\sin^2(u)}{2u^2} = -\frac{\sin^2(u)}{2u^2} = \frac{-1}{2}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

En faisant tendre $x \to 0$, donc $u \to 0$, on a par produit de limite : $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = -\frac{1}{2}\times 1^2 = -\frac{1}{2}$

Proposition - Règle de L'Hospital (1696)

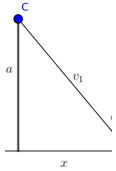
Soient f et g deux fonctions définies sur I, dérivables en $x_0 \in I$.

On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en x_0.

Alors $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Pour aller plu et Descartes

Fermat et Descarte fraction (loi de Sn monstration de De sain proposait de t aller de C à D, sa milieu est v_1 et celi



Paramétrons ce ch minimiser :

$$T(x) = \frac{\sqrt{}}{}$$

Et comme $\sin$

$\frac{\ell-x}{\sqrt{b^2+(\ell-x)^2}}$, *on*

On fait la démonstration dans le cas où $g'(x_0) \neq 0$. Sinon, on exploitera l'inégalité des accroissements finis (dans un chapitre prochain).

Démonstration

Avec les notations de Weierstrass :

$$f(x) = (x-x0)(f'(x_0)+\epsilon_1(x)) \qquad g(x) = (x-x0)(g'(x_0)+\epsilon_2(x))$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)+\epsilon_1(x)}{g'(x_0)+\epsilon_2(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

□

Attention - Pas d'abus

La règle ne s'applique qu'en cas d'indetermination.

$$-4 = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3} \neq \lim_{x\to 1}\frac{6x}{2} = 3$$

Pour aller plus loin - Généralisation en $+\infty$

Il existe une généralisation de la règle de L'Hôpital avec une indétermination du type $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Si $\lim_a |f| = \lim_a |g| = +\infty$ et si $\lim_a \frac{f'}{g'} = \ell$, alors $\lim_a \frac{f}{g} = \ell$

Savoir faire - Lever une indétermination par la règle de L'Hospital

1. D'abord on vérifie bien qu'on peut appliquer la règle de L'Hospital :

$$f = \frac{n}{d} \text{ avec } n(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \text{ et } d(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

2. On calcule $n'(x)$, $n''(x)\ldots n^{(k)}(x)\ldots$ jusque à ce que $n^{(k)}(x) \not\xrightarrow[x\to a]{} 0$

   Et de même $d'(x)$, $d''(x)\ldots d^{(\ell)}(x)\ldots$ jusqu'à ce que $d^{(\ell)}(x) \not\xrightarrow[x\to a]{} 0$.

3. On note $m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n^{(k)}(x) \not\to 0 \text{ ou } d^{(k)}(x) \not\to 0\}$.

Et on connait donc $\lim_a \frac{n^{(k)}}{d^{(k)}}$, et par la règle de L'Hospital : $\lim_a \frac{n^{(k-1)}}{d^{(k-1)}}$ a la même valeur.

4. Et on remonte ainsi à $\lim_a \frac{n}{d}$, dont on sait seulement maintenant qu'elle existe et qu'elle a cette même valeur.

Exercice

Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^3+5x^2}$.

Evidemment, on exploitera les résultats non encore démontrés sur les fonctions usuelles

Correction

On note $f : x \mapsto \cos 2x-1$, dérivable, $f'(x) = -2\sin(2x)$, donc $f'(0) = 0$.

On note $g : x \mapsto x^3+5x^2$, dérivable, $g'(x) = 3x^2+10x$, donc $g'(0) = 0$.

On a toujours une forme indéterminée.

On reprend avec $f''(x) = -4\cos(2x)$, donc $f''(0) = -4$.

Et $g''(x) = 6x+10$ donc $g''(0) = 10$.

Ainsi

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-4}{10} = \frac{-2}{5}$$

3.5. Approximation polynomiale (développement limité)

Heuristique - Approximation polynomiale LOCALE

Nos fonctions usuelles ne sont pas des polynômes, on ne cherche par à remplacer une fonction usuelle par une fonction polynomiale sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant une infinité de points.

Mais on peut faire des comparaison au voisinage d'un point.

La définition de Weierstrass de la dérivabilité de φ en x_0 avec pour valeur $A(=\varphi'(x_0))$ exprime :

$$\exists\, A \in \mathbb{R}, \exists\, \epsilon : I \to \mathbb{R} \text{ continue en } x_0 \text{ avec } \epsilon(x_0) = 0 \mid \forall\, x \in I, \varphi(x) = \varphi(x_0)+A(x-x_0)+(x-x_0)\epsilon(x)$$

On va donc chercher une fonction polynomiale f de degré n tel que

$$\varphi(x) = f(x)+(x-x_0)^n\epsilon(x) \qquad \text{avec } \epsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

, *On commence par étudier les cas $x_0 = 0$.*

Proposition - Développement polynomiale en 0
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère φ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, contenant 0.
On note $T : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - T(x)}{x^n} = 0$$

Autrement écrit : il existe $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\varphi(x) = T(x) + x^n\epsilon(x)$.

On commence par un lemme (qui sera enrichit dans la suite du cours)

Lemme - Dérivation monôme
Notons $m_s : x \mapsto x^s$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m_s^{(k)}(0) = 0$ si $k \neq s$ et $m_s^{(s)}(0) = s!$.

Commençons par démontrer le lemme

Démonstration
Pour le lemme, on remarque que m_s est une fonction polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Par récurrence (finie), on note pour $k \leqslant s$, $\mathscr{P}_k : m_s^{(k)} : x \mapsto \frac{s!}{(s-k)!} x^{s-k}$.

— $\mathscr{P}_0$ est vraie
— Soit $k \leqslant s-1$. Supposons que $\mathscr{P}_k$ est vraie.

$$m_s^{(k+1)}(x) = (m_s^{(k)})'(x) = \left(x \mapsto \frac{s!}{(s-k)!} x^{s-k}\right)'(x) = \frac{(s-k)\times s!}{(s-k)!} x^{s-k-1} = \frac{s!}{(s-k-1)!} x^{s-k-1}$$

Donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

On a donc, ensuite, $m_s^{(s)}(x) = s!$ (constante) et pour tout $k > s$, $m_s^{(k)}(x) = 0$, en particulier $m_s^{(k)}(0) = 0$.
□

Démonstration
On applique la règle de L'hopsital.
1. Notons $den : x \mapsto x^n$. Donc $den = s_n$.
En application directe du lemme : $den^{(k)}(0) = 0$ si $k \leqslant n-1$ et $den^{(n)}(0) = n!(\neq 0)$.
2. Notons $num : x \mapsto f(x) - T(x)$.
Par linéarité (addition ici) n est de classe $\mathscr{C}^n$ et pour tout $k \leqslant n$, $(f-T)^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) - T^{(k)}(0)$.
Puis par linéarité de la dérivation d'un polynôme (pour $k \leqslant n$) :

$$T^{(k)} = \left(\sum_{i=0}^{n} [T]_i s_i\right)^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} [T]_i s_i^{(k)} = 0 + \cdots + 0 + [T]_k k! + 0 + \cdots + 0 = f^{(k)}(0)$$

On a donc $num^{(k)}(0) = 0$, pour tout $k \leqslant n$. On peut enfin appliquer la règle de L'Hospital en remontant : Pour tout k de 1 à n, $\frac{num^{n-k}}{den^{n-k}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ □

Exemple - DL de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \notin \mathbb{N}$)
Notons $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$.
Alors $f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, et par récurrence :

$$f_\alpha^{(k)}(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) \times (1+x)^{\alpha-k}$$

Et donc $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + x^n\epsilon(x)$.

Exercice
Quelle formule obtient-on pour $\alpha = -1$?

Correction
La formule de Lagoute $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$ ou suite géomtérique

Exercice

1. Donner une équation différentielle simple vérifiée par exp
2. En déduire le $DL_n(0)$ de exp.
3. En déduire le $DL_n(0)$ de ch et sh
4. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $x \mapsto e^{ix}$.
5. En déduire le $DL_n(0)$ de cos et sin

Correction

1. On note $y = \exp$, on a $y' = y$.
2. Par récurrence immédiate : $y^{(n)} = y = \exp$ et donc $\exp^{(n)}(0) = e^0 = 1$.
Donc pour x proche de 0, $\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + x^n\epsilon(x)$.
3. Par linéarité de la dérivation (ou du calcul polynomial) ou par périodicité des dérivées :
Pour x proche de 0, $\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + x^n\epsilon(x)$
Pour x proche de 0, $\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + x^n\epsilon(x)$
4. Notons $E : x \mapsto e^{ix}$, on a $E^{(n)} = i^n e^{ix} = e^{ix + n\frac{\pi}{2}} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) + i\sin(x + n\frac{\pi}{2})$.
En prenant les parties réelles et imaginaires :
Pour x proche de 0, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + x^n\epsilon(x)$
Pour x proche de 0, $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + x^n\epsilon(x)$

Remarque - Développement limité
L'exercice qui suit, prépare à la théorie des DL (second semestre). On a un stock de DL connue (fonction usuelle), puis on combine le résultat avec des calculs polynomiaux
Exercice
On rappelle que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ au voisinage de 0 et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$ au voisinage de 0.
Donner le DL_2 au voisinage de 0 de $x \mapsto \cos(x)e^x$ et de $x \mapsto \cos(e^x - 1)$

Correction
Le produit polynomial :

$$e^x \cos x = (1 + x + \frac{1}{2}x^2)(1 - \frac{1}{2}x^2) + o(x^2) = 1 + x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^2) = 1 + x + o(x^2)$$

$$\cos(\underbrace{e^x - 1}_{:=u\to 0}) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) = 1 - (x + \frac{x^2}{2})^2 + o(x^2) = 1 - x^2 + o(x^2)$$

4. Dérivation de fonctions réelles à valeurs complexes

4.1. Fonctions à valeurs complexes

Aparté. L'exponentielle complexe

Définition - Exponentielle complexe
Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe de z par

$$\exp z = e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\mathrm{Im}(z)}.$$

Son module est $e^{\mathrm{Re}(z)}$ et un argument est $\mathrm{Im}(z)$.

Proposition - Elargissement
On retrouve les propriétés classiques de l'exponentielle :
— L'exponentielle complexe coïncide bien avec l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ pour les réels ou avec l'exponentielle des imaginaires purs.
— Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Démonstration
Si $z = a + 0i \in \mathbb{R}$, alors $\exp(z) = e^a$.
Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ (notation standard), alors

$$e^{z+z'} = e^{(a+a')+i(b+b')} = e^{a+a'}e^{i(b+b')} = e^a e^{a'} e^{ib} e^{ib'} = e^{a+ib} e^{a'+ib'} = e^z e^{z'}$$

En particulier :

$$e^{-z}e^z = e^{-z+z} = e^0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

□

Exercice

1. Résoudre $e^z = 1$.
2. Résoudre $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.
3. Résoudre plus généralement $e^z = z_0$
4. Déterminer l'image d'une droite d'équation $x = a$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.
5. Déterminer l'image d'une droite d'équation $y = b$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

Correction

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.
$$e^z = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) \equiv 0[2\pi] \Longleftrightarrow z \in \{2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$
$$e^z = 1 - i\sqrt{3} \Longleftrightarrow e^{\mathrm{Re}(z)} = \sqrt{1+3} = 2, \mathrm{Im}(z) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \Longleftrightarrow z \in \{\ln 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$
3. Résoudre plus généralement $e^z = z_0$.
$$e^z = z_0 \Longleftrightarrow e^{\mathrm{Re}(z)} = |z_0|, \mathrm{Im}(z) \equiv \arg(z_0)[2\pi] \Longleftrightarrow z \in \{\ln|z_0| + i(\arg(z_0) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$
4. Déterminer l'image d'une droite $\mathscr{D}_a$ d'équation $x = a$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.
$z \in \mathscr{D}_a \Longleftrightarrow \exists\, y \in \mathbb{R} \mid z = a + iy$. Et $\exp(z) = e^a e^{iy}$. Donc :
$$\exp(\mathscr{D}_a) = \mathscr{C}_{e^a},$$
cercle de centre O et de rayon e^a.
Il faudrait vérifier (trivialement) l'inclusion réciproque…
5. Déterminer l'image d'une droite $\mathscr{D}_b$ d'équation $y = b$ par l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.
$z \in \mathscr{D}_b \Longleftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} \mid z = x + ib$. Et $\exp(z) = e^x e^{ib}$. Donc :
$$\exp(\mathscr{D}_a) = \mathscr{D}_{\theta_b},$$
demi-droite d'origine O et faisant un angle b avec l'axe des abscisses.
Il faudrait vérifier (trivialement) l'inclusion réciproque…

Proposition - Résolution d'équation
— Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp z = \exp z'$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
— Tout complexe $z_0 \neq 0$ peut s'écrire sous la forme $\exp z$.

Démonstration
Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$e^z = e^{z'} \Longleftrightarrow e^a e^{ib} = e^{a'} e^{ib'} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^a = e^{a'} \\ b \equiv b'[2\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$$

Par construction, si $z_0 \neq 0$, en prenant $z = \ln(|z_0|) + i\arg(z_0)$ (possible car $|z_0| \neq 0$) :

$$e^z = e^{\ln(|z_0|)} e^{i\arg(z_0)} = |z_0| e^{i\arg(z_0)} = z_0$$

□

Fonctions d'une variable réelle, à valeurs complexes

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Découpage d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soient $f_1 : I \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I \to \mathbb{R}$. On pose : $\forall x \in I,\ f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$.
$f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ *(si I n'est pas précisé au départ, son domaine de définition est l'intersection de ceux de f_1 et f_2).*
On définit les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ (partie réelle de f) et $\mathrm{Im}(f)$ (partie imaginaire de f) à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{Re}(f) = f_1 : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array} \qquad \mathrm{Im}(f) = f_2 : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array}$$

On dit que f est continue sur I si f_1 et f_2 sont continues sur I.

Exemple - $t \mapsto e^{it}$
L'exemple classique (simple) est la fonction circulaire exponentielle : $\exp_i : t \mapsto \cos t + i \sin t$.
Sa partie réelle est la fonction cosinus et sa partie imaginaire est la fonction sinus.
On a vu qu'il s'agissait bien d'une fonction exponentielle car vérifiant :

$$\exp_i(a + b) = \exp_i(a) \times \exp_i(b)$$

mais à valeurs complexes et non réels (donc on perd $\exp_i(a) > 0$, les limites à l'infini…).
Analyse - Justifions que sa base est bien e^i
On a défini $\exp(x) = e^x$ comme la limite de $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
Que se passe-t-il si l'on considère $x = it$?
x_n est alors une suite à valeurs complexes dont le module est. :

$$\left|1 + \frac{ix}{n}\right|^n = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n}$$

Comme $\frac{x^2}{n}$ tend vers 0, à partir d'un certain rang :

$$1 - n\frac{x^2}{n^2} \leqslant \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant \frac{1}{1 + n\frac{x^2}{n^2}}$$

Le deux termes à gauche et à droite tendent vers 1, par encadrement (et continuité de $\sqrt{\cdot}$), $|x_n| \to \sqrt{1} = 1$.
Et si θ_n est l'argument de x_n, on a

$$\theta_n = \arg\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = n\arg(1 + i\frac{x}{n}) = n\arctan\frac{x}{n}$$

On démontre que pour $u \to 0$, $\frac{\arctan u}{u} \to 1$, donc $\frac{\arctan\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \to 1$ et donc $\theta_n \to x$.
Ainsi $x_n \to \cos x + i \sin x$, ce qui justifie officiellement le signe égal de $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

4.2. Dérivation d'une fonctions d'une variable réelle, à valeurs complexes

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction à valeurs complexes.
Soient $f_1 : I \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I,\ f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$.
On dit que f est dérivable, respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f_1 et f_2 sont dérivables, respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
Si f est dérivable sur I, on définit sa dérivée par :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x).$$

On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions continues (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}$).

Remarque - Commutativité de la dérivation complexe et de la partie réelle ou imaginaire
Si f à valeurs complexes est dérivable on a donc $(\mathrm{Re}(f))' = \mathrm{Re}(f')$ *et* $(\mathrm{Im}(f))' = \mathrm{Im}(f')$.

Proposition - Constance et dérivation
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. Alors f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Pour la démonstration, on admet ces résultats pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration
Sur I :

$$f' = 0 \iff \begin{cases} f_1' = 0 \\ f_2' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f_1 \text{ constante} \\ f_2 \text{ constante} \end{cases} \iff f \text{ constante}$$

□

4.3. Propriétés

Attention - Croissance sur $\mathbb{C}$?
Parler de croissance (ou de décroissance) d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'a pas de sens.

Proposition - Opérations
Soient f et g deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $f+g$, fg et αf sont dérivables sur I et

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (fg)'(x) &= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \\ (\alpha f)' &= \alpha f' \end{aligned}$$

Si g ne s'annule pas, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \frac{-g'(x)}{g(x)^2} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Exercice
Faire les démonstration.
Il suffit d'exploiter la commutativité entre dérivation et partie réelle ou imaginaire.

Correction

4.4. Composition avec l'exponentielle complexe

Théorème - Dérivée de l'exponentielle complexe
Soit $\phi : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. Alors

$$\begin{aligned} \psi : \quad I &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto e^{\phi(x)} \end{aligned}$$

est dérivable sur I et : $\forall x \in I, \quad \psi'(x) = \phi'(x)e^{\phi(x)}$

Démonstration
On note $\phi = \phi_1 + i\phi_2$.
On a alors

$$\forall x \in I, \quad \psi(x) = e^{\phi_1(x)} \times e^{i\phi_2(x)} = e^{\phi_1(x)} \times (\cos(\phi_2(x)) + i\sin(\phi_2(x)))$$

dérivable par produit :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad \psi'(x) &= \phi_1'(x)e^{\phi_1(x)}e^{i\phi_2(x)} + e^{\phi_1(x)}\phi_2'(x)(-\sin(\phi_2(x)) + i\cos(\phi_2(x))) \\ &= \phi_1'(x)e^{\phi_1(x)}e^{i\phi_2(x)} + e^{\phi_1(x)}\phi_2'(x)i(i\sin(\phi_2(x)) + \cos(\phi_2(x))) \\ &= (\phi_1'(x) + i\phi_2'(x))e^{\phi(x)} = \phi'(x)e^{\phi(x)} \end{aligned}$$

□

Attention - i joue un rôle comparable à celle d'un nombre réel
On fera bien attention à ne pas oublier le i dans la dérivation !

Exercice
Calculer la dérivée $f : x \mapsto (\arcsin(x))e^{2x+ix^2}$.

Correction
f est dérivable sur $\mathbb{C}$, comme produit et composition de fonctions dérivables sur $]-1,1[$.

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (2+2ix)\arcsin(x)\right)e^{2x+ix^2}$$

Application - Fonction polaire
On considère $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \theta \mapsto \rho(\theta)e^{i\theta}$. On dit que l'on définie une fonction polaire.
On suppose que $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est dérivable sur I.
• Montrons que g est dérivable et calculons g'.
Par produit de fonctions dérivables sur I, g est dérivable sur I.
Et pour tout $x \in I$, $g'(\theta) = \rho'(\theta)e^{i\theta} + i\rho(\theta)e^{i\theta}$.
• Il arrive que pour ce genre de fonction, on ait besoin de calculer $|g'(\theta)|$.
On utilise la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in I, \quad |g'(\theta)|^2 &= g'(\theta)\overline{g'(\theta)} = (\rho'(\theta)e^{i\theta} + i\rho(\theta)e^{i\theta})\overline{(\rho'(\theta)e^{i\theta} + i\rho(\theta)e^{i\theta})} \\ &= (\rho'(\theta)e^{i\theta} + i\rho(\theta)e^{i\theta})(\rho'(\theta)e^{-i\theta} - i\rho(\theta)e^{-i\theta}) \\ &= [\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2 \end{aligned}$$

Donc pour tout $\theta \in I$, $|g'(\theta)| = \sqrt{[\rho'(\theta)]^2 + [\rho(\theta)]^2}$

5. Bilan

Synthèse

- Au voisinage d'un point, on peut regarder comment la fonction évolue : c'est la valeur de la dérivée en ce point qui nous l'indique. On associe alors (si possible) f une nouvelle fonction : celle qui donne la valeur de dérivée en tout point. MIRACLE. Le passage $f \to f'$ se décrit très bien en terme d'algorithme (sans avoir à passer par le nombre dérivée). Il faut donc apprendre des tas de règles de calculs (à démontrer, par ailleurs...).
- Ainsi plusieurs fonctions de référence sont à connaître : exponentielle(s) et logarithme(s) en toute base ; les fonctions puissances ; les fonctions circulaires (sin, arccos...) et hyperboliques directes. On doit savoir comment comparer ces fonctions lorsqu'elles sont en compétition au voisinage de point problématique.
- Le théorème de la bijection est un résultat important. Il faut le connaître, même si pour l'heure la démonstration nous échappe sans une définition précise de la continuité (et donc de $\mathbb{R}$).
- En retour, la fonction dérivée permet de mieux comprendre localement la fonction. On peut alors étudier des variations, faire de l'optimisation (locale) ou lever des indéterminations (pour du calcul de limite).
- Les fonctions complexes de la variables réelles s'étudient de la même façon (même si la représentation est plus complexe). En fait, ce qui compte, c'est la nature de la variable « de départ ».

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Truc & Astuce pour le calcul - A propos de la tangente
- Savoir-faire - Encadrement pour le calcul de limite
- Savoir-faire - Transférer un problème exponentiel de « en a » vers « en 0 ».
- Savoir-faire - Transférer un problème logarithme « en a » vers « en 1 ».
- Savoir-faire - Transférer un problème trigonométrique « en a » vers « en 0 ».
- Savoir-faire - Etudier si f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme
- Savoir-faire - Obtenir une inégalité
- Savoir-faire - Obtenir un maximum (dérivation)
- Savoir-faire - Lever une indétermination par la règle de L'Hospital
- Savoir-faire - Etude des branches infinies (et définition)

Retour sur les problèmes

34. On a une fonction $A(a_0+e)$ qui donne l'aire en fonction de a_0+e. Elle est optimale en a_0 lorsque $A(a_0-\epsilon) < A(a_0)$ et $A(a_0+\epsilon) < A(a_0)$ avec $\epsilon > 0$.
    Le calcul $A(a_0+e)$ donne exactement $A(a_0)+eA'(a_0)+\dots$. On trouve, avec la méthode de Fermat : $A'(a_0)=0$, ce qui donne bien l'optimal de A.
35. Il faut nécessairement que Résultat$'$(Action) = 0, ce qui conduit à une équation donc la valeur recherchée Action$_0$ est solution. Malheureusement, la condition bien que nécessaire n'est pas suffisante.
36. C'est un vrai miracle que cela soit aussi simple (et que le tableau ne soit pas plus compliqué...).
    A moins que cela soit l'inverse : c'est parce que $y'=y$ se rencontre partout que l'exponentielle est si importante...
37. Cours
38. C'est le but de la formule de L'Hospital.
39. On vient de terminer ce chapitre en répondant à cette question.

Chapitre 8

Fonctions primitives et équations différentielles

Résumé -

Dans ce chapitre, le point de vue adopté est celui de Newton et Leibniz puis Euler, qui font de l'intégration l'opération inverse de la dérivation, c'est-à-dire que si f est une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b, admettant une primitive F, on définit l'intégrale de a à b de f par $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) = \left[F(t)\right]_a^b$.
Par propriétés de la dérivation (linéarité et primitivation d'inégalités), on obtient la linéarité et la croissance de l'intégrale ainsi définie. On s'exercera aussi techniquement pour maitriser ce calcul intégral, le fameux calculus.
Hypothèse forte : on admet toujours qu'une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I. La démonstration aura lieu plus tard.
Dans la très grande famille des équations différentielles, nous nous concentrons uniquement sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et les équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants. Cela réduit largement les équations différentielles rencontrées, mais la raison est bonne : ce sont celles que l'on rencontre le plus souvent (à cause de la linéarisation des problèmes physiques) et ce sont celles que l'on sait résoudre (la fonction exponentielle a été crée pour cela).
Quelques liens youtube :
- *Hedacademy - Les primitives. https ://www.youtube.com/watch ?v=05ikcAFcPZ0*
- *Exo7 - Equation différentielle - https ://www.youtube.com/watch ?v=dkjXofPNMDo*
- *5min Lebesgue - forme idéale - https ://www.youtube.com/watch ?v=9x91d0UnBTw*

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 37 - Lien primitve/intégrale

Calculer l'aire d'une surface est un « vieux » problème. Par exemple : quelle est l'aire d'une ellipse, d'une lunule?
Optimiser, trouver un maximum ou un minimum est un autre « vieux » problème des mathématicien.
Existe-t-il un lien (profond, donc) entre les deux?

? Problème 38 - Problèmes historiques

Galilée affirme en 1638 que la forme d'une chaîne suspendue entre deux clous est presqu'une parabole. Huygens, démontre 20 ans plus tard que ceci est faux. La solution, appelée caténaire (ou chainette) est donnée une vingtaine d'année plus tard par Leibniz et Johann Bernoulli.
Lors du séjour de Leibniz à Paris (1672-1673) durant lequel il suit des cours d'Huygens, Claude Perrault lui pose le problème suivant : *quelle est la courbe qui a la propriété qu'en chacun de ses points P, le segment de la tangente entre P et l'axe x est de longueur constante a ?* Pour concrétiser cette question, Perrault tire de son gousset une "hotlogio portabili suae thecae argenteae" et la fait glisser sur la table. Il précise qu'aucun mathématicien parisien ni toulousain (Fermat) n'a été capable d'en trouver l'équation.

? Problème 39 - Primitivisation des opérations algébriques

Pour le calcul de dérivation, le cours est grossièrement constitué d'un tableau de dérivation usuelle et de trois savoir-faire : comment dériver une addition, comment dériver une multiplication, comment dériver une composition?
Avec ça, on arrive à tout (ou presque)...
Qu'en est-il de la primitivisation (opération inverse de la dérivation)? Un tableau semble tout à fait possible, la règle de l'addition semble également bien s'inverser. Mais pour la multiplication? Et la composition?
Quelle est la primitive de $f \times g$? Quelle est la primitive de $f \circ g$?

? Problème 40 - Fraction rationnelle

Il est facile d'intégrer (ici, trouver la primitive) de toutes fonctions polynomiales.
Est-il possible d'intégrer toute division de polynôme, c'est-à-dire toute fraction rationnelle?
Dans le cas d'une forme factorisée, cela donne :
Quelle est une primitive de $x \mapsto \dfrac{P(x)}{(x-a)(x-b)^n(x^2+cx+d)^m}$ avec $c^2 - 4d < 0$?

? Problème 41 - Implication

Si une fonction est dérivable, alors elle est continue. La réciproque est bien entendu fausse.
Existe-t-il un lien entre « admettre une primitive » et « être continue » ?
Comment gère-t-on une fonction non continue?
Par exemple, existe-t-il une primitive à tan? Existe-t-il une primitive continue à tan?

? Problème 42 - Problème de M. Lagoute

Que dire de $y'' + y = 0$? Tout dire!
C'est le fameux oscillateur harmonique, vu et revu en cours de sciences physiques.

? Problème 43 - Existence. Unicité

Est-ce qu'une équation différentielle admet toujours une, une seule, solution?
Ce n'est pas le cas de $y'' + y = 0$ qui admet au moins comme solution $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. En admette-t-elle d'autres? Peut-on lister toutes les solutions?
Et alors, quel type de contraintes ajoutées pour obtenir une équation différentielle avec une et une seule solution?
Et par ailleurs, existe-t-il des équations différentielles sans solution?

? Problème 44 - Linéarisation

Dans ce cas, nous étudions que des équations différentielles linéaires.
Comment faire lorsque l'équation différentielle n'est pas linéaire? Peut-on revenir au cas précédent? Par ailleurs, existe-t-il des moyens complémentaires (informatiques, par exemple) pour étudier des équations différentielles variées?

2. Primitives

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
On commence par se concentrer sur les primitives, bien qu'il ne s'agit que d'un cas particulier d'une équation différentielle. Mais c'est la méthode essentielle pour résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 1.

2.1. Définitions

Définition - Primitives
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. à valeurs dans $\mathbb{C}$). On appelle primitive de f sur I toute fonction F **dérivable** sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. à valeurs dans $\mathbb{C}$) telle que, sur I, $F' = f$.

Proposition - CNS de primitive sur $\mathbb{C}$
$F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}$
si et seulement si $\mathrm{Re}F$ et $\mathrm{Im}F$ sont des primitives de $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ (resp.).

Analyse - L'application dérivation

Soit $\Delta : f \mapsto f'$, la fonction qui applique la dérivation.

— La première question est celle des ensembles.
L'ensemble de définition de Δ est naturellement celui des fonctions dérivables.
L'ensemble d'arrivée est une question importante et difficile.
Dans un premier temps, nous admettrons (et démontrerons plus tard) qu'il **contient** les fonctions continues.

— La seconde question est celle de la bijection.
La surjectivité dépend de l'ensemble d'arrivée… C'est ok, pour les fonctions continues (à l'arrivée).
En revanche, concernant l'injectivité, on a une réponse simple : Δ n'est pas injective.

— Solutions pour l'injectivité.
On réduit l'ensemble d'arrivée : on considère que les fonctions continues, qui s'annule en un point fixé…
Mieux : la relation $f \mathscr{R}_\Delta g \iff \Delta(f) = \Delta(g)$ est une relation d'équivalence.
Les classes d'équivalence sont exactement les fonctions ayant la même dérivée.
En fait, un système de représentant des classes d'équivalence correspond à la première solution ici.

Proposition - Définition à constante additive près

Deux primitives de f sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.
C'est-à-dire que si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\left\{x \mapsto F(x) + C ; C \in \mathbb{K}\right\}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).

Démonstration

Soit F, une primitive de f. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\varphi \text{ est primitive de } f &\iff \varphi' = f = F' \iff (\varphi - F)' = 0\\ &\iff \exists\, C \in \mathbb{K} \text{ tel que } \varphi - F = C\end{aligned}$$

(ce dernier résultat bien connu, sera démontré un peu plus tard. □

2.2. Primitives usuelles

En reprenant simplement le tableau de dérivations des fonctions usuelles, on trouve :

Pour aller plus loin - Tableau fini?

Pour être utile, une table de primitives doit comporter plusieurs centaines de pages. Mentionnons ici celles de Gröbner et Hofreiter (1949) et de Gradshteyn et Ryzhik (1980). Aujourd'hui de nombreux logiciels de calcul symbolique contiennent de telles tables

Proposition - Tableau des primitives usuelles des fonctions à valeurs réelles (1)

fonction	primitives (C est une constante réelle)
x^α où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$e^{\beta x}$ où $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$\frac{e^{\beta x}}{\beta} + C$
$\operatorname{sh}\beta x$ où $\beta \neq 0$	$\frac{\operatorname{ch}\beta x}{\beta} + C$
$\operatorname{ch}\beta x$ où $\beta \neq 0$	$\frac{\operatorname{sh}\beta x}{\beta} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin \beta x$ où $\beta \neq 0$	$-\frac{\cos \beta x}{\beta} + C$
$\cos \beta x$ où $\beta \neq 0$	$\frac{\sin \beta x}{\beta} + C$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$
$\ln x$	$x \ln x - x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$ ou $-\arccos x + C'$

Proposition - Tableau des primitives usuelles des fonctions à valeurs réelles (2)

fonction f de la forme :	primitive F
$u'(x)u(x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + C$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$

Ces formules sont valables sur tout **intervalle** I où f (ou u) est continue.

Attention - Primitive sur deux intervalles

Si f admet des primitives sur la réunion de deux intervalles disjoints, on peut avoir des constantes différentes sur chacun des deux intervalles.
On rencontrera particulièrement cette situation dans le chapitre sur les équations différentielles.

2.3. Quelques cas particuliers

Exponentielles et trigonométrie

Savoir faire - $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$

Pour $f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $f(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, il suffit de primitiver $e^{(\alpha+i\beta)x}$ et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Savoir faire - $\sin^n x \cos^m x$

Pour $f(x) = \sin^n x \cos^m x$, on peut linéariser.
Rappelons que pour cela on utilise les formules de de Moivre : $\sin^n x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n \dots$

Exercice
Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{3x}\sin(2x); \quad f_2(x) = \sin^3(x)\cos^4(x)$$

Correction
$f_1 = \text{Im}(e^{3x+2ix}) = \text{Im}(e^{(3+2i)x})$.

$$F_1(x) = \text{Im}\left(\frac{1}{3+2i}e^{(3+2i)x}\right) = \text{Im}\left(\frac{3-2i}{13}e^{(3+2i)x}\right) = \frac{e^{3x}}{13}\left(3\sin(2x)-2\cos(2x)\right)$$

$$f_2(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \times \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{i}{128}\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right)\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{i}{128}\left((e^{7ix}-e^{-7ix})+(e^{5ix}-e^{-5ix})-3(e^{3ix}-e^{-3ix})-3(e^{ix}-e^{-ix})\right)$$

$$= \frac{-1}{64}\left(\sin(7x)+\sin(5x)-3\sin(3x)-3\sin(x)\right)$$

Donc

$$F_2(x) = \frac{1}{448}\cos(7x)+\frac{1}{320}\cos(5x)-\frac{1}{64}\cos(3x)-\frac{3}{64}\cos(x)$$

Truc & Astuce pour le calcul - Idée pour « vérifier » le calcul : faire un DL en 0

$f_2(x) \sim x^3$ et $\frac{-1}{64}\left(\sin(7x)+\sin(5x)-3\sin(3x)-3\sin(x)\right) = \frac{-1}{64}\left[(7+5-9-3)x-\frac{1}{6}(343+\right.$

Remarque - Si on a un doute…

On peut toujours vérifier en calculant la dérivée de la primitive obtenue.

Ici la dérivée de $x \mapsto \frac{e^{3x}}{13}\left(3\sin(2x)-2\cos(2x)\right)$ *est*

$$x \mapsto \frac{e^{3x}}{13}\left((9\sin(2x)-6\cos(2x))+(6\cos(2x)+4\sin(2x))\right) = e^{3x}\sin(2x)$$

Fractions rationnelles

Des résultats et un savoir-faire à connaître :

Proposition - Tableau de primitives de certaines fonctions rationnelles (fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$)

fonction	primitives (C est une constante réelle)
$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert + C$
$\frac{1}{(x-a)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
$\frac{2x+p}{x^2+px+q}$	$\ln\lvert x^2+px+q\rvert + C$
$\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + C$

Exercice
A démontrer

Correction
Il suffit de dériver les cas de droites

Remarque - Division euclidienne

Lorsque le polynôme au numérateur a un degré plus important que celui du dénominateur, on commence par effectuer une division euclidienne pour se trouver en présence des cas précédent.
Nous reverrons les divisions euclidiennes en fin de premier semestre

Savoir faire - Fractions rationnelles $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

Pour les fractions rationnelles de la forme $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$ $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0)$:

— si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines réelles distinctes α et β. On cherche alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{\lambda}{x-\alpha} + \frac{\mu}{x-\beta}$$

et on primitive avec $\ln|.|$

$$F(x) = \lambda\ln|x-\alpha| + \mu\ln|x-\beta| = \ln|(x-\alpha)^\lambda(x-\beta)^\mu|$$

— si $\Delta = 0$, on a alors

$$f(x) = \frac{1}{a(x-\alpha)^2}$$

on primitive directement avec la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{-1}{a(x-\alpha)}$$

— si $\Delta < 0$, on met le dénominateur sous forme canonique

$$f(x) = \frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$$

on reconnaît une fonction composée qui se primitive avec arctan

$$F(x) = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$$

Pour aller plus loin - Avec l'arithmétique complexe (à manipuler avec précaution…)

On rappelle que $\arg(1+ix) = \arctan(x)$, *donc si* $z = e^{i\theta} = 1+ix$, *on a donc*

$$\ln(1+ix) = \ln(z) = i\theta = i\arg(1+ix) = i\arctan(x)$$

Donc

$$\int \frac{1}{x^2+1} = \frac{i}{2}\int \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}$$

$$= \frac{i}{2}\left(\ln(x+i)-\ln(x-i)\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left(\ln(1+\frac{i}{x})-\ln(1-\frac{i}{x})\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-\arctan\frac{1}{x}+\arctan\frac{-1}{x}) = -\frac{\pi}{2}+\arctan x$$

En fait le logarithme complexe est définie à une constante $2i\pi$ *près…*

Exercice
Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{(x^2-x-2)}; \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2+x+1}; \quad f_3(x) = \frac{2x-1}{x^2+x+1}; \quad f_4(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x+4}.$$

Correction
$x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$, donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{\lambda}{x+1}+\frac{\mu}{x-2} = \frac{(\lambda+\mu)x+(-2\lambda+\mu)}{x^2-x-2}$.
On peut (et on doit…) prendre $\lambda = -\mu = \frac{-1}{3}$, on a donc $\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}\right)$ Donc une primitive de f_1 est $F_1 : x \mapsto \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| + C$.
Le discriminant de x^2+x+1 est $\Delta = 1-4 = -3 < 0$, on a $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$.
Une primitive de f_2 est donc $F_2 : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$
$f_3(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - 2\frac{1}{x^2+x+1}$, on reconnait $\frac{u'}{u} - 2f_2$.

Donc une primitive de f_3 est $F_3 : x \mapsto \ln(x^2+x+1) - 2\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

Pourquoi n'est-il pas besoin de valeur absolue ici ? Enfin, $f_4(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2} = 2\frac{x+2-\frac{3}{2}}{(x+2)^2} = \frac{2}{x+2} - 3\frac{1}{(x+2)^2}$.

Donc une primitive de f_4 est $F_4 : x \mapsto \ln|x+2| + 3\frac{1}{x+2} + C$.

3. Intégrales

3.1. Théorème fondamental et conséquences

Extension de l'intégrale sur $\mathbb{C}$

Définition - Notation
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, pour tout $a < b \in I$, on note

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

l'aire (algébrique) comprise entre les segments de droites $x = a$, $y = 0$ et $x = b$, et la courbe $y = f(x)$.
Nous admettons son existence si f est continue sur $[a,b]$.

Définition - Intégrale de f sur $[a,b]$
Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue sur $[a,b]$, on appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le nombre complexe

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}f(t)\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Attention - Définition ?
Est-ce vraiment une définition ? Non, car on ne sait pas bien ce qu'est ce calcul. Préciser qu'il s'agit du nombre obtenu à partir d'une primitive de f, c'est tourner en rond par rapport au théorème et au corollaire qui suivent.
A ce stade, on est obligé de prendre ce nombre comme construit à partir de f, a et b. Au second semestre, nous prendrons le temps de bien montrer l'existence et donner un algorithme de calcul de ce nombre. Nous verrons qu'il n'est pas nécessaire que f soit continue (f pourrait être moins régulière)

Exercice

Soit P une application polynomiale. On suppose que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi} e^{-imt}P(e^{it})\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que P est nul

Correction

Pour fixer les notations, on suppose que $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$.

Alors $\int_0^{2\pi} e^{-imt}P(e^{it})\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{d}\int_0^{2\pi} a_k e^{i(k-m)t}\mathrm{d}t = 2\pi a_m + \sum_{k\neq m}\left[\frac{a_k}{i(k-m)\pi}e^{i(k-m)t}\right]_0^{2\pi} = 2\pi a_m$.
Donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, $a_m = 0$.

Fonction : intégrale de sa borne supérieure

Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel
Soit f continue sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $a \in I$.
Alors la fonction

$$\begin{aligned} F : \quad I &\to K \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

est de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable de dérivée continue) sur I et $F' = f$.
C'est de plus l'unique primitive de f nulle en $a \in I$.

Corollaire - Existence de primitive
Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Attention - Pas toutes les primitives avec cette notation
On n'obtient pas toutes les primitives ainsi.
Ainsi, pour $f(x) = \cos x$, la primitive $F(x) = \sin x + 2$ ne peut s'obtenir ainsi. En effet, on aurait alors $F(x) = \sin x - \sin a$, or il n'existe pas de $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sin a = -2$.

Remarque - Démonstration ?
Ce théorème est admis, pour le démontrer il faudrait une meilleure définition de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

Fusion : primitive et intégrale (de sa borne supérieure)

Théorème - Calcul fondamental
Soit f continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b. Soit F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b.$$

Définition - Notation par extension
On notera, par extension des notations précédentes :
— $\int_{\cdot}^{x} f(t)\mathrm{d}t$, une primitive quelconque de f.
On pourra même considérer avec cette notation l'ensemble de toutes les primitives de f
— $\Big[F(t)\Big]_{\cdot}^{x} = F(x)$

Corollaire - Avec f'
Soit f de classe C^1 sur I. Alors

$$\forall (a,x) \in I^2,\ f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.2. Quelques propriétés de l'intégrale

Proposition - Linéarité, croissance, Chasles...
Pour des fonctions f et g continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a, pour $a, b \in I$, les propriétés suivantes :

— linéarité : si λ et μ sont deux réels,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

— relation de Chasles : pour $c \in]a,b[$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

— positivité : si $a \leqslant b$ **et** $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

— croissance : si $a \leqslant b$ et $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

A savoir faire absolument, l'application qui suit est typique :

Truc & Astuce pour le calcul - Encadrer une intégrale
Pour encadrer une intégrale, on encadre la fonction à intégrer

Application - Inégalité des accroissements finis (avec f de classe $\mathscr{C}^1$)
Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b] \subset I$.
Notons $M = \sup_{[a,b]} f'$ et $m = \inf_{[a,b]} f'$, on a donc, pour tout $t \in [a,b]$:

$$f'(t) - m \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad M - f'(t) \geqslant 0$$

On intègre sur $[a,b]$:

$$f(b) - f(a) - m(b-a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t - m\int_a^b \mathrm{d}t = \int_a^b \big(f' - m\big)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$
$$\Longrightarrow f(b) - f(a) \geqslant m(b-a)$$
$$f(b) - f(a) - M(b-a) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t - M\int_a^b \mathrm{d}t = \int_a^n \big(f' - M\big)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$
$$\Longrightarrow f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

Pour aller plus loin - Inégalité des accroissements finis
Ce savoir-faire de l'inégalité des accroissements finis sera améliore plus loin : il suffira que f soir dérivable (et non nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$.

On refera les démonstrations avec des fonctions intégrables en fin d'année. On se limite aux fonctions admettant une primitive

Démonstration
On note F, une primitive de f et G une primitive de g.
— $(\lambda F + \mu G)' = \lambda f + \mu g$.
Donc $\int_a^b \lambda f + \mu g = [\lambda F + \mu G]_a^b = \lambda[F]_a^b + \mu[G]_a^b = \lambda\int_a^b f + \mu\int_a^b g$.
— $\int_a^b f = F(b) - F(a) = (F(b) - F(c)) - (F(c) - F(a)) = \int_a^c f + \int_c^b f$
— $F' = f \geqslant 0$, donc F est croissante. Donc $\int_a^b f = F(b) - F(a) \geqslant 0$
— $(F-G)' = f - g \geqslant 0$. Par linéarité : $\int_a^b (f-g) \geqslant 0$, donc $\int_a^b f \geqslant \int_a^b g$.
□

Remarque - Combinaison linéaire
Si f et g sont deux fonctions, λ et μ deux réels $\lambda f + \mu g$ s'appelle une combinaison linéaire à coefficients réels de f et g.

Proposition - Fonctions à valeurs complexes
Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et λ, μ deux complexes. Alors on a les propriétés suivantes :

— linéarité :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

— relation de Chasles : pour $c \in]a,b[$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Attention - Sur $\mathbb{C}$, pas de relation d'ordre...
Donc la croissance de l'intégrale sur $\mathbb{C}$ n'a pas de sens. Mais on peut exploiter les modules, si l'on souhaite faire des encadrements de la partie réelle et la partie imaginaire...

Exemple - Cela reste vraie, même si $c \notin]a,b[$
Si, par exemple, on a $c < b < a$ et F une primitive de f sur $[c,a]$:

$$\int_c^a f(t)\mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^a f(t)\mathrm{d}t$$

Donc $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\mathrm{d}t - \int_c^a f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

3.3. Technique 1 : Intégration par parties

Enoncé

Théorème - Intégration par parties
Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration
$u(a)v(a) - u(b)v(b) = [uv]_a^b = \int_a^b (uv)' = \int_a^b uv' + \int_a^b u'v$.
Donc $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$ □

Savoir faire - Faire une intégration par parties
Comme toujours les énoncés des théorèmes d'analyse demande d'abord de vérifier les hypothèses.
Il faut donc commencer par définir les fonctions u et v et démontrer/-dire qu'elles sont de classe $\mathscr{C}^1$.
Mais souvent, nous avons la connaissance de u et de v'.
On donne alors v, dont on précise qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et u' dont on précise qu'elle continue.
Reste à préciser la valeur de la constante d'intégration de v considérée et faire le calcul

Obtenir une primitive

Savoir faire - Obtenir une primitive avec une IPP cachée

Pour calculer une primitive par IPP de $f = u'v$, notée

$$\int_{\cdot}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(attention, il s'agit d'**une fonction** et non d'un scalaire), on peut écrire

$$\int_{\cdot}^{x} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = u(x)v(x) - \int_{\cdot}^{x} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple - Primitive de arctan

On cherche une primitive de arctan : $\int_{\cdot}^{x} \arctan(t)\mathrm{d}t$. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \arctan t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\int_{\cdot}^{x} \arctan(t)\mathrm{d}t = \int_{\cdot}^{x} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [t\arctan t]_{\cdot}^{x} - \int_{\cdot}^{x} \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Exercice

Avec une intégration par parties trouver une primitive de $x \mapsto \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ puis de $x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^2}$.
On verra une autre méthode plus loin.

Correction

Les applications $u : x \mapsto \frac{-1}{x^2+1}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{2}x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}x \times \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int v(t)u'(t)\mathrm{d}t = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x + C$$

$$= \frac{-x}{2(x^2+1)} + \int \frac{1}{2(x^2+1)}\mathrm{d}x + C = \frac{-1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x)\right) + C$$

Puis

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1+x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{(x^2+1)} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

Par linéarité :

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x = \arctan x - \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{x^2+1} + \arctan(x)\right) + C' = \frac{1}{2}\left(\arctan(x) + \frac{x}{x^2+1}\right) + C'$$

Primitives de $P(x)e^{\alpha x}$

Savoir faire - $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$

Pour $f : t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ où P est une fonction polynomiale, on peut faire $\deg(P)$ intégrations par parties (IPP) en dérivant $v : t \mapsto P(t)$ et en intégrant $u' : t \mapsto e^{\alpha t}$.
On peut appliquer la même méthode pour $f : t \mapsto P(t)\sin(\alpha t)$ ou $f : t \mapsto P(t)\cos(\alpha t)$.

Remarque - Autre méthode

On peut aussi directement chercher une primitive de la forme $Q(t)e^{\alpha t}$ avec $\deg Q = \deg P$.
On dérive cette fonction et identifie les coefficients de Q.

Exercice

Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} t\sin t\,\mathrm{d}t, \quad J = \int_0^1 e^{2x}(6x^2+2x-4)\,\mathrm{d}x$$

Correction

Les fonctions $u : t \mapsto -\cos t$ et $v : t \mapsto t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

$$I = [-t\cos t]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t = 0 + [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1$$

Pour aller plus loin - Fonction beta

On note $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$.
On montre par IPP que
$B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y)$.
Puis si n et m sont des entiers :

$$B(n+1,m+1) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{1}{(n+m+1)\binom{n+m}{n}}$$

Cela peut donner un sens à $\binom{x+y}{x}$, *avec* $x, y \in \mathbb{R}\ldots$

Les fonctions $u : x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x}$, $v : x \mapsto 6x^2+2x-4$ et $w : x \mapsto 12x+2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

$$J = \left[\frac{1}{2}e^{2x}(6x^2+2x-4)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}(12x+2)\mathrm{d}x = 2e^2 + 2 - \frac{1}{4}\left[e^{2x}(12x+2)\right]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 12e^{2x}\mathrm{d}x$$

$$= 2e^2 + 2 - \frac{14}{4}e^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^2 - \frac{3}{2} = 1$$

Exercice

Pour aller plus loin : trouver une formule générale de $\int e^{\alpha x}P(x)$ qui exploite les puissances de α et les dérivées de P

Correction

$$\int_a^b e^{\alpha x}P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\alpha^{k+1}}\left(e^{\alpha a}P^{(k)}(a) - e^{\alpha b}P^{(k)}(b)\right)$$

Primitives de $P(x)\ln\big(Q(x)\big)$

Savoir faire - $f(x) = P(x)\ln\big(Q(x)\big)$

Pour $f : t \mapsto P(t)\ln\big(Q(t)\big)$ où P est une fonction polynomiale, on peut faire une intégrations par parties (IPP) en dérivant $v : t \mapsto \ln\big(Q(t)\big)$ et en intégrant $u' : t \mapsto P(t)$.
On se retrouve alors en présence d'une fraction rationnelle, que l'on sait intégrer, en principe…

Exercice

Calculer

$$I_b = \int_0^b x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x.$$

On pourra remarquer que $x^3 = x(x^2+1) - x\ldots$

Correction

Les fonctions $u : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ et $v : x \mapsto \ln(x^2+1)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

$$I_b = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x^2+1)\right]_0^b - \int_0^b \frac{x^3}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}b^2\ln(b^2+1) + \int_0^b \frac{x}{x^2+1} - x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}b^2\ln(b^2+1) + \frac{1}{2}\ln(b^2+1) - \frac{1}{2}b^2$$

3.4. Technique 2 : Changement de variables

Enoncé

Théorème - Changement de variable

Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in I$,
Soient $\phi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\phi(I) \subset J$ et $f : J \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue.
Alors

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Notons F, une primitive de f, on a alors :

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\phi(\alpha)) - F(\phi(\beta)) = [F\circ\phi]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

car $(F\circ\phi)' = \phi' \times F'\circ\phi = \phi' \times f\circ\phi$. □

Analyse - Deux cas possibles

Deux cas se produise : une application directe de ce théorème, ou bien une application avec la fonction réciproque de ϕ.

1. Cas direct (ne nécessite pas la bijectivité) :
   On doit calculer $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$.
   On pose $u=\varphi(t)$, où φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, avec $\varphi(\alpha)=a$ et $\varphi(\beta)=b$ et donc $\mathrm{d}u=\varphi'(t)\mathrm{d}t$.
   Ainsi : $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$
2. Cas indirect (nécessite la bijectivité) :
   On doit calculer $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$.
   On pose $t=\psi(u)$, où ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et bijective de $[a,b]$ sur $[\alpha,\beta]$.
   avec $\varphi=\psi^{-1}$, on a donc $u=\varphi(t)$
   et donc $\mathrm{d}u=\varphi'(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\psi'(\varphi(t))}\mathrm{d}t \iff \psi'(u)\mathrm{d}u=\mathrm{d}t$.
   Ainsi : $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u=\int_a^b f(\psi^{-1}(t))\dfrac{\mathrm{d}t}{\psi'(\psi^{-1}(t))}$

Mais, c'est la pratique qui compte, pas d'apprendre ces formulations!

Pour aller plus loin - Aire d'un cercle
Donner l'aire d'un cercle de rayon r.

Savoir faire - Changement de variable - dans la pratique

On veut calculer $\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$.
On considère d'abord (une certaine fonction) ϕ, dont on démontre qu'elle est $\mathscr{C}^1$ et bijective.
En fait, on calcule ϕ', et on démontrer qu'elle >0 sur $I=[\alpha,\beta]$ (entier) ou <0 sur I.
Ensuite, on pose $t=\phi(x)$, on remplace alors
- t par $\phi(x)$
- $\mathrm{d}t$ par $\phi'(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad(\phi'(x)=\dfrac{d\phi(x)}{dx}=\dfrac{dt}{dx}$ - écriture physicienne de Leibniz : $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$.)
- t varie de $\phi(\alpha)$ à $\phi(\beta)$ par x varie de α à β (et inversement)
  On peut faire un tableau

Exercice
Calculer par changement de variables les intégrales suivantes

$$I=\int_0^{\pi/2} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x,\quad J=\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Correction
On considère $\phi: t\mapsto\sqrt{t}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi^2}{4}\right]$,
On pose alors $x=\phi(t)$, et donc, comme $\phi'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$

$$I=\int_0^{\pi^2/4}\sqrt{t}\sin t\times\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{2}\cos t\right]_0^{\pi^2/4}=\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi^2}{4})$$

On considère $\psi: t\mapsto\sin(t)$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,
On pose alors $x=\psi(t)$, et donc, comme $\psi'(t)=\cos(t)$

$$I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\times\cos(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$$

(C'est l'aire d'un quart de disque...)

Application : calcul de primitive

Soulignons l'importance que ϕ soit bijective pour exploiter ϕ^{-1}...

Savoir faire - Calculer une primitive par changement de variable

On cherche une primitive F de f sur I,
- on pose $t=\phi(x)$ et donc $\mathrm{d}t=\phi'(x)\mathrm{d}x$ où ϕ est une **bijection de classe** C^1 de J sur I,
- on cherche une primitive $G(x)=\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x$ et on prend $F(t)=G(\phi^{-1}(t))$.

Exemple - Primitive de $t\mapsto\frac{1}{t^2+a^2}$

Par exemple en posant $x=\frac{t}{a}$, on a

$$\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\int\frac{1}{a}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{a}\arctan x+C=\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}+C$$

Attention - Ne pas oublier de revenir à la variable de départ

Pour éviter les erreurs (oubli de revenir à la variable de départ...) on aurait intérêt à écrire

$$F(x)=\int_{\cdot}^{x}\frac{dt}{t^2+a^2}$$

Exercice
Soit $a\in\mathbb{R}$. Donner une primitive de $x\mapsto\dfrac{1}{(x^2+a^2)^2}$ en faisant le changement de variable $\tan t=\frac{x}{a}$.
On rappelle que $1+\tan^2 u=\frac{1}{\cos^2 u}$

Correction
On pose $\tan\theta=\frac{t}{a}$, $\frac{1}{a}\mathrm{d}t=(1+\tan^2\theta)\mathrm{d}\theta$

$$\int^x\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^4}\int^x\frac{\mathrm{d}t}{(1+(\frac{t}{a})^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int^{\arctan(x/a)}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2a^3}\int^{\arctan(x/a)}(\cos 2\theta+1)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2a^3}\left[\frac{1}{2}\sin\left(2\arctan\frac{x}{a}\right)+\arctan\frac{x}{a}\right]+C=\frac{1}{2a^3}\left[\tan(\arctan\frac{x}{a})\cos^2(\arctan\frac{x}{a})+\arctan\frac{x}{a}\right]+C$$

$$=\frac{1}{2a^3}\frac{x}{a}\times\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}+C=\frac{ax+\arctan\frac{x}{a}}{2a^3(a^2+x^2)}+C$$

Exercice
Aller plus loin : Donner l'expression des primitives de $x\mapsto\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$

Correction

Savoir faire - Bijection par morceaux

Lorsque le changement de variable doit être bijectif, mais ne l'est que par morceaux, alors
1. on cherche une primitive sur chaque morceaux d'intervalle
2. on « recolle » chaque morceaux en ajustant les constante de manière à ce que la primitive soit bien continue.

L'exercice suivant illustre ce savoir-faire.
Exercice
Donner l'ensemble de définition et calculer la primitive de $h: x\mapsto\dfrac{1}{2+\cos x}$
On posera $t=\tan\frac{x}{2}$

Correction
h est définie et continue sur $\{x\in\mathbb{R}\mid\cos x\neq-2\}=\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives sur cet ensemble.
D'abord, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=\dfrac{1}{2+\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}=\dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+\tan^2\frac{x}{2}}$,

$$H(x)=\int^x\frac{1+\tan^2\frac{t}{2}}{3+\tan^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

On réalise le changement de variable $u=\tan\frac{t}{2}$, donc $\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{t}{2})\mathrm{d}t$.

$$H(x)=\int^{\tan\frac{x}{2}}\frac{2}{3+u^2}\mathrm{d}u=\frac{2}{3}\int^{\tan\frac{x}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{1+[\frac{u}{\sqrt{3}}]^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]^{\tan\frac{x}{2}}$$

$$\exists K\in\mathbb{R},\qquad H(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+K$$

MAIS le changement de variable posée : $u=\tan\frac{t}{2}$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$.
Il s'agit de bijection d'intervalle de la forme $]-\pi+2j\pi;\pi+2j\pi[$ sur $\mathbb{R}$.
Donc les solutions obtenues sont plutôt :

$$\exists\,(K_j)_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}},\qquad\forall\,x\in](2j-1)\pi;(2j+1)\pi[,\,H(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+K_j$$

Puis comme H est dérivable, elle est nécessairement continue donc continue en $\frac{\pi}{2}+j\pi$.

$$\lim_{x\to((2j+1)\pi)^+}H(x)=\lim_{x\to((2(j+1)\pi)^-}J(x)$$

Et comme, par composition des limites :

$$\lim_{x\to((2j+1)\pi)^+}H(x)=\lim_{x\to((2j+1)\pi)^+}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+K_{j+1}=\lim_{y\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(y)+K_{j+1}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}+K_{j+1}$$

$$\lim_{x\to((2j+1)\pi)^-}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+K_j=\lim_{y\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(y)+K_j=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+K_j$$

On a donc, pour tout $j\in\mathbb{Z}$,

$$-\frac{\pi}{\sqrt{3}}K_{j+1}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+K_j$$

Donc $K_{j+1}=K_j+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. On reconnait une suite arithmétique : $K_j=K_0+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}j$.
Et finalement, comme

$$x\in](2j-1)\pi;(2j+1)\pi[\iff\frac{x}{\pi}+1\in]2j,2j+2[\iff\frac{x+\pi}{2\pi}\in]j,2j+1[\iff j=\left\lfloor\frac{x+\pi}{2\pi}\right\rfloor$$

on peut affirmer :

$$\exists\,K(=K_0)\in\mathbb{R}\text{ tel que :}\qquad\forall\,x\in\mathbb{R},\qquad H(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\times\left\lfloor\frac{x+\pi}{2\pi}\right\rfloor+K$$

Fonctions définies à partir de fonctions trigonométrique

Savoir faire - Calcul pour $f(t)=\sin^n t\cos^m t$ avec n ou m impair

Pour $f(t)=\sin^n t\cos^m t$, on peut linéariser, ou,

- si n est impair, effectuer le changement de variables $u=\cos t$ (ou isoler un $\sin t$ et dans $\sin^{n-1}t$ remplacer $\sin^2 t$ par $1-\cos^2 t$ puis reconnaître des primitives),
- si m est impair, effectuer le changement de variables $u=\sin t$ (ou remplacer $\cos^2 t$ par $1-\sin^2 t$).

Exercice

Calculer par changement de variables l'intégrale suivante

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 u\cos^3 u\,\mathrm{d}u$$

Correction

On pose $t=\sin u$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. On a donc $\mathrm{d}t=\cos u\mathrm{d}u$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 u\cos^3 u\,\mathrm{d}u=\int_0^1 t^2(1-t^2)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right]_0^1=\frac{2}{15}$$

Savoir faire - Cas général ($\tan\frac{x}{2}$)

D'une manière générale, les changements de variables utiles pour les fonctions construites avec de fonctions trigonométriques sont $t=\cos x$, $t=\sin x$, $t=\tan x$, $t=\tan\frac{x}{2}$.

On rappelle que si $t=\tan\frac{x}{2}$, alors $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ et $\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$.

Exercice

Calculer par changement de variables l'intégrale suivante

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$$

Correction

On pose $t=\tan\frac{x}{2}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$.
On a $\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})\mathrm{d}x$, donc $\mathrm{d}x=\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}=\int_{1/\sqrt{3}}^1\frac{t^2+1}{2t}\times\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_{1/\sqrt{3}}^1\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}\ln 3$$

Simplification des calculs

Théorème - Simplification des calculs

Soit $f:[-a,a]\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$ une fonction continue :

- si f est paire, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$;
- si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t=0$;
- si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction continue T-périodique,
$\displaystyle\int_{a+T}^{b+T}f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{a+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

Démonstration

Si f est paire,

$$\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\underbrace{\int_a^0 f(-u)(-\mathrm{d}u)}_{u=-t}+\underbrace{\int_0^a f(u)(\mathrm{d}u)}_{u=t}=2\int_0^a f(u)\mathrm{d}u$$

Si f est impaire,

$$\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\underbrace{\int_a^0 f(-u)(-\mathrm{d}u)}_{u=-t}+\underbrace{\int_0^a f(u)(\mathrm{d}u)}_{u=t}=\int_0^a f(u)(\mathrm{d}u)-\int_0^a f(u)(\mathrm{d}u)=0$$

Si f est T-périodique

$$\int_{a+T}^{b+T}f(t)\,dt=\underbrace{\int_a^b f(u+T)\mathrm{d}u}_{u=t-T}=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

Notons $n=\left\lfloor\dfrac{a}{T}\right\rfloor$, donc $nT\leqslant a<(n+1)T$:

$$\int_a^{a+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{(n+1)T}f(t)\mathrm{d}t+\int_{(n+1)T}^{a+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_{a-nT}^{(n+1)T-nT}f(t)\mathrm{d}t+\int_{(n+1)T-(n+1)T}^{a+T-(n+1)T}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_{a-nT}^T f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{a-nT}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{a-nT}f(t)\mathrm{d}t+\int_{a-nT}^T f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

d'après la formule de Chasles □

Exemple - Réduction d'intervalle

Soit i, une fonction T périodique.

$$\int_0^{nT}i(t)\mathrm{d}t=n\int_0^T i(t)\mathrm{d}t$$

Variable dans les bornes de l'intégrale (composition)

Savoir faire - Variable dans le bornes de l'intégrale

Il arrive qu'on doit étudier des fonctions de la forme

$$g : x \mapsto \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} h(t)\mathrm{d}t$$

, sans pouvoir exprimer explicitement H, une primitive de h.
Néanmoins, la simple existence de H, permet d'écrire :

$$g(x) = H(f_2(x)) - H(f_1(x))$$

Dont on déduit de nombreuses informations. Par exemple : g est dérivable si f_1 et f_2 le sont. Et dans ce cas :

$$\forall\, x \in \mathscr{D}, \quad g'(x) = f_2'(x) \times h(f_2(x)) - f_1'(x) \times h(f_1(x))$$

Exercice

Soit $H : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$. Etudier la parité de H. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer H' et dresser le tableau de variations de H. Déterminer les limites de H en $+\infty$ et $-\infty$.

Correction

$H(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \int_x^{2x} \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^4}} = -H(x)$ en faisant le changement de variable $u = -t$.
Donc H est impaire. On étudie sur $\mathbb{R}_+$, on appliquera la symétrie ensuite.
L'application $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une primitive G sur $\mathbb{R}$.
On a alors $H(x) = G(2x) - G(x)$. Et par composition, H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad H'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{1+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

Pour tout $x > 0$,

$$H'(x) \leqslant 0 \iff \frac{4}{1+16x^4} \leqslant \frac{1}{1+x^4} \iff 3 - 12x^4 \leqslant 0 \iff 1 - 4x^4 \leqslant 0$$

$$H'(x) \leqslant 0 \iff (1-2x^2)(1+2x^2) \leqslant 0 \iff (1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x) \leqslant 0 \iff x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

donc H est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, puis décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.
Par ailleurs $H(0) = 0$ et par décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ sur $[x, 2x]$,

$$0 \leqslant H(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}t = \frac{2x-x}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant \frac{x}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x}$$

Et par encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$.

4. Equation différentielle (dérivation/primitivation tordue)

4.1. Vocabulaire

D'une manière générale on appelle équation différentielle une équation faisant intervenir les dérivées successives d'une même fonction, elle est du premier ordre si elle porte sur la fonction et sa dérivée première, du second ordre si elle porte sur la fonction et ses dérivées première et seconde...
La résolution d'un problème de Cauchy est la résolution d'une équation différentielle avec des conditions initiales.
Plus précisément :

Histoire - Révolution newtonienne

La double découverte, par Newton, des lois de physique qui s'expriment sous forme d'équations différentielles et des méthodes mathématiques pour les résoudre a permis la révolution scientifique en Europe. Pendant deux siècles, les techniques se sont affinées et la maîtrise de tous les phénomènes de sciences physiques s'est élargies. Au milieu du XIX-ième siècle, les scientifiques croyaient au déterminisme totalement compris ((l'avenir totalement écrit sous nos yeux)...

Définition - Equation différentielle linéaire du premier ordre

Une équation différentielle (E) est dite *linéaire et du premier ordre* si elle s'écrit $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ où α, β, γ sont trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Elle est dite *normalisée* si elle s'écrit $y' + a(t)y = b(t)$ où a, b sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$b(t)$ (ou $\gamma(t)$) est le *second membre*, l'équation est dite *sans second membre ou homogène* si la fonction b est nulle.

Remarque - Mise sous forme normale

Si α ne s'annule pas sur I l'équation différentielle $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ se ramène à une équation normalisée.

Définition - Problème de Cauchy du premier ordre

On appelle problème de Cauchy du premier ordre la donnée d'une équation différentielle du premier ordre et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$ où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$).

Définition - Solutions

Soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$.
f est solution de (E) $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ si

(1) f est dérivable sur I,
(2) $\forall\, t \in I$, $\alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t)$.

0n pourra noter S_E l'ensemble des solutions de (E).
Résoudre l'équation différentielle (E) c'est donc déterminer l'ensemble S_E, c'est-à-dire trouver toutes les solutions sur I.
On appelle *courbe intégrale* de (E) la courbe représentative d'une solution de (E).

Remarque - Convention réelle

En l'absence d'indications contraires, si les fonctions α, β, γ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, on notera S_E l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E).

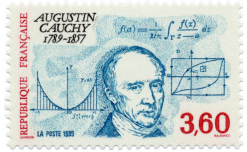
Définition - Solution d'un problème de Cauchy

Résoudre le problème de Cauchy défini par (E) et $y(t_0) = y_0$, c'est déterminer toutes les solutions f de (E) vérifiant $f(t_0) = y_0$.

Remarque - Une/la solution?

On parle souvent de solution particulière de (E), il s'agit en fait d'UNE fonction qui est solution, par opposition à solution générale qui est la forme générale des solutions. Par exemple, $t \mapsto e^{3t}$, $t \mapsto 4e^{3t}$ sont des solutions particulières de $y' = 3y$ alors que $t \mapsto \lambda e^{3t}$ est la solution générale.

Histoire - Louis-Augustin Cauchy



Louis-Augustin Cauchy (1789-1857) est un mathématicien français aux intérêts très large en mathématiques. Son attitude face aux événements politiques contemporains l'a beaucoup isolé, sans totalement le marginaliser; probablement grâce à son génie. On le retrouvera à de nombreuses reprises tout au long de l'année.

Savoir faire - Découper I pour avoir des équations normalisées

Si α s'annule sur I, on cherchera à découper I en plusieurs intervalles ouverts sur lesquels elle ne s'annule pas pour se ramener à des équations normalisées.
Ensuite on cherchera les solutions sur I par « recollement », c'est-à-dire que l'on regardera, parmi les fonctions définies par morceaux sur chacun

des intervalles, celles qui sont dérivables sur I (problème aux points de recollement, c'est-à-dire ceux où a s'annulait) et vérifient (E) sur I.

Le principe suivant est d'usage fréquent en physique : il permet de s'intéresser à des seconds membres simples.

Proposition - Principe de superposition des solutions
Si le second membre de l'équation (E) est de la forme $b(t) = b_1(t) + \cdots + b_n(t)$
et si l'on connaît des solutions particulières $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ des équations avec les seconds membres $b_1(t), \ldots, b_n(t)$,
alors une solution particulière de (E) est $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \cdots + \tilde{y}_n$.

Démonstration
On exploite la linéarité de l'équation différentielle linéaire.
On a

$$\begin{aligned}\tilde{y}' + a\tilde{y} &= (\tilde{y}_1 + \cdots + \tilde{y}_n)' + a(\tilde{y}_1 + \cdots + \tilde{y}_n)\\ &= (\tilde{y}_1' + \tilde{y}_1) + \cdots + (\tilde{y}_n' + a\tilde{y}_n) = b_1 + \cdots + b_n = b\end{aligned}$$

□

4.2. Equation différentielle linéaire d'ordre 1

Principe

On considère désormais l'équation différentielle linéaire normalisée

$$(E) \qquad y' + a(t)y = b(t)$$

où a et b sont continues sur I, intervalle de $\mathbb{R}$.
Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique - Démonstration et savoir-faire. Que retenir ?
Pour les démonstrations, nous allons décomposer l'application $F_a : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $y \mapsto y' + ay$ en applications, plus ou moins inversible. Nous verrons alors que l'équation différentielle est une dérivation « tordue ».
A la fin du cours, nous donnerons une méthode qu'on appliquera directement lors des exercices.
Sauf pour les exercices théoriques (du type inégalités différentielles).

Analyse

Analyse - Décomposition de F_a
Notons $D : y \mapsto y'$ et pour une application h quelconque $\varphi_h : y \mapsto \exp(h) \times y$.
Alors :

1. $\varphi_{-h} \circ \varphi_h : y \mapsto \exp(-h) \times (\exp(h) \times y) = \exp(-h+h) \times y = y = \mathrm{id}(y)$.
   Ainsi $\varphi_{-h} \circ \varphi_h = \mathrm{id} = \varphi_h \circ \varphi_{-h}$. Donc φ_h est inversible et $\varphi_h^{-1} = \varphi_{-h}$.
2. $\varphi_{-h} \circ D \circ \varphi_h : y \mapsto \exp(-h)[\exp(h)y]' = \exp(-h)[h'y + y']\exp(h) = y' + h'y = F_{h'}(y)$.
   Ainsi : $\varphi_{-h} \circ D \circ \varphi_h = F_{h'}$.

Ainsi, si $a \leftarrow h'$ donc $A \leftarrow h$ UNE primitive de a :

$$F_a(y) = b \iff \varphi_{-A} \circ D \circ \varphi_A(y) = b \iff D \circ \varphi_A(y) = \varphi_A(b)$$

Le problème : D n'est pas bijective… Il faudra gérer des constantes…
On continuera cette résolution plus loin.

Remarque - Non commutativité de D et φ_A
Malheureusement, on n'a pas $F_a = \varphi_{-A} \circ D \circ \varphi_A = D \circ \varphi_{-A} \circ \varphi_A = D$.
C'est là où on voit que l'équation différentielle est une dérivation tordue…

Pour aller plus loin - Simplification de problème
On rencontre toujours en mathématique le diagramme suivant où un problème M (une matrice par exemple) est transformé en un problème D (matrice diagonale par exemple) plus simple à résoudre.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{M} & y \\ P\downarrow & & \downarrow P \end{array}$$

Exercice
Résoudre (E) $(1+t^2)y' + 4ty = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.

Correction
Sous forme normalisée (et homogène) : $y' + \frac{4t}{1+t^2}y = 0$, l'équation est définie sur $\mathbb{R}$ $(1+t^2 \neq 0)$.
On note alors $a(t) = \frac{4t}{1+t^2}$, de primitive $A(t) = 2\ln(1+t^2)$.
On a donc $D \circ \varphi_A(y) = \exp(A(t)) \times 0 = 0$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $y = \varphi_{-A}(C) = C\exp(-A)$.
Les solutions de (E) sont donc $t \mapsto Ce^{-2\ln(1+t^2)} = \frac{C}{(1+t^2)^2}$.

Remarque - Comment retenir l'ensemble des solutions ?
On dispose d'une méthode intuitive (mais qui n'est pas une démonstration car elle suppose que l'on sait que les solutions y ne s'annulent en aucun point) pour retrouver le résultat dans le cas des fonctions à valeurs réelles (c'est-à-dire lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) en écrivant $\frac{y'(t)}{y(t)} = -a(t)$ et en primitivant.

$$\begin{aligned}\frac{y'(t)}{y(t)} = -a(t) &\implies \ln(y(t)) = -A(t) + K\\ &\implies y(t) = \exp(-A(t)+K) = Ce^{-A(t)} \text{ avec } C = e^K\end{aligned}$$

On écrirait plutôt, heuristiquement :

$$(ye^{\int a})' = [y' + ay]e^{\int a} = 0 \implies ye^{\int a} = K \implies y = Ke^{-\int a}$$

Attention - Variable x, variable t ?
Nous avons noté y la fonction de la variable t, mais l'on peut bien évidemment avoir d'autres notations, par exemple y fonction de la variable x (équations différentielles donnant l'ordonnée en fonction de l'abscisse) ou x en fonction de t (équations différentielles donnant l'abscisse en fonction du temps) ou encore z en fonction de t (équations différentielles donnant l'affixe en fonction du temps).

Structures des solutions et méthodes

Théorème - Structure de l'ensemble S_E
La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (H), ce qui peut aussi s'écrire :
Si $\tilde{y}$ (à lire « y tilde ») est une solution particulière de l'équation (E) alors

$$S_E = \left\{ t \mapsto Ce^{-A(t)} + \tilde{y}(t);\ C \in \mathbb{K} \right\}.$$

Remarque - Existence
Insistons : L'existence d'(au moins) une solution est donnée par la forme de l'équation (E) :
- *normalisée,*
- *avec a continue (admettant une primitive - plus exactement)*
- *avec b continue ($t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ admettant une primitive - plus exactement)*

Démonstration
Soit $\tilde{y}$ une solution particulière. On a donc $\varphi_{-A} \circ D \circ \varphi_A(\tilde{y}) = b$.
Donc l'équation devient :

$$D \circ \varphi_A(y) = D \circ \varphi_A(\tilde{y}) \iff \exists C \in \mathbb{R} \text{ tel que } \varphi_A(y) = C + \varphi_A(\tilde{y})$$

En exploitant l'inverse de φ_A, on trouve S_E (et il y a équivalence donc égalité d'ensembles). □

Pour aller plus loin - Equation à variables séparables
La méthode présentée dans la remarque (comment retenir l'ensemble des solutions ?)est celle proposée dans le cas des équations à variables séparables : $y' \times f(y) = g(t)$. Avec un changement de variables, il s'agit d'un calcul d'intégrale (présenté ainsi, cela fonctionne mieux)…
En 1840, le mathématicien belge Pierre Verhulst propose un modèle de dynamique de population qui conduit à l'équation

$$y' = ay\left(1 - \frac{y}{\ldots}\right)$$

Trouver une solution particulière $\tilde{y}$

Analyse - Résoudre l'équation

Continuons notre résolution. Nous en étions à $\varphi_{-A}\circ D\circ\varphi_A = b$.
Donc en remplaçant par leur valeur : $D\circ\varphi_A(y) = be^A$, qu'il faut intégrer à une constante près.
Notons $e^{A(t)}y(t) = \int_\cdot^t b(u)e^{A(u)}\mathrm{d}u + K$, donc

$$y(t) = \underbrace{Ke^{-A(t)}}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{e^{-A(t)}\int_\cdot^t b(u)e^{A(u)}\mathrm{d}u}_{\text{solution particulière}}$$

.
Si $b = 0$, on a bien une solution homogène avec le premier terme de cette somme-solution.
L'enjeu est donc maintenant de trouver une solution particulière, peut-être plus simplement…
On doit à Lagrange la méthode de la variation de la constante qui répond explicitement à cette question (parmi d'autres méthodes).

Savoir faire - Comment trouver une équation particulière ? Méthode de « variation de la constante »

D'après le théorème précédent, ce qui reste est de trouver une solution particulière.
Sans indication donnée par l'énoncé, la méthode classique à suivre est la suivante :

1. On normalise l'équation différentielle. Cela peut nécessiter une étude sur plusieurs intervalles.
2. On résout l'équation différentielle homogène : $y = Ce^{-A(t)}$
3. On cherche une solution particulière :
   - en cherchant une solution évidente,
   - en utilisant le principe de superposition des solutions,
   - en essayant des fonctions simples (polynomiales lorsque a et b le sont, trigonométriques lorsque a et b le sont...),
   - en faisant varier la constante C, c'est-à-dire sous la forme

     $$\tilde{y} : t \mapsto C(t)e^{-A(t)}$$

     (La constante C devient variable : « méthode de la variation de la constante »).
     Le calcul (à refaire à chaque fois - il permet de vérifier la bonne résolution de l'équation homogène) conduit à :

     $$C'(t) = b(t)e^{A(t)}$$

     C'est un « simple » calcul de primitive
4. Les solutions générales sont alors de la forme

   $$y : t \mapsto (K + C(t))e^{-A(t)}$$

   avec C définie au point précédent

Problème de Cauchy

Théorème - Problème de Cauchy
Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I de l'équation linéaire normalisée (E) $y' + a(t)y = b(t)$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Démonstration
Les solutions de (E) sont de la forme $y = \tilde{y} + Ce^{-A(t)}$ avec C constante « à déterminer ».
On a alors $y(t_0) = y_0 = \tilde{y}(t_0) + Ce^{-A(t_0)}$, donc $C = (y_0 - \tilde{y}(t_0))e^{A(t_0)}$.
Ce calcul donne une et une seule solution car $e^{-A(t_0)} > 0$ □

Remarque - Résoudre un problème de Cauchy
Pour résoudre un problème de Cauchy, on résout (E) puis on cherche la solution vérifiant $y(t_0) = y_0$.

Pour aller plus loin - Courbe intégrale
Cela signifie également qu'il existe une unique courbe intégrale passant par le point (t_0, y_0).

Applications. Cas classiques

Exercice
Résoudre (E) $y' + ty = t$.

Correction

1. L'équation est sous forme normalisée.
2. L'équation homogène est $y' + ty = 0$ de solution $t \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$.
3. Une solution particulière de E est $y = 1$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{t \mapsto 1 + Ce^{-\frac{1}{2}t^2}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice
Résoudre (E) $z' = (1+i)z - 2it^2 + 2$.

Correction

1. L'équation est sous forme normalisée. A noter qu'ici $z : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$
2. L'équation homogène est $z' - (1+i)z = 0$ de solution $t \mapsto Ce^{(1+i)t} = Ce^t e^{it}$.
3. Le second membre est une fonction polynômiale de degré 2 : $t \mapsto -2it^2 + 2$.
   On cherche une solution particulière de la même forme : $\tilde{z}(t) = At^2 + Bt + C$

   $$\tilde{z}'(t) - (1+i)\tilde{z}(t) = -A(1+i)t^2 + (2A - B(1+i))t + (B - C(1+i)) = -2it^2 + 2$$

   En identifiant : $A = \frac{2i}{1+i} = 1 + i$, puis $B = 2$ et $C = 0$, une solution particulière : $\tilde{z} : t \mapsto (1+i)t^2 + 2t$
   (On peut/doit vérifier)

L'ensemble des solutions est donc $\left\{t \mapsto 2t + (1+i)t^2 + Ce^{(1+i)t}, C \in \mathbb{C}\right\}$.

Attention - Ensemble des solutions particulières selon le second membre
Attention, si le second membre est colinéaire à la solution homogène, il faut alors chercher une solution particulière de « degré » plus élevé…

Exercice
Résoudre (E) $y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x$.

Correction

1. L'équation est sous forme normalisée.
2. L'équation homogène est $y' + y = 0$ de solution $t \mapsto Ce^{-x}$.
3. On applique la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière $\tilde{y}(x) = C(x)e^{-x}$.

   $$\tilde{y}'(x) + \tilde{y}(x) = C'(x)e^{-x} = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x$$

   Donc $C'(x) = 2e^{2x} + 4\sin x e^x + 3\cos x e^x$, fonction à primitiver. On commence par primitiver $(\cos x + i\sin x)e^x = e^{(1+i)x}$ en $\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x} = \frac{e^x}{2}(1-i)(\cos x + i\sin x)$.
   En prenant les parties réelles et imaginaires :

   $$\int \cos x e^x \mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) \qquad \int \sin x e^x \mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(-\cos x + \sin x)$$

On a donc $C(x) = e^{2x} + 2e^x(-\cos x + \sin x) + \frac{3}{2}e^x(\cos x + \sin x) = e^{2x} + e^x(\frac{7}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x)$.

L'ensemble des solutions est donc $\left\{x \mapsto e^x + \frac{1}{2}(7\sin x - \cos x) + Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

Savoir faire - Etudier une inéquation différentielle

Supposons qu'on ait l'inéquation $y' + ay \leqslant b$.
On reprend les notations précédentes, avec $\varphi_h : y \mapsto (t \mapsto e^{h(t)} \times y(t))$.
On a $\varphi_{-A} \circ D \circ \varphi_A \circ y \leqslant b$ ou encore $\forall\ u \in I : (D \circ \varphi_A)(y)(u) \leqslant e^{A(u)}b(u)$ car $e^z > 0$.
Puis par croissance de l'intégration pour $t \geqslant t_0$:

$$\varphi_A(y)(t) - \varphi_A(y)(t_0) \leqslant \int_{t_0}^{t} b(u)e^{A(u)}\,\mathrm{d}u.$$

Et donc $y(t) \leqslant e^{A(t_0)-A(t)}y(t_0) + e^{-A(t)}\displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)e^{A(u)}\,\mathrm{d}u$.
(La constante t_0 est arbitraire, il faut nécessairement en fixer une !).
On reconnait une solution de l'équation différentielle pour le cas frontière.

Pour aller plus loin - Inéquations

Souvent les inéquations se transforment en de nouvelles inégalités, où les cas frontières sont exactement obtenus avec les solutions de l'équation identique ($\leqslant$ transformé en $=$).

Cas d'une équation non résolue. Problème du recollement

Savoir faire - Cas non résolue

A résoudre une équation $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ sur I avec a qui s'annule sur I.

1. On étudie l'équation sur des sous-intervalles de I où a ne s'annule pas.
   Par exemple si $a(t) = t$ et $I = \mathbb{R}$; on étudie sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. On obtient une famille de solutions, paramétrée sur chacun des sous-intervalles par une variable α (par exemple).
3. On essaye de **« recoller »** les solutions. Pour cela, on regarde les limites de y et de y' au voisinage du point t_0 qui annule a de manière à étudier la continuité et la dérivabilité de y en t_0.
   Souvent ces limites dépendent de la valeur paramètre α.

Dans la suite du cours : le théorème de prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ et les méthodes de calcul asymptotiques seront très utiles pour résoudre ce problème

Exercice

Résoudre l'équation $t^2y' + y = 1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (on discutera suivant la position de 0 par rapport à I).

Correction

1. L'équation n'est pas sous forme normalisée. Il faut diviser par t^2, cela n'est possible que sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
   L'équation normalisée est alors $y' + \frac{1}{t^2}y = \frac{1}{t^2}$.
   On considère donc, pour la suite, I un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ ou de $\mathbb{R}_-^*$.
2. L'équation homogène normalisée est $y' + \frac{1}{t^2}y = 0$ de solution $t \mapsto Ce^{\frac{1}{t}}$.
3. Une solution particulière de E est $y = 1$
4. L'ensemble des solutions est donc sur $\mathbb{R}_+^*$: $\left\{t \mapsto 1 + Ce^{\frac{1}{t}}, C \in \mathbb{R}\right\}$ et $\mathbb{R}_-^*$: $\left\{t \mapsto 1 + C'e^{\frac{1}{t}}, C' \in \mathbb{R}\right\}$

On a trouvé une solution sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+^*$, sur tout intervalle de $\mathbb{R}_-^*$.
Est-il possible d'avoir une solution sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (contenant 0) ? Pour cela on pratique un recollement :
Soit y une telle solution, alors il existe $C, C' \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\ t > 0,\ y(t) = 1 + Ce^{\frac{1}{t}}$ et $\forall\ t < 0$, $y(t) = 1 + C'e^{\frac{1}{t}}$.
Cette fonction y est nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \subset \mathbb{R}$.

Elle est donc continue en 0. Or $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } C = 0 \\ +\infty & \text{si } C > 0 \\ -\infty & \text{si } C < 0 \end{cases}$.
Il est donc nécessaire que $C = 0$ et dans ce cas $y(t) = 1$, pour tout $t \geqslant 0$.
De même $\lim\limits_{t\to 0^-} y(t) = 1$ (pour tout C'). Donc y est bien continue en 0
Il faut aussi que y soit dérivable sur I, donc dérivable en 0. Or $y'(t) = 0$, pour tout $t > 0$,
alors que pour tout $t < 0$, $y'(t) = \frac{-1}{t^2}Ce^{\frac{1}{t}} \underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} 0$ (comment lever l'indétermination ?).

Bilan : l'ensemble des solutions y (fonctions de classe $\mathscr{C}^1$) solutions de (E) sur I contenant 0 est

$$\left\{t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 1 + Ce^{\frac{1}{t}} & \text{si } t < 0 \end{cases}, C \in \mathbb{R}\right\}$$

Notez bien la méthode de recollement !

Remarque - Règle de L'Hospital

Il n'est pas rare que pour faire le recollement, nous ayons besoin de la règle de L'Hospital pour lever l'indétermination que l'on obtient en calculant, pour s frontière de I $\lim_{t\to s} y'(t) = \lim_{t\to s} \dfrac{c(t) - b(t)y(t)}{a(t)}$.

A utiliser, sans modération !

4.3. Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Enoncé

$\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Insistons : ici a, b, c **sont constants**, $a \neq 0$ (sinon on revient au cas précédent).
L'année prochaine, vous élargirez ce point de vue.

Définition - Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et $u : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$$

si

(1) f est deux fois dérivable sur I
(2) $\forall\ t \in I,\ af''(t) + bf'(t) + cf(t) = u(t)$

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée *équation caractéristique associée.*

Résolution de l'équation homogène associée

On considère donc l'équation homogène $(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0$.

Analyse - Composition de $F_{-\alpha} \circ F_{-\beta}$

Conservons les mêmes notations et comme a, b et c sont constants, prenons des primitives affines.
On a donc $(F_{-\alpha} \circ F_{-\beta})(y) = (y' - \beta y)' - \alpha(y' - \beta) = y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y$.
Et donc, en reprenant les formules de Viète : α et β sont les racines $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$.
Considérons donc les racines α et β du polynôme $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$.
Alors, $aF_{-\alpha} \circ F_{-\beta}(y) = ay'' + by' + cy$.
Cette analyse ne marche pas lorsque les racines sont les mêmes : $\alpha = \beta$.
On étudie les cas particuliers selon la nature des solutions (double ou simples, complexes ou réelles) de l'équation caractéristique associée à l'équation homogène.

Théorème - Cas complexe

— Si $ar^2+br+c=0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :

$$S_H=\left\{t\mapsto \lambda e^{r_1 t}+\mu e^{r_2 t};(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}$$

— Si $ar^2+br+c=0$ possède une racine double $r_0\in\mathbb{C}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :

$$S_H=\left\{t\mapsto (\lambda+\mu t)e^{r_0 t};(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}$$

Démonstration

Notons r_1 et r_2 les racines de $ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2)$. (On peut avoir $r_1=r_2$).
Alors y solution de $ay''+by'+cy=0 \iff F_{-r_1\cdot t}\circ F_{-r_2\cdot t}(y)=0$.
Si l'on compose (comme précédemment), on a :

$$\begin{aligned} ay''+by'+cy=0 &\iff \varphi_{r_1\cdot t}\circ D\circ\varphi-r_1\cdot t\circ\varphi_{r_2\cdot t}\circ D\circ\varphi-r_2\cdot t(y)=0\\ &\iff \exists\, C_1\in\mathbb{C} \text{ tel que } \circ D\circ\varphi-r_2\cdot t(y)=C_1\exp((r_1-r_2)t)\\ &\iff \exists\, C_1\in\mathbb{C} \text{ tel que } \circ D\circ\varphi-r_2\cdot t(y)=C_1\exp((r_1-r_2)t)\end{aligned}$$

— Si $r_1=r_2$, $ay''+by'+cy=0\iff \exists\, C_1,C_2\in\mathbb{C}$ tels que $y=(C_1t+C_2)\exp(r_2t)$.
— Si $r_1\neq r_2$, $ay''+by'+cy=0\iff \exists\, C_1,C_2\in\mathbb{C}$ tels que $y=\dfrac{C_1}{r_1-r_2}\exp(r_1\cdot t)+C_2\exp(r_2\cdot t)$.

□

Pour le cas réel, la partie correspondant aux racines complexes ($\Delta<0$) est plus subtile.

Théorème - Cas réel

On suppose ici a,b,c réels, $a\neq 0$.

— Si $ar^2+br+c=0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :

$$S_H=\left\{t\mapsto \lambda e^{r_1 t}+\mu e^{r_2 t};(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

— Si $ar^2+br+c=0$ possède une racine double $r_0\in\mathbb{R}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :

$$S_H=\left\{t\mapsto (\lambda+\mu t)e^{r_0 t};(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

— Si $ar^2+br+c=0$ possède deux racines complexes conjuguées $\alpha+i\beta$ et $\alpha-i\beta$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :

$$S_H=\left\{t\mapsto \lambda e^{\alpha t}\cos\beta t+\mu e^{\alpha t}\sin\beta t;(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Pour la démonstration, commençons par un lemme

Lemme - Solution réelle d'une équation réelle

Soit (H) l'équation différentielle homogène $ay''+by'+cy=0$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, a\neq 0$.
Si f est solution de (H) à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors $\mathrm{Re}f$ est solution de (H) à valeurs réelles.
Plus précisément l'ensemble des solutions réelles de (H) est exactement l'ensemble des parties réelles des solutions complexes de (H).

Pour aller plus loin - Paramètres

Considérons l'équation aux paramètres physiques : $y''+\frac{\omega}{Q}y'+\omega_0^2 y=0$.
On a $\Delta=\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2\left(1-4Q^2\right)$.

— *si $\Delta<0$ ($Q>\frac{1}{2}$) : régime périodique, les solutions sont de la forme $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(A\cos(\omega t+\varphi)$ avec $\omega=\frac{\omega_0}{Q}\sqrt{Q^2-\frac{1}{4}}$. Comme $\omega_0,Q>0$, les solutions sont oscillantes, bornées et de fréquence $\omega=\frac{\omega_0}{Q}\sqrt{Q^2-\frac{1}{4}}$*
— *si $\Delta=0$ ($Q=\frac{1}{2}$) : régime critique, les solutions sont de la forme $e^{\omega_0 t}(At+B)$*
— *si $\Delta>0$ ($Q<\frac{1}{2}$) : régime a-périodique, les solutions sont de la forme $e^{-\frac{\omega_0}{Q}(1+\sqrt{\frac{1}{4}-Q^2})t}$*

Démonstration

Démonstration du lemme :
On rappelle que $a,b,c\in\mathbb{R}$.Supposons que $f=f_R+if_I$ est solution de (H).
Alors

$$0=af''+bf'+cf=\left(af_R''+bf_R'+cf_R\right)+i\left(af_I''+bf_I'+cf_I\right)$$

Donc $af_R''+bf_R'+cf_R=0$ et f_R est à valeurs réelles.
On a donc : toute partie réelle de solutions complexes de (H) est une solution réelle de (H).
Réciproquement, si f est une solution réelle de (H),
alors $f+i0$ est une solution complexes de (H) dont f est la partie réelle.
Démonstration du théorème :
Les deux premiers cas se déduisent du cas complexe.
Supposons donc que le discriminant de l'équation caractéristique $\Delta<0$.
L'équation caractéristique est à coefficients réels donc les racines sont conjuguées : $\alpha+i\beta$ et $\alpha-i\beta$.
Les solutions sur $\mathbb{C}$ sont de la forme

$$f:t\mapsto \lambda e^{(\alpha+i\beta)t}+\mu e^{(\alpha-i\beta)t}$$

La partie réelle est alors une solution de (H) sur $\mathbb{R}$:

$$t\mapsto \frac{1}{2}(f+\overline{f})(t)=\frac{1}{2}(\lambda+\overline{\mu})e^{\alpha t+i\beta t}+\frac{1}{2}(\overline{\lambda}+\mu)e^{\alpha t-i\beta t}$$

$$t\mapsto e^{\alpha t}\left(\mathrm{Re}(\lambda+\mu)\cos(\beta t)+\mathrm{Im}(\mu-\lambda)\sin(\beta t)\right)$$

□

Remarque - Autre expression pour le cas $\Delta<0$

Dans le cas des racines complexes conjuguées, on peut poser $\lambda+i\mu=Ae^{-i\phi}$, où $A\geqslant 0$ et $\phi\in\mathbb{R}$. Les solutions s'écrivent alors $t\mapsto Ae^{\alpha t}\cos(\beta t+\phi)$
C'est un cas souvent préféré en physique.

Remarque - Base d'une espace vectoriel

Dans tous les cas (réel ou complexe) $S_H=\left\{\lambda f_1+\mu f_2;(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\right\}$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions déterminées par l'équation caractéristique associée. On dira que la famille (f_1,f_2) est une base de S_H.
On en déduira que S_H est un espace vectoriel de dimension 2 (=nombre de vecteurs de la base).

Exercice

Résoudre les équations différentielles suivantes (on cherchera les solutions réelles).

1. $y''=\omega^2 y$
2. $y''=-\omega^2 y$
3. $y''-4y'+13y=0$
4. $y''-4y'+4y=0$

Correction

1. L'équation caractéristique est $x^2-\omega^2=0$, de racine $\pm\omega$.
   Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme $t\mapsto Ae^{\omega t}+A'e^{-\omega t}$, avec $A,A'\in\mathbb{R}$
2. L'équation caractéristique est $x^2+\omega^2=0$, de racine $0\pm i\omega$.
   Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme $t\mapsto A\cos(\omega t)+A'\sin(\omega t)$, avec $A,A'\in\mathbb{R}$
3. L'équation caractéristique est $x^2-4x+13=0$, de racine $2\pm 3i$.
   Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme $t\mapsto e^{2t}(A\cos(3t)+A'\sin(3t))$, avec $A,A'\in\mathbb{R}$
4. L'équation caractéristique est $x^2-4x+4=0$, de racine double 2.
   Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme $t\mapsto (A+A't)e^{2t}s$, avec $A,A'\in\mathbb{R}$

Résolution avec second membre

On considère l'équation complète $(E)\quad ay''+by'+cy=u(t)$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3, a\neq 0$.

Théorème - Structure de l'ensemble S_E
La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (H), ce qui peut aussi s'écrire :
Si $\tilde{y}$ est une solution particulière de l'équation (E) et (f_1, f_2) une base de S_H alors
$$S_E = \left\{ t \mapsto \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \tilde{y}(t);\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

Démonstration
On démontre que $y - \tilde{y}$ est solution de (H) et donc de la forme $\lambda f_1(t) + \mu f_2(t)$ □

Pour aller plus loin - Méthode de Laplace
On note $\mathscr{L} : f \mapsto F$, telle que $F : p \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$ On montre (IPP) alors que $\mathscr{L}(f')(p) = pf(p) - f(0^+)$.
On transforme ainsi une dérivation en un produit et donc l'équation $ay'' + by' + cy = g$ se transforme en
$$(ap^2 + bp + c)F(p) = G(p)$$
et donc $F(p) = \dfrac{G(p)}{ap^2+bp+c}$, il reste donc à appliquer $\mathscr{L}^{-1}$ à F pour trouver la valeur de f ...

Proposition - Principe de superposition des solutions
Si le second membre de l'équation (E) est de la forme $u(t) = u_1(t) + \cdots + u_n(t)$
et si l'on connaît des solutions particulières $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ des équations avec les seconds membres $u_1(t), \ldots, u_n(t)$,
alors une solution particulière de (E) est $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \cdots + \tilde{y}_n$.

Remarque - Démonstration
Il s'agit exactement de la même démonstration que dans le cas $n = 1$.
Ce qui compte ici c'est la linéarité. (Le fait que les coefficients soient constants ne changent rien concernant ce théorème de superposition)

Avec second membre : exponentielle-polynôme

On va s'intéresser au cas où $u(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale à valeurs complexes.

Pour aller plus loin - Equations en physique
1. *Dans un circuit RC ou RL, τ étant la constante de temps, $E(t)$ la tension fournie par un générateur, le signal de sortie y vérifie l'équation différentielle :*
$$y' + \frac{1}{\tau}y = E(t)$$
2. *On considère un circuit comprenant, en série, un condensateur de capacité C, une résistance R, une inductance et un générateur fournissant une tension complexe $U(t) = U_0 e^{j\omega t}$ (où $j^2 = -1$). L'intensité du courant dans le circuit est alors solution de l'équation différentielle :*
$$(E) \quad L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} = j\omega U_0 e^{j\omega t}$$
3. *Une masse ponctuelle m suspendue à un ressort glisse le long de l'axe (Oy) orienté vers le haut. Le ressort est étiré jusqu'à une position $y = y_0$ puis laché à l'instant $t = 0$. La masse ponctuelle est soumise à son poids $-mg$, à la force de rappel $-ky$, à la force de frottement $-K\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. On obtient l'équation différentielle :*
$$(E) \quad m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + K\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ky = -mg$$

Savoir faire - Second membre $e^{mt}P(t)$
Soit $m \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale de degré n. Alors on peut trouver une solution particulière de l'équation
$$(E) \quad ay'' + by' + cy = e^{mt}P(t)$$
de la forme $\tilde{y}(t) = e^{mt}Q(t)$ où Q est une fonction polynomiale
- de degré n si m n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+1$ si m est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+2$ si m est racine double de $ar^2 + br + c = 0$

Démonstration
Le calcul donne :
$$a\tilde{y}''(t) + b\tilde{y}'(t) + c\tilde{y}(t) = [(am^2 + bm + c)Q(t) + (2am + b)Q'(t) + aQ''(t)]e^{mt}$$
Si $d = \deg(Q)$, alors $\deg(Q') = d - 1$ et $\deg(Q'') = d - 2$.
$$\tilde{y} \text{ est solution de } (E) \iff \forall\, t \in I[(am^2 + bm + c)Q(t) + (2am + b)Q'(t) + aQ''(t)] = P(t)$$
Nécessairement les polynômes doivent être de même degré. Donc :
- si m n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$, $\deg(Q) = \deg(P) = n$
- si m est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$, donc $2am + b \neq 0$, alors $\deg(Q') = \deg P$, donc $d - 1 = n$, i.e. $d = n + 1$
- si m est racine double de $ar^2 + br + c = 0$ donc $2am + b = 0$, alors $\deg(Q'') = \deg P$, donc $d - 2 = n$, i.e. $d = n + 2$

La condition d'existence donne l'unicité (analyse). Il faut vérifier l'existence (synthèse). Il s'agit alors d'un système inversible de n équations à n inconnues à résoudre. □

Analyse - Polynôme × fonction trigonométrique
On peut utiliser ce qui précède pour le cas où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $u(t) = e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$ avec P, Q des fonctions polynomiales à coefficients réels.
Dans ce cas le second membre est de la forme $T(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$ où T est un polynôme complexe.
Or ce second membre est a priori réel. Le calcul suivant donne :
$$e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t) = \mathrm{Re}\Big((P(t) - iQ(t))e^{(\alpha+i\beta)t}\Big)$$
on en déduit que $T = P(t) + iQ(t)$ et on peut chercher une solution particulière (sur $\mathbb{C}$) de la forme $R(t)e^{\alpha+i\beta t}$ avec :
- $\deg R = \deg T$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- $\deg R = \deg T$ si $\alpha + i\beta$ est racine simple $ar^2 + br + c = 0$.
  (Elle ne peut être racine double, sinon l'équation serait à coefficients complexes)

Si $\tilde{y}$ est une solution à valeurs complexes de l'équation avec le second membre $(P(t) - iQ(t))e^{(\alpha+i\beta)t}$, alors $\mathrm{Re}(\tilde{y})$ est une solution particulière à valeurs réelles.

Savoir faire - Second membre de la forme $e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$
On peut trouver (par identification) une solution particulière de l'équation
$$(E) \quad ay'' + by' + cy = e^{\alpha t}(P(t)\cos(\beta t) + Q(t)\sin(\beta t))$$
de la forme $\tilde{y}(t) = e^{\alpha t}(T(t)\cos(\beta t) + R(t)\sin(\beta t))$ où T et R sont des fonctions polynomiales
- de degré $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+1 = \max(\deg(P), \deg(Q)) + 1$ si $\alpha + i\beta$ est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$

Exercice
1. Résoudre $y'' - y' - 2y = 3e^{-t} + 1$.
2. Résoudre $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$.

Correction

1. L'équation homogène est (H) $y'' - y' - 2y = 0$ d'équation caractéristique $r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1)$.
   Les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto Ae^{2t} + A'e^{-t}$.
   En exploitant le théorème précédent et le principe de superposition, on cherche une solution particulière sous la forme
   $$\tilde{y} : t \mapsto C_1 te^{-t} + C_2$$
   Or
   $$\tilde{y}''(t) - \tilde{y}'(t) - 2\tilde{y}(t) = C_1[(-2-1) + (1+1-2)t]e^{-t} + C_2 = -3C_1e^{-t} + C_2$$
   Donc $C_1 = -1$ et $C_2 = 1$ et les solutions de (E) sont :
   $$t \mapsto Ae^{-2t} + (A' - t)e^{-t} + 1 \qquad \text{avec } A, A' \in \mathbb{R}$$
2. L'équation homogène est (H) $y'' + 2y' + 5y = 0$ d'équation caractéristique $r^2 + 2r + 5$, de discriminant $\Delta = -16$ et donc de racine $-1 \pm 2i$.
   Les solutions de (H) sont de la forme $t \mapsto e^{-t}(A\cos 2t + A'\sin 2t)$.
   En outre $\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$, donc le second membre est (en partie) de la forme $e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$, avec $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $P(t) = \frac{1}{2}$ et $Q(t) = 0$.
   Pas besoin de monter en degré et on peut donc chercher une solution particulière de la forme
   $$\tilde{y} : t \mapsto C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + C_3$$
   Or
   $$\tilde{y}''(t) + 2\tilde{y}'(t) + 5\tilde{y}(t) = (C_1 + 4C_2)\cos(2t) + (C_2 - 4C_1)\sin(2t) + 5C_3$$
   Donc $C_1 = \frac{1}{34}$, $C_2 = \frac{4}{34}$ et $C_3 = \frac{1}{10}$ et les solutions de (E) sont :
   $$t \mapsto e^{-t}(A\cos 2t + A'\sin 2t) + \frac{1}{34}(\cos 2t + 4\sin 2t) + \frac{1}{10} \qquad \text{avec } A, A' \in \mathbb{R}$$

Résolution du problème de Cauchy

Théorème - Conditions initiales
Soit $(E)\quad ay''+by'+cy=u(t)$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3, a\neq 0$ et $u:I\to\mathbb{K}$ de l'une des formes précédentes (exponentielle-polynôme...).
Soit $(t_0,y_0,y_0')\in I\times\mathbb{K}\times\mathbb{K}$.
Alors il existe une unique solution $f:I\to\mathbb{K}$ telle que $f(t_0)=y_0$ et $f'(t_0)=y_0'$.

Le principe de la démonstration est simple : les deux conditions initiales fixent les deux valeurs des deux variables libres λ et μ.
Mais la démonstration est pénible selon la nature des racines de l'équation caractéristique.
Nous nous contenterons du cas $\Delta\neq 0$

Démonstration
Supposons que $\Delta\neq 0$. Soient α,β les deux racines de ax^2+bx+c.
Notons $F_{-\alpha}:y\mapsto y'-\alpha y$ et $F_{-\beta}:y\mapsto y'-\beta y$.
On a les équivalences :

$$y \text{ solution de } E \iff F_{-\alpha}\circ F_{-\beta}(y)=u \iff \exists\, C\in\mathbb{R} \text{ tq} F_{-\beta}(y): t\mapsto Ce^{\alpha(t-t_0)}+e^{\alpha(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} v(u)e^{-\alpha u}\mathrm{d}u$$

$$\iff \exists\, C',C''\in\mathbb{R} \text{ tq} y: t\mapsto C''e^{\beta(t-t_0)}+C'e^{\alpha(t-t_0)}+V(t)$$

où V est une fonction explicite, qui dépend de v, α et β :

$$U: t\mapsto e^{\beta t}\int_{t_0}^{t} e^{(\alpha-\beta)s}\left(\int_{t_0}^{s} v(u)e^{-\alpha u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$

Les conditions initiales précisent ensuite les valeurs de C' et C''.

C'est un système de deux équations à deux inconnues à résoudre : $\left\{\begin{array}{lll} C' & +C'' & =U(t_0)\\ \alpha C' & +\beta C'' & =U'(t_0)\end{array}\right.$

Il est de Cramer car $\alpha\neq\beta$.
□

Exercice
Résoudre le problème de Cauchy : $y''-2y'+y=te^t$ avec les conditions $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.

Correction
L'équation homogène est (H) $y''-2y'+y=0$ d'équation caractéristique $r^2-r+1=(r-1)^2$.
Les solutions de (H) sont de la forme $t\mapsto(A+A't)e^t$.
En exploitant le théorème de la partie précédente, on cherche une solution particulière sous la forme

$$\widetilde{y}: t\mapsto(C_1t^2+C_2t^3)e^t$$

Or

$$\widetilde{y}''(t)-2\widetilde{y}'(t)+\widetilde{y}(t)=\Big(C_1[(t^2-2t^2+t^2)+(4t-4t)+2)]+C_3[(t^3-3t^3+t^3)+(6t^2-6t^2)+6t]\Big)e^t$$

Donc $C_1=0$ et $C_2=\frac{1}{6}$ et les solutions de (E) sont :

$$t\mapsto(A+A't+\frac{1}{6}t^3)e^t \qquad \text{avec } A,A'\in\mathbb{R}$$

Avec les condition de Cauchy, cela donne :

$$\left\{\begin{array}{lll} A & = & 0\\ A & +A' & =1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=0\\ A'=1\end{array}\right.$$

Donc la solution du problème de Cauchy est $y: t\mapsto(t+\frac{1}{6}t^3)e^t$

Exercice
Résoudre les équations différentielles de la physique (cadre)

Correction

5. Bilan

Synthèse

⇝ A toute fonction f, on associe (par un tableau) une fonction f' qui est sa dérivée. Réciproquement, on peut essayer de lui associer une fonction F dont elle (=f) serait la dérivée. Cette fonction F non unique s'appelle une primitive de f. On a un tableau de fonctions usuelles à APPRENDRE par coeur.

⇝ Il n'existe pas d'algorithme simple de primitivisation comme il en existe de dérivation. La seule chose que l'on sait (et que l'on démontrera plus tard) est que toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle I. On fait ce que l'on peut en reconnaissant localement des situations : pour une somme de fonctions, la linéarité suffit ; pour un produit, on exploite une intégration par parties ; pour une composition, on utilise un changement de variable.

⇝ Une équation différentielle est une équation (égalité) dont l'inconnue est une fonction et qui associe cette fonction à ses dérivées. L'équation peut être linéaire, d'ordre quelconque (un entier), écrite sous forme normale... On lui associe une courbe intégrale.
L'ensemble des solutions apparait (pour les équations différentielles linéaires) sous forme d'un espace affine.

⇝ Le problème théorique consiste à trouver des hypothèses qui assure l'existence d'une solution (unique?) à une équation différentielle, sur un intervalle le plu grand possible.
Pour les équations différentielles linéaires, une théorie satisfaisante est donné par le théorème de Cauchy. A connaître par coeur avec toutes ses hypothèses et toutes ses conclusions (ordre 1 ou 2)...

⇝ Le problème pratique consiste à résoudre l'équation. Nous avons mis au point des stratégies : la méthode de la variation de la constante (pour les EDL1). Au passage, on rencontre le problème du recollement de solutions sur des intervalles joints ; ainsi que l'étude des inéquations différentielles.
Pour les EDL2, nous nous limitons cette année aux équations à coefficients constants. La méthode est simple : il s'agit de mettre en parallèle cette équation différentielle et l'équation caractéristique (polynomiale de degré 2), puis de résoudre cette seconde équation. La forme des solutions et les solutions de cette seconde équation (polynomiale) donnent la forme des solutions et les solutions de la première (différentielle).

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$
— Savoir-faire - $\sin^n x\cos^m x$
— Truc & Astuce pour le calcul - Idée pour « vérifier » le calcul : faire un DL en 0
— Savoir-faire - Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$
— Truc & Astuce pour le calcul - Encadrer une intégrale
— Savoir-faire - Faire une intégration par parties
— Savoir-faire - Obtenir une primitive avec une IPP cachée
— Savoir-faire - $f(x)=P(x)e^{ax}$
— Savoir-faire - $f(x)=P(x)\ln(Q(x))$
— Savoir-faire - Changement de variable - dans la pratique
— Savoir-faire - Calculer une primitive par changement de variable
— Savoir-faire - Bijection par morceaux
— Savoir-faire - Calcul pour $f(t)=\sin^n t\cos^m t$ avec n ou m impair.
— Savoir-faire - Cas général (tan $\frac{x}{2}$).
— Savoir-faire - Variable dans les bornes de l'intégrales.
— Savoir-faire - Découper I pour avoir des équations normalisées
— Savoir-faire - Méthode de « variation de la constante ».
— Savoir-faire - Etudier une inéquation différentielle.
— Savoir-faire - Cas non résolue (recollement).
— Savoir-faire - Second membre de la forme $e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t)$.

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarq*
$\left[\Phi(t)\right]_{\cdot}^{x} = \Phi(x)$	« Crochet » de Φ	Par extension : $[\Phi]_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$	On trou
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$	Intégrale de f entre a et b. Il s'agit de l'aire « sous » la courbe	Pour tout $a \in \mathscr{D}_f$ et f continue, $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f	
$\int_{\cdot}^{x} f(t)\mathrm{d}t$	(Ensemble des) primitive(s) de f		Attentio primitiv

Retour sur les problèmes

40. Il est miraculeux qu'ils s'agissent des deux faces d'une même pièce. C'est Newton et Leibniz qui s'en rendirent compte les premiers, indépendamment et en prenant des chemins très différents. Certains pensent que Fermat l'avait compris… Un célèbre faux du XIX siècle fit croire à Michel Chasles que le premier avait été en réalité Blaise Pascal. Un mauvais pari de l'académicien français.
41. C'est l'application $x \mapsto 2^x u_0 = u_0 e^{x\ln 2}$
42. Rien de simple. D'où les deux méthodes : intégration par parties (pour un produit) et changement de variable (pour une composition).
43. Oui c'est possible, on l'aperçoit dans le cours. Mais le moins qu'on puisse dire c'est que la technique est très technique !
44. Toute fonction continue est intégrable (voir plus tard dans l'année). La réciproque est fausse : certaine fonction non continue sont néanmoins intégrable. En regardant la courbe, on trouve qu'il y a une compensation : $\int_0^\pi \tan(t)\mathrm{d}t = 0$.
    Mais concrètement, une primitive de $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est $-\ln(|\cos|) + K$, mal définie en $\frac{\pi}{2}$. On ne peut inopinément écrire : $+\infty - \infty = 0$…
45. Cf. Cours de physique
46. Le théorème de Cauchy a pour but de répondre à cette question. Dans le cadre des équations linéaires, il allie nombre liberté (ordre de l'équation) et nombre de contraintes (conditions initiales).
47. Nous verrons une autre option pour étudier des équations différentielles : la force brute de calcul de l'ordinateur. La solution ne sera qu'approchée, mais l'approximation sera diablement efficace (méthode d'Euler, Heun…).

Troisième partie

Logique ensembliste

Chapitre 9

Structure logique

Résumé -

En mathématiques, on s'intéresse à des objets sur lesquelles on formule des assertions. Si, partant des axiomes ou des définitions on peut, en respectant des règles logiques, démontrer qu'une assertion est vraie, elle prend alors le nom de théoréme (avec un certain nombre de variantes sur ce nom : proposition (résultat considéré comme un peu moins important qu'un théorème), lemme (résultat qui est avant tout une étape intermédiaire pour arriver au résultat final), corollaire (conséquence plus ou moins immédiate d'un résultat précédemment démontré).
Le but de l'activité mathématique est de prouver de nouveaux résultats. Pour éviter les erreurs, il faut : du bon sens (i.e. de la logique), de la méthode, de la rigueur.
Quelques vidéos de youtubers :
— *Canal unisciel - Logique et raisonnement -*

Sommaire

1. Cours mathématiques

1.1. L'énigme mathématique

Pas de réponse, que des questions. Extrait de « l'efficacité des mathématiques est-elle déraisonnable » de D. Lambert.

Problème 45 - Déraisonnable efficacité des mathématiques

Le développement des sciences physiques contemporaines a clairement manifesté l'efficacité surprenante des mathématiques. Dans un article souvent cité, E. P. Wigner parle à ce propos d'une « efficacité déraisonnable », d'une sorte de « miracle » qui est comme un « don magnifique que nous ne comprenons ni ne méritons ». Einstein lui-même manifeste son étonnement à cet égard ? : « Comment est-il possible que la mathématique, qui est un produit de la pensée humaine et indépendante de toute expérience, puisse s'adapter d'une si admirable manière aux objets de la réalité? La raison humaine serait-elle capable, sans avoir recours à l'expérience, de découvrir par la pensée seule les propriétés des objets réels » ? Aujourd'hui cet étonnement est encore renforcé par les confirmations expérimentales très précises apportées à la mécanique quantique, à l'électrodynamique quantique, à la théorie unifiée des interactions électro-faibles (qui a permis la découverte effective des bosons vectoriels intermédiaires) ou encore à la théorie cosmologique standard (grâce aux mesures effectuées par le satellite COBE par exemple). De plus, cette efficacité se manifeste également, quoique de manière plus discrète, dans d'autres domaines des sciences. En biologie, par exemple, les mathématiques apportent des résultats surprenants au niveau de la compréhension des dynamiques de populations en écologie…

Problème 46 - Un simple langage ? Ou plus

Les mathématiques sont-elles un langage? Est-ce un jeu? Un aperçu sur la/une vérité? Autre chose…

Problème 47 - Inspiration…

Les deux sources d'inspiration pour les mathématiques jusqu'au XXème siècle sont la physique dans sa globalité (mécanique, électricité, chimie…) et l'arithmétique (le calcul avec des nombres entiers). La géométrie a été aussi d'une certaine façon une source d'inspiration.
Il est donc nécessaire en filière mathématique d'étudier la physique et l'arithmétique…
La biologie et l'informatique (quoi que pour cette dernière, il est parfois compliqué de démêler informatique et mathématiques) sont de nouvelles sources d'inspiration…

1.2. Structure de cours

Analyse - Formalisation

Le cours se construit d'une façon systématique. La chronologie est importante.

1. Quelques axiomes : des résultats de base admis, sans démonstration, sur un *bon sens* commun.
2. A partir de ces axiomes, on développe des idées, des mots, des images mentales et des heuristiques.
   Ces images permettent de bien comprendre mais pas ne permettent pas les démonstrations.
   Une heuristique, c'est l'art de trouver, de découvrir. En pédagogie : l'adjectif heuristique signifie : « Qui consiste à faire découvrir par l'élève ce qu'on veut lui enseigner ».
3. Il faut formaliser les idées pour pouvoir agir dessus : on donne donc des définitions précises avec un langage très précis, mais finalement assez restreint. Une définition, c'est une *légalisation* d'une idée.
4. La manipulation des définitions pour créer des théorèmes ou propositions (moins importantes qu'un théorème, ou étape intermédiaire), des corollaires (résultats immédiats), des lemmes (propositions pour des démonstrations).
5. Les démonstrations sont les étapes intermédiaires entre définitions et propositions ou entre propositions et théorèmes. C'est l'essentiel de notre cours!
6. Pour bien comprendre et apprendre à manipuler les mathématiques, nous aurons beaucoup d'exercices d'applications, de moments d'analyse, des devoirs (maisons ou surveillés) et des colles évidemment!

Exercice

Pour ces six étapes, donner un pourcentage du temps passé en cours de mathématiques pendant le lycée ?
Reprendre l'exercice en fin d'année pour évaluer le cours de CPGE.

Correction

2. Quantificateurs et notations ensemblistes

2.1. Appartenance, éléments

Définition - Ensemble

Un ensemble est une "collection" d'objets appelés *éléments*. On introduit une relation particulière entre un élément x et un ensemble E, la *relation d'appartenance* :

$x \in E$, ce qui se lit "x appartient à E" ou "x est un élément de E.

La négation de la relation d'appartenance s'écrit $x \notin E$, ce qui signifie que $x \in E$ est faux.

Pour aller plus loin - Propriété essentielle, sinon, c'est la faillite…

Très vite dans la théorie des ensembles sont apparus quelques paradoxes, ce qui a demandé de faire une théorie plus fine. Ici, on reste au stade naïf, car cela demanderait beaucoup de temps et il serait assez peu productif de prendre ce temps.
La contradiction est de cette forme (en notant catalogue ou lieu d'ensemble) : « Peut-on faire un catalogue des catalogues qui ne se citent pas ? »

Proposition - Propriété essentielle

Un ensemble est défini dés que pour tout objet x, on peut se demander raisonnablement (i.e. sans contradiction) si x est, ou n'est pas, un élément de cet ensemble.

Définition - Formalisation

On formalise les idées et objets pour signifier un certain type d'appartenance par :

$\forall x$, qui se lit « quel que soit x » ou pour « pour tout x »,
$\exists x$ se lit « il existe x »,
$\exists! x$ se lit « il existe un unique x »,

Attention - Pas d'abus

On n'abuse pas de ce formalisme dans un texte en français.
Seul un « $x \in E$ » peut être toléré.

Exemple - Lecture
Par exemple,
$\forall x \in E$ se lit » quel que soit x appartenant à E », « quel que soit l'élément x de E » , ou encore « pour tout élément x de l'ensemble E »...
De plus si $P(x)$ désigne une propriété dépendant de x,
$\forall x \in E, P(x)$ se lit « pour tout x de E, la propriété P de x... »

et $\exists x \in E | P(x)$ (ou $\exists x \in E; P(x)$) se lit « il existe x dans E tel que la propriété P de x... »

Exemple - Ensembles classiques
Les plus connus : $\mathbb{N}$ (dont les éléments sont appelés "entiers naturels"), $\mathbb{Z}$ ("entiers relatifs"), $\mathbb{Q}$ ("nombres rationnels"), $\mathbb{R}$ ("nombres réels"), $\mathbb{C}$ ("nombres complexes"), mais également l'ensemble des élèves de la classe, l'ensemble des professeurs de la classe, l'ensemble des aliments contenus dans le frigo de la cuisine de vos parents...

Exercice
Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?
On a donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1 \text{ mais } \exists x \in \mathbb{C} \mid x^2 = -1$$

Correction
Remarquez la négation du $\exists \ldots$

Remarque - Convention de notation
La lettre x peut être remplacée par n'importe quel autre symbole, bien que quelques conventions tacites existent en mathématiques (parfois différentes de la physique) : $n, m, p, i, j, k, \ell, \ldots$ pour des entiers, $x, y, z, s, t, \theta, \epsilon, \ldots$ pour des réels, z pour un complexe...

Histoire - Ass
Depuis la fin du X
s'appuie sur la thé
avoir étudier est Ca

On commence donc
théorie des ensemb
affirmait : « Nul n
Cantor a créé ».

Définition - Règle de la théorie des ensembles
Quelques régles régissent les ensembles (dont certaines sont des axiomes de la théorie des ensembles) :
- régle n°1 : Deux ensembles qui ont les mêmes éléments sont égaux.
- régle n°2 : Il existe un ensemble qui n'admet aucun élément, soit

$$\exists E \mid \forall x, x \notin E$$

D'après la règle n°1, cet ensemble est unique, on l'appelle *ensemble vide* et on le note $\emptyset$.

2.2. Différentes manières d'écrire un ensemble

Descriptions : en extension, en compréhension, par image

Définition - Singleton, paire
Soit a un objet mathématique. L'ensemble dont a est l'unique élément s'appelle un singleton, on le note $\{a\}$.
Soient a et b deux objets distincts. L'ensemble dont ce sont les deux seuls éléments s'appelle la paire formée de a et b. On le note $\{a, b\}$

D'aprés la régle n°1, $\{a, b\} = \{b, a\}$, qu'il ne faut pas confondre avec le couple (a, b).
Si $a = b$, $\{a, b\} = \{a\}$.

Définition - Définition en extension
On dit que l'on définit un ensemble en extension lorsque l'on énumère ses éléments :
$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$
Cette notation sous-entend que l'on sait interpréter les ... intermédiaires.

Exemple - Ensemble défini en extension
$\{1, 2, \ldots, n\}$ représente l'ensemble des entiers compris entre 1 et n, on le note parfois aussi $[\![1, n]\!]$.
$\{0, 2, \ldots, 2n\}$ est l'ensemble des entiers de la forme $2k$ où k varie de 0 à n.
Par abus courant, la même notation s'emploie pour énumérer des ensembles infinis, comme
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ou $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, \ldots\}$.

Exercice
$\{1, 2, 3, \ldots\} =$, $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\} =$

Correction
$\{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$, $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\} = \mathbb{Z}$

Définition - Définition en compréhension
On peut définir un ensemble en compréhension, c'est à dire par l'intermédiaire d'une propriété qui le caractérise : soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant d'un objet x de E, alors
$$\{x \in E \mid P(x)\}$$
est l'ensemble des x éléments de E tels que $P(x)$ (sous-entendu "tels que $P(x)$ soit vraie").

Pour aller plus loin - Définition par image
On peut définir un ensemble par image, c'est à dire par l'intermédiaire d'une application qui le caractérise : soit E un ensemble et $f : E \to F$ et enfin $A \subset E$.
Alors
$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$
est le sous-ensemble de F dont les éléments sont des images d'éléments de A par f.

Exercice
$\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\} =$
$\{x \in \mathbb{N} | x + 1 = 0\} =$
$\{x \in \mathbb{C} | x^2 + 1 = 0\} =$
$\{x \in \mathbb{Z} | x + 1 = 0\} =$
$\{a^2 + 2 | a \in [\![1, 5]\!]\} =$

Correction
$\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$
$\{x \in \mathbb{N} | x + 1 = 0\} = \emptyset$
$\{x \in \mathbb{C} | x^2 + 1 = 0\} = \{-i, i\}$
$\{x \in \mathbb{Z} | x + 1 = 0\} = \{-1\}$
$\{a^2 + 2 | a \in [\![1, 5]\!]\} = \{3, 6, 11, 18, 27\}$

Le dernier ensemble de cet exercice est un exemple d'ensemble défini comme image.

Intervalle de $\mathbb{R}$

Définition - Intervalles de $\mathbb{R}$
Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on définit les *intervalles* de $\mathbb{R}$, ce sont les ensembles suivants :

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ $[a, b[,]a, b[\ldots$
$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$ $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ $[b, +\infty[,]b, +\infty[\ldots$

Les intervalles du type $[a, b],]-\infty, a], [b, +\infty[$ sont des *intervalles fermés*
Les intervalles du type $]a, b[,]-\infty, a[,]b, +\infty[$ sont des *intervalles ouverts*
Les intervalles du type $[a, b[$ ou $]a, b]$ sont dits *semi-ouverts (ou semi-fermés)*
$[a, b]$ s'appelle un *segment.*

Exemple - Autres exemples

$\emptyset =]0,0[$

$\mathbb{R}_- =]-\infty,0]$, $\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0[$, $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$, $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ (on trouve aussi les notations $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*}$...)

Savoir faire - Montrer que I est un intervalle de $\mathbb{R}$

Il suffit de montrer que pour tout $a, b \in I$, $[a,b] := \{t \in \mathbb{R} \mid a \leqslant t \leqslant b\} \subset I$.
C'est-à-dire :
« Soient $a, b \in I$ (quelconques puis fixés).
Soit $t \in [a,b]$ (i.e. $a \leqslant t \leqslant b$) alors..... et donc $t \in I$. »

Exercice
Montrer que $J = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x + e^x \leqslant 10\}$ est un intervalle.

Correction
Soient $a, b \in J$. Soit $t \in [a,b]$.
Notons $\varphi : x \mapsto x + e^x$, croissante comme addition de deux fonctions croissantes.
Alors $a \leqslant t \leqslant b \Rightarrow \underbrace{1 \leqslant \varphi(a)}_{a \in J} \leqslant t + e^t \leqslant \underbrace{\varphi(b) \leqslant 10}_{b \in J}$

2.3. Utilisation de quantificateurs

Pour aller plus loin - Motivations
Il y a d'autres motivations.
Nous verrons plus loin l'articulation forte entre ces deux quantificateurs, en particulier pour la négation.
Nous verrons encore plus l'articulation très forte entre ces connecteurs et les opérations ensemblistes $\bigcap_{i \in I} A_i$ et $\bigcup_{i \in I} A_i$

Heuristique - Quantificateurs nécessaires

En mathématiques classiques, deux quantificateurs sont essentiels :
- $\forall$, lu « pour tout » ou « quel que soit », pour désigner qu'une propriété a un certain degré d'universalité :
  $\forall x, \mathscr{P}(x)$. La propriété $\mathscr{P}$ est donc toujours vraie, puisque vraie pour tout point.
  $\forall x \in E, x \in F$. Tous les éléments de E sont dans F. Dans sa totalité : $E \subset F$.
- $\exists$ lu « il existe » est la négation du précédent.

Remarque - Existence ET unicité

Il arrive qu'on ait besoin d'ajouter l'unicité à l'existence (cas des antécédents pour une fonction bijective...).
On écrit alors : $\exists ! x$, pour dire « il existe un unique x qui... »

Analyse - Non commutativité des connecteurs

Les deux assertions suivantes ne sont pas identiques :

$$\forall x, \exists y \ldots \qquad \exists y, \forall x \ldots$$

L'une est plus forte que l'autre : la seconde. Pour la seconde assertion, il s'agit du même y pour tous les x. Dans la première assertion, chaque y dépend de chaque x.

Exemple - Suite majorée, ou rien

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leqslant M$ est toujours vraie. Comme M peut dépendre de n, on peut prendre $M_n = x_n + 1$
$\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$ signifie qu'une suite est majorée. Ce n'est pas toujours vraie (ex : $(u_n) = (n)$).

Exercice
On considère la suite de FIBONACCI : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ et $F_0 = F_1 = 1$.
Que pensez-vous des deux assertions suivantes :
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists A, B \in \mathbb{R}$ tels que $F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- $\exists A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Correction
Le première est sans intérêt cela est toujours vrai. Il suffit de prendre $B_n = 0$ et $A_n = \frac{F_n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$.
La seconde est tout à fait intéressante, voire incroyable !

Savoir faire - Noter les dépendances

Si l'on écrit $\forall a, \exists b \ldots$, le nombre b en second dépend grandement de a.
On devrait noter $b(a)$ ou b_a.
En revanche, si on écrit $\exists b$ tel que $\forall a \ldots$, le nombre a ne dépend pas (plus particulièrement que les autres) de b. La notation a_b ou $a(b)$ n'aurait pas d'intérêt. Rappelons que cette formulation est la plus forte.
De nombreux problèmes rencontrés en mathématiques en MPSI par les élèves reposent sur la non compréhension de cette (in)dépendance.

Une autre stratégie est de faire comme en Python, des indentations dans la démonstration.
A chaque paramètre introduit, on fait apparaître un petit retrait dans l'écriture de la démonstration qui permet de voir comme ces paramètres dépendent mutuellement les uns des autres...

2.4. Parties d'un ensemble

Définition - Partie d'un ensemble (sous ensemble)

On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E, ce que l'on note $F \subset E$, si tous les éléments de F sont éléments de E.
On dit aussi que F est une partie ou un sous-ensemble de E.

Savoir faire - Montrer que $F \subset E$

Pour montrer que $F \subset E$, on démontre :
$F \subset E \Leftrightarrow (\forall x, x \in F \Rightarrow x \in E)$.

Proposition - Relation d'ordre

Quelques propriétés :
- $\emptyset \subset E$ pour tout ensemble E
- $E \subset E$ (l'inclusion est une relation réflexive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset G$ alors on a aussi $E \subset G$ (l'inclusion est une relation transitive)
- Si on a $E \subset F$ et $F \subset E$ alors $E = F$ (l'inclusion est une relation antisymétrique)

Savoir faire - Prouver l'égalité de deux ensembles

La dernière propriété sert souvent à prouver l'égalité de deux ensembles.

Exercice
A quelle condition a-t-on : $\{a\} \subset E$? $\{a,b\} \subset E$? $\{a\} \subset \{b\}$?

Correction
$\{a\} \subset E$ ssi $a \in E$ $\qquad$ $\{a,b\} \subset E$ ssi $a, b \in E$ $\qquad$ $\{a\} \subset \{b\}$ ssi $a = b$ ssi $\{a\} = \{b\}$

Définition - Ensemble des partes de E

$\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E : $X \in \mathscr{P}(E)$ signifie donc à $X \subset E$.

Exemple - Singleton...

$\mathscr{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$
$\mathscr{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$
$\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

2.5. Produit cartésien

Définition - Produit cartésien de deux ensembles
Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble dont les éléments sont les couples formés d'un élément de E et d'un élément de F (dans cet ordre) :

$$E \times F = \{x | \exists a \in E, \exists b \in F ; x = (a,b)\} = \{(a,b) | a \in E \text{ et } b \in F\}.$$

Remarque - Rôle de la ponctuation
Le ";" dans la définition en compréhension peut être remplacé par " :", "tels que".

Plus généralement,

Définition - Produit cartésien de n ensembles
Soit $n \in \mathbb{N}$, si $E_1, \dots, E_n$ sont n ensembles, on définit le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ comme l'ensemble des n-uplets $(a_1, \dots, a_n)$ formés d'éléments $a_1 \in E_1, \dots, a_n \in E_n$.
Si les E_i désignent un même ensemble E, on note $E_1 \times \cdots \times E_n = E^n$ ($\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$...)

Remarque - Associativité du produit cartésien
A priori $E \times (F \times G) \neq (E \times F) \times G$, mais on les identifie fréquemment à $E \times F \times G$.

2.6. Opérations sur les ensembles

Définition - Réunion, intersection, différence d'ensembles
Pour E et F deux ensembles on définit :
- la réunion (ou union) de E et F : $E \cup F = \{x | x \in E \text{ ou } x \in F\}$ (le "ou" est inclusif : on peut avoir les deux simultanément)
- l'intersection de E et F : $E \cap F = \{x | x \in E \text{ et } x \in F\}$
- la différence de E et de F : $E \setminus F = \{x | x \in E \text{ et } x \notin F\}$

Remarque - Interprétation avec une table de vérité
En d'autres termes on a :

$x \in E$	$x \in F$	$x \in E \cup F$	$x \in E \cap F$	$x \in E \setminus F$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$

Définition - Complémentaire d'un ensemble (dans un ensemble plus gros)
Lorsque $F \subset E$, l'ensemble $E \setminus F$ est appelé *complémentaire* de F dans E et noté $\complement_E F$.
On ne peut parler de complémentaire de l'ensemble F que relativement à un ensemble "contenant" ce dernier. Toutefois, en l'absence d'ambiguïté sur E, on peut noter $\complement F$ ou F^c ou $\overline{F}$ (cette dernière notation ayant cependant différents sens suivant le domaine des mathématiques...)

Attention - Le verbe contenir
Attention également à l'ambiguïté du verbe "contenir", parfois utilisé pour dire que x est élément de E, parfois pour dire que F est une partie de E.

Exercice
Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N} \text{ et } x \geqslant 10\}$. Que représente A ? Ecrire cet ensemble différemment. Ecrire en extension $\complement_{2\mathbb{N}} A$ puis déterminer $\complement_{\mathbb{N}} A$.
Déterminer les sous-ensembles X de $\mathbb{N}$ tels que $A \cup X = \mathbb{N}$.

Correction
A est l'ensemble des nombres paires plus grand que 10. $\complement_{2\mathbb{N}} A = \{0,2,4,6,8\}$.
$\complement_{\mathbb{N}} A = \{0,2,4,6,8\} \cup \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$. On doit prendre des ensembles qui contiennent au moins $\complement_{\mathbb{N}} A$

Exercice
Soit E un ensemble. Que peut-on dire de deux parties A et B de E vérifiant $A \cap B = A \cup B$?

Correction
$A = B$. En effet, nécessairement : $A \cup B \subset A \cap B$...

Exercice
On définit la différence symétrique de deux ensembles E et F par

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

Ecrire $E \Delta F$ à l'aide de $E \cup F$ et $E \cap F$.

Correction
$E \Delta F = (E \cup F) \setminus (E \cap F)$

Pour aller plus loin - Probabilité
Nous reprenons ces notions lors du cours de probabilité. Il y aura quelques modifications de vocabulaire

Proposition - Quelques règles de calcul
E, F et G désignent trois ensembles quelconques.

$$E \cup F = F \cup E \quad \text{(commutativité de la réunion)}$$
$$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G \quad \text{(associativité de la réunion)}$$
$$\emptyset \cup E = E \cup \emptyset = E \quad \text{(l'ensemble vide est neutre pour la réunion)}$$
$$E \cap F = F \cap E \quad \text{(commutativité de l'intersection)}$$
$$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G \quad \text{(associativité de l'intersection)}$$
$$\emptyset \cap E = E \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{(l'ensemble vide est absorbant pour l'intersection)}$$
$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G) \quad \text{(distributivité de l'intersection par rapport à la réunion)}$$
$$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G) \quad \text{(distributivité de la réunion par rapport à l'intersection)}$$

Pour A et B deux parties de E :

$$A \cap E = A$$
$$A \cup E = E$$
$$\complement_E(\complement_E A) = A$$
$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$$
$$\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$$

Les deux dernières formules sont connues sous le nom de *lois de Morgan.*

Pour la démonstration, on lie ces résultats aux affirmations correspondantes.
On peut aussi faire une table exhaustive de vérité

Démonstration
$x \in \complement(A \cap B) \iff x \notin A \cap B \iff \text{Non}(x \in A \cap B)$
$\iff \text{Non}(x \in A \text{ et } x \in B) \iff \text{Non}(x \in A) \text{ ou Non} x \in B$
$\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \iff x \in \complement(A) \text{ ou } x \in \complement(B) \iff x \in \complement(A) \cup \complement(B)$ □

3. Vocabulaire sur les assertions

3.1. Définitions

Définition - Assertion (proposition) et prédicat
Dans ce paragraphe une *proposition*, ou *assertion* est un énoncé qui peut prendre deux valeurs logiques : V (vrai) ou F (faux).
Si cette assertion dépend d'une variable x on parle alors de *prédicat*.

Exemple - Propositions
« tout entier est pair » est une assertion de valeur logique F ;
« tout réel est un complexe » est une assertion de valeur logique V ;
« 4 est pair » est une assertion de valeur logique V ;
« x est un multiple de 4' » est un prédicat dont la valeur logique dépend de la valeur de x.
Comme on peut le voir dans les parties suivantes, à partir de deux assertions A et B, on en définit d'autres dont la valeur logique est donnée par une *table de vérité.*

Exercice
Que pensez-vous de $\mathscr{P}_n$ dans l'énoncé formel suivant ?

Notons, $\forall\ n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}_n$: « $\exists\ k \in E$ tel que $a_n = k$ »

Correction
Il s'agit d'une famille (suite) de prédicats, il y a donc $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1 \ldots \mathscr{P}_{1224} \ldots$.
Peut-être que certains sont vraies et d'autres sont faux...

Pour aller plus loin - Logique floue (1)
Formalisée en 1965, la logique floue élargie ce point de vue : on associe un nombre entre 0 et 1 pour mesurer la véracité de chaque proposition. Une proposition de valeur 0 est fausse. Une proposition de valeur $\frac{1}{2}$ est à moitié fausse. L'arithmétique qui en découle est comparable à celle des probabilités d'événements.
Cela s'appuie sur les ensembles floues avec des degré d'appartenance entre le $\in$ et le $\notin$.
On l'utilise en automatique ou en médecine...

3.2. Négation

Définition - Négation d'une assertion
Considérons une assertion A.
On appelle négation de A l'assertion qui dit le contraire de A, c'est à dire qui est vraie exactement lorsque A est fausse, on la note "non$A$" (ou $\neg A$ en logique).
La *table de vérité* de non$A$:

A	non A
V	F
F	V

Exercice
La négation de « L'hiver dernier il a plu tous les jours à Toulouse » est :
La négation de « Chaque hiver, il neige au moins un jour en Aveyron » est :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
La négation de « $0 \in I$ » est
La négation de « $\forall x \in I,\ x > 0$ » est
La négation de « $\exists x \in I \,|\, x \geqslant 0$ » est

Correction
La négation de « L'hiver dernier il a plu tous les jours à Toulouse » est « il n'a pas plu (au moins) un jour de l'hiver dernier à Toulouse » :
La négation de « Chaque hiver, il neige au moins un jour en Aveyron » est « il y a (eu) des hivers sans neige en Aveyron ».
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
La négation de « $0 \in I$ » est : « $0 \notin I$ »
La négation de « $\forall x \in I,\ x > 0$ » est « $\exists\ x \in I,\ x \leqslant 0$ »
La négation de « $\exists x \in I \,|\, x \geqslant 0$ » est « $\forall\ x \in I, x < 0$ »

D'une manière plus générale il faut savoir nier une proposition écrite avec des quantificateurs :
Exercice
P désignant une propriété dépendant de x ou de x, y suivant les cas, écrire la négation des assertions suivantes :

1. $\forall x \in E, P(x)$;
2. $\exists x \in E \,|\, P(x)$;
3. $\forall x \in E, \exists y \in E \,|\, P(x, y)$;
4. $\exists x \in E \,|\, \forall y \in E,\ P(x, y)$;
5. $\exists r \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant r$ et $s \leqslant r$.

Correction

1. $\exists\ x \in E, \neg P(x)$;
2. $\forall\ x \in E \,|\, \neg P(x)$;
3. $\exists\ x \in E, \forall\ y \in E \,|\, \neg P(x, y)$;
4. $\forall\ x \in E \,|\, \exists\ y \in E, \neg P(x, y)$;
5. $\forall\ r \in \mathbb{R}, \forall\ s \in \mathbb{R} \,|\, \exists\ x \in \mathbb{R}, x > r$ ou $s > r$.

L'exercice suivant permet de revoir également la table de vérité d'une conjonction (« et ») ou disjonction (« ou ») d'assertions.
Exercice
Compléter le tableau suivant :

A	B	A et B	A ou B	non (A et B)	non (A ou B)	non A	non B	
V	V	V	V					
V	F	F	V					
F	V	F	V					
F	F	F	F					

On a laissé une colonne pour des « tests ». Quelle relation remarquez-vous ?

Correction

A	B	A et B	A ou B	non (A et B)	non (A ou B)	non A	non B	non A et non B	non A ou non B
V	V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V

On démontre les lois de Morgan :
— non(A et B)$\Leftrightarrow$ (non A) ou (non B)
— non(A ou B)$\Leftrightarrow$ (non A) et (non B)

3.3. Implications et équivalence d'assertions

Heuristique - Comment exploiter une implication
On exploite une implication du type $A \Rightarrow B$, en règle générale lorsqu'on veut dire :
— A chaque fois que A est vraie, B est vraie. (c'est le vrai $\Longrightarrow$) ;
— et, dans ce cas A est vraie ;
alors, on peut conclure que B est nécessairement vraie.
1. Première conclusion : Il faut différencier $A \Longrightarrow B$ de $[A \Longrightarrow B$ et $A]$. Si vous souhaitez exprimer ce deuxième fait, vous aurez le droit (provisoirement) d'écrire : $A \overset{\&}{\Rightarrow} B$.
2. Deuxième conclusion : Si sA est faux alors on peut tout avoir pour B. Il est donc possible d'avoir A faux et B vrai lorsque $A \Rightarrow B$. En revanche, la seule impossibilité lorsque $A \Rightarrow B$ et d'avoir : A vrai et B faux.

Définition - Implication d'assertions
Considérons deux assertions A et B.
Si, lorsque l'assertion A est vraie, alors, nécessairement, l'assertion B l'est également, on dit que A implique B et l'on écrit $A \Rightarrow B$
(ce qui se lit donc "A implique B" ou "si A alors B").
Plus précisément, la table de vérité de $A \Rightarrow B$ est donnée par :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Pour aller plus loin - Logique floue (2)

A la place de V et F, on peut respectivement écrire 1 *et* 0.

Dans ce cas si p_i est une proposition et $v(p_i)$ sa valeur ($v(p_i) = 0$, si p_i est fausse...).

On a donc $v(p_1 \cap p_2) = v(p_1) \times v(p_2)$, $v(non(p_1)) = 1 - v(p_1)$ et $v(p_1 \cup p_2) = v(p_1) + v(p_2) - v(p_1)v(p_2)$.

Cet arithmétique se transpose aisément en logique floue.

Remarque - Et si A est fausse

On remarquera qu'en logique, dés que A est fausse, $A \Rightarrow B$ est évaluée vraie, en bref, vous pouvez construire sans problème une démonstration juste avec une hypothèse fausse, mais finalement c'est sans intérêt parce que vous n'avez aucun résultat à énoncer à la fin...c'est la raison pour laquelle usuellement "prouver $A \Rightarrow B$" sous entend "prouver A vraie $\Rightarrow B$ vraie".

Et donc si $E = \emptyset$, tout énoncé "$\forall x \in E, P(x)$" (ou "$x \in E \Rightarrow P(x)$") a la valeur logique V ...

Exercice

Quelle est l'assertion qui a même table de vérité que « non$(A \Rightarrow B)$' » ?

Correction

Il s'agit de « A et non(B) » (il suffit de faire une table de vérité)

Avec deux implications, on a exactement une équivalence :

Définition - Equivalence d'assertions

Considérons deux assertions A et B.

On dit que A et B sont équivalentes si elles signifient la même chose, mais dite différemment, c'est à dire si, simultanément, A implique B et B implique A;

on note alors $A \Leftrightarrow B$.

Plus précisément, la table de vérité de $A \Leftrightarrow B$ est donnée par :

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple - Deux assertions équivalentes

On a par exemple pour x réel : $(x > 0) \Leftrightarrow (-x < 0)$.

Exercice

Comparer la table d'équivalence de $A \Leftrightarrow B$ avec celle de $[(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)]$

Correction

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$[A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A]$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Attention - A démontrer?

Certaines équivalences correspondent en fait à la définition d'un objet mathématique, d'autres en revanche nécessitent une démonstration.

Attention - Ne pas abuser de $A \Longleftrightarrow B$

Les étudiants écrivent TROP souvent $A \Longleftrightarrow B$, en faisant un calcul dans leur tête (ou une démonstration) qui permet de passer de A à B, SANS vérifier si l'on passe aussi de B à A.

Il est important de ne pas faire cette erreur, surtout si l'on demande qu'une implication.... Il ne faut pas en faire trop, si c'est faux!

4. Principales méthodes de démonstration

4.1. Démonstration d'une implication

Démonstration directe

Considérons deux assertions A et B. On veut démontrer que $A \Rightarrow B$.

Savoir faire - $A \Rightarrow B$. Raisonnement direct

On suppose A vraie, par une succession d'implications connues (calculs, résultats de théorèmes...), on prouve qu'alors B est vraie.

Attention - Abus

Il existe un abus courant de la notation $\Rightarrow$ chez les étudiants (mais aussi les professeurs).

Comme réflexe de protection face à ces abus, il est conseillé de lire $A \Rightarrow B$ à voix haute en disant *« si A est vraie alors B est vraie »* plutôt que *« A implique B »*. Cela permet d'insister sur la prémisse.

Exercice

Montrer que si (x, y) est élément de $]0,2[\times]-2,0[$ alors $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 1$

Correction

$$\left.\begin{array}{l} x \in]0,2[\Longrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \\ y \in]-2,0[\Longrightarrow \frac{1}{y} < \frac{-1}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} > \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = 1$$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x + \frac{3}{2}| - \frac{1}{2}$. Montrer que

$$x \geqslant -1 \Rightarrow f(x) \geqslant 0$$

Correction

Si $x \geqslant -1$, alors $x + \frac{3}{2} \geqslant \frac{1}{2} \geqslant 0$, donc $f(x) = |x + \frac{3}{2}| - \frac{1}{2} = x + \frac{3}{2} f(x) - \frac{1}{2} \geqslant 0$

On peut-être amené à faire une disjonction de cas :

Exercice

Compléter l'énoncé suivant pour que la démonstration nécessite l'étude de deux cas séparés.

Soit f la fonction définie par ...

Montrer que $x \geqslant -1 \Rightarrow f(x) \geqslant 0$.

Correction

On peut par exemple prendre $f(x) = |x + \frac{3}{2}| + |x - 1| - \frac{1}{2}$.

Dans ce cas,

— si $x \in [-1, 1]$, $x - 1 < 0$ et $x + \frac{3}{2} > 0$, donc $f(x) = (x + \frac{3}{2}) + (1 - x) - \frac{1}{2} = 2 \geqslant 0$

— si $x \geqslant 1$, $x - 1 > 0$ et $x + \frac{3}{2} > 0$, donc $f(x) = (x + \frac{3}{2}) + (x - 1) - \frac{1}{2} = 2x \geqslant 0$, car $x > 0$

Le chemin de la démonstration

Heuristique - Démontrer que ...

Lorsqu'on cherche à démontrer un résultat, il y a fondamentalement deux attentes :

1. Trouver la (une) démonstration, satisfaisante i.e. qui donne la certitude du fait
2. Ecrire la démonstration, de sorte que toute personne qui lise la démonstration soit également persuadé du fait

Avec le temps du passage de 1 à 2, il faut donc trois temps dans la recherche d'une démonstration.

Attention - Premier piège

Le temps 1 est le temps de l'analyse.
Le temps 2 est le temps de la synthèse.
Ce sont deux choses très différentes. Lorsque vous lisez une démonstration d'un théorème faite par un professeur, un corrigé dans un livre… vous ne voyez que le second temps, celui de la synthèse. Après la lecture, vous pouvez vous dire : « et oui, je vois que c'est vrai », mais vous n'avez pas appris *comment on trouve* la démonstration!!!
La seule solution est de chercher, chercher, chercher… et de ne pas se précipiter sur la (une) solution.
De même, si pour vous écrire une démonstration de cours lors d'une colle est uniquement un exercice de mémoire, alors c'est que vous n'avez pas compris le premier point, ni le point 1 → 2 de la démonstration du fait considéré. *Pouvez-vous donner un exemple d'une telle situation rencontrée?*

Analyse - La métaphore du petit poucet

Faire une démonstration, c'est partir d'un point A (les hypothèses) pour arriver à un point B (la conclusion).
Il s'agit donc de **trouver un chemin**, sans se perdre en route…

- On peut avancer discrètement, les yeux fermés
  ou bien laisser des traces afin de pouvoir revenir (classique trace du petit poucet)
- On peut tourner autour du point de départ (on parle de mouvement brownien)
  ou bien fixer son cap et se diriger en direction du point B (même s'il peut y avoir quelques obstacles en chemin)
  (mettre un phare, prendre une boussole qui indique une direction)
  voire placer quelqu'un d'autre en B, le laisser venir vers nous et nous vers lui et chercher à faire la jonction (s'appeler, mettre un phare)
- On peut se précipiter sur son GPS
  ou bien chercher à reconnaître là où l'on se trouve, voir si on ne voit pas une route déjà connue (courage, familiarité avec le chemin) le monstre
- Prendre du recul, de la hauteur… prendre le temps de voir de plus haut (bottes de 7 lieux)

Pour aller plus loin - f *surjective, injective*

On verra plus loin les définitions. A ce stade, il suffit de savoir que par définition f est surjective de E sur F si $\forall\, y \in F, \exists\, x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Et par définition f est injective de E (sur F) si $\forall\, x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Exemple - Exercice « de base »

On suppose que $f : E \to E$ est surjective, montrer que $f^2 (= f \circ f)$ est surjective.
Si l'on n'écrit pas ce que l'on veut obtenir i.e. le point B : « f^2 est surjective », on ne peut s'en sortir uniquement en dérivant du point A : « f est surjective ».
Pour préparer la démonstration, il faut donc laisser des espaces et compléter au fur et à mesure.
Le temps joue un rôle important, or il n'y parait plus lorsque la démonstration est écrite. Pour le voir à l'oeuvre, nous allons présenter la démonstration comme succession de photos prises de son écriture.

1er
2eme
3eme — Soit $y \in E$
4eme — f est surjective donc $\forall\, b \in E, \exists\, a \in E$ tel que $b = f(a)$
5eme — ainsi $\exists\, x_1$ tel que $y = f(x_1)$
6eme — et $\exists\, x_2$ tel que $x_1 = f(x_2)$
7eme — donc $\exists\, x (= x_2)$ tel que $f^2(x) = f(x_1) = y$
2eme — $\forall\, y \in E, \exists\, x \in E$ tel que $y = f^2(x)$
1er — donc f^2 est surjective

Cela s'écrit ensuite :
Soit $y \in E$
f est surjective donc $\forall\, b \in E, \exists\, a \in E$ tel que $b = f(a)$.
ainsi $\exists\, x_1$ tel que $y = f(x_1)$
et $\exists\, x_2$ tel que $x_1 = f(x_2)$
donc $\exists\, x (= x_2)$ tel que $f^2(x) = f(x_1) = y$
Donc : $\forall\, y \in E, \exists\, x \in E$ tel que $y = f^2(x)$ et finalement : f^2 est surjective

Exercice
Soit E un ensemble et $f : E \to E$, une application sur E.
On suppose que $f^3 = f$. Montrer que si f est injective alors f est surjective. Et réciproquement.

Correction

1er
2eme — $\forall\, y \in E, \exists\, x \in E$ tel que $y = f(x)$
3eme — Soit $y \in E$
4eme — $f^2(x) = f(y)$ et $f(x) = y$ car f injective
5eme — Soit $x = f(y)$. Alors $f^2(x) = f^3(y)$ et puisque $f^3 = f$
1er — donc f^2 est surjective

Ce qui s'écrit :
Soit $y \in E$.
Prenons $x = f(y)$, alors $f^2(x) = f^3(y) = f(y)$ car $f^3 = f$.
Puis comme f est injective : $f(x) = y$.
Donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Par conséquent : $\forall\, y \in E, \exists\, x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc f surjective.
De même, réciproquement

1er
2eme — $\forall\, x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
3eme — Soit $x_1, x_2 \in E$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$
4eme — $\exists\, a_1, a_2 \in E$ tels que $x_1 = f(a_1)$ et $x_2 = f(a_2)$ car f surjective
5eme — ainsi $f^2(a_1) = f(x_1) = f(x_2) = f^2(a_2)$, puis $f^3(a_1) = f^3(a_2)$
6eme — or $f^3 = f$, donc $x_1 = f(a_1) = f(a_2) = x_2$
3eme — donc $x_1 = x_2$
1er — donc f est injective

Ce qui s'écrit :
Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
Comme f est surjective, il existe $a_1, a_2 \in E$ tels que $x_1 = f(a_1)$ et $x_2 = f(a_2)$.
Et donc en composant par f : $f^2(a_1) = f(x_1) = f(x_2) = f^2(a_2)$, puis $f^3(a_1) = f^3(a_2)$
Mais comme $f^3 = f$, alors $f(a_1) = f(a_2)$, soit $x_1 = x_2$.
On a donc démontré : $\forall\, x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$.
Donc f est injective.

Contraposée

Proposition - Contraposée
(non $B \Rightarrow$ non A) s'appelle la contraposée de ($A \Rightarrow B$).
Il est équivalent de prouver l'une ou l'autre de ces deux implications

Démonstration
On complète la table de vérité :

A	B	non A	non B	$A \Rightarrow B$	non $B \Rightarrow$ non A
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

□

Savoir faire - $A \Rightarrow B$. Raisonnement par contraposée
On suppose donc B fausse et on prouve qu'alors A est fausse, comme précédemment

Le résultat de l'exercice suivant sera fréquemment exploité en analyse :
Exercice
On considère un nombre réel $x \geqslant 0$. Montrer que

$$(\forall \epsilon > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \epsilon) \Rightarrow x = 0.$$

Correction
On fait donc un raisonnement par contraposée (c'est presqu'un raisonnement par l'absurde ici).
Si $x > 0$, alors avec $\epsilon = \frac{x}{2}$, on a la preuve de : $\exists\, \epsilon > 0$ tel que $x > \epsilon$.
Donc l'assertion négative de notre hypothèse A est alors vérifiée.
Ainsi non$(B)\Rightarrow$ non(A) et par contraposée : $A \Rightarrow B$.

4.2. Démonstration d'une équivalence

Deux possibilités pour prouver l'équivalence $A \Leftrightarrow B$:

Savoir faire - $A \Leftrightarrow B$. On procède en deux temps
1. On montre $A \Rightarrow B$
2. On montre $B \Rightarrow A$

Exercice
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$(f \text{ est une fonction paire et impaire }) \Leftrightarrow (f \text{ est la fonction nulle }).$$

Correction
En deux temps.
— Supposons que f est nulle.
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 0 = f(x)$ donc f est paire et $f(-x) = 0 = -f(x)$ donc f est impaire. Bilan : f est nulle $\Longrightarrow$ f est une fonction paire et impaire.
— Réciproquement, si f est une fonction paire et impaire,
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$ et $f(x) = -f(-x)$, donc $f(x) = -f(x)$ donc $2f(x) = 0$ donc $f(x) = 0$.
Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $f = 0$ (f est identiquement la fonction nulle).
Bilan : f est une fonction paire et impaire $\Longrightarrow$ f est nulle.
Par double implication : f est nulle $\Longleftrightarrow$ f est une fonction paire et impaire.

Savoir faire - $A \Leftrightarrow B$. On procède par équivalences connues successives.
Cette méthode est surtout utilisée pour des résolutions calculatoires.
Attention de ne pas en abuser : *il faut à chaque étape être sûr que l'on peut « remonter » les équivalences.*

Exercice
Montrer que

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x + 4y = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow (x, y) = (1, 0)$$

Correction
Les règles d'équivalence sur les systèmes sont strictes, il faut bien les respecter ! En particulier la substitution mal employée ne conserve pas les équivalences de système. Nous reverrons cela plus tard dans l'année.

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x+4y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x & +y & = 2 \\ -5x & & = -5 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x & = & 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{5} L_2 \end{array}$$

Insistons :

Truc & Astuce pour le calcul - Ne pas abuser de $\Leftrightarrow$
Il faut éviter le plus possible d'écrire $\Leftrightarrow$ comme un tic de langage.
1. Si il n'est pas utile, on ne le note pas !
2. Si on choisit de le noter, on vérifie bien à chaque étape le sens $\Leftarrow$ tout particulièrement.

4.3. Raisonnement par l'absurde

Pour aller plus loin - Raisonnement par l'absurde, à accepter ?
Certaine axiomatique de mathématique refuse le raisonnement par l'absurde, en effet la notion d'existence qui en découle est quelque peut frustrante.
On sait que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, c'est un nombre algébrique de degré 2 (quadratique).
Notons $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Alors il existe un nombre transcendant à la puissance $\sqrt{2}$ (transcendant) qui est algébrique (contraire de transcendant).
En effet, si a est algébrique, alors $\sqrt{2}$, à la puissance $\sqrt{2}$ est algébrique.
Si tel n'est pas le cas alors a est transcendant et $a^{\sqrt{2}}$ $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. Donc c'est a qui résout le problème.
Et pourtant…
On ne sait toujours pas aujourd'hui lequel des deux

Savoir faire - Raisonnement par l'absurde
Pour démontrer un certain énoncé, on fait l'hypothèse qu'il est faux et on aboutit à une contradiction.

Exercice
Montrer que le réel $\sqrt{2}$ est irrationnel (i.e. n'est pas rationnel)

Correction
Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, fraction irréductible, alors $2q^2 = p^2$, donc 2 divise p^2, puis p qui est donc pair.
Puis $p = 2p'$ et donc $2q^2 = 4p'^2$, donc $q^2 = 2p'^2$, puis 2 divise q^2, puis q qui est donc pair.
Et ainsi la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible…

Remarque - Différence avec la contraposée
Pour la contraposée, on suppose non$B$ et on aboutit à non$A$.
Pour l'absurde, on suppose non$B$ et A ensemble et on montre qu'il y a une contradiction.
Dans ce second cas, on exploite plus d'hypothèses !

4.4. Conditions nécessaire, suffisante

Il s'agit simplement *d'un peu de bon sens* sur la signification des mots « nécessaire » et « suffisant ».

Exemple - A : « x est le carré d'un entier » et B : « $x \geqslant 0$ »
Considérons un réel x et posons

A : x est le carré d'un entier
B : $x \geqslant 0$

Qu'est-ce qui est nécessaire, qu'est-ce qui est suffisant (ou ne l'est pas) ?

Définition - Condition nécessaire. Condition suffisante
Plus généralement $A \Rightarrow B$ peut se dire :
— B est une condition nécessaire (**CN**) pour avoir A (puisque si on A, nécessairement on a B)
— A est une condition suffisante (**CS**) pour avoir B (puisqu'il suffit d'avoir A pour avoir B
Rechercher une condition nécessaire et suffisante (**CNS**) pour avoir A revient donc à chercher B tel que $A \Leftrightarrow B$.

Savoir faire - Analyse-Synthèse
Certaines démonstrations, difficiles à gérer par équivalences, ou lorsque le résultat n'est pas donné, se font en deux phases :
1. phase d' "analyse" : on obtient une condition nécessaire (par implications successives par exemple) pour qu'une première hypothèse soit vérifiée
2. phase de "synthèse", ou phase de vérification : la condition précédemment obtenue est-elle suffisante ?

Exercice
Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
On procédera de la manière suivante :
Première étape (analyse) : supposons qu'il existe deux fonctions f et g telles que …, alors $f =$, $g =$
Deuxième étape (synthèse) : on vérifie que les solutions trouvées à la première étape conviennent

Correction
ANALYSE : Si $h = f + g$ avec f paire et g impaire,

alors $\forall\, x\in\mathbb{R},\ h(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)$ et $h(x)=f(x)+g(x)$.

En additionnant et retranchant : $f(x)=\frac{1}{2}\big(h(x)+h(-x)\big)$ et $g(x)=\frac{1}{2}\big(h(x)-h(-x)\big)$.

L'analyse a abouti à une unique décomposition (sous reserve d'existence...).

SYNTHESE : Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ et associons lui :

$f:x\mapsto\frac{1}{2}\big(h(x)+h(-x)\big)$ et $g:x\mapsto\frac{1}{2}\big(h(x)-h(-x)\big)$

alors par construction $h=f+g$,

mais aussi $f(-x)=\frac{1}{2}\big(h(-x)+h(x)\big)=\frac{1}{2}\big(h(x)+h(-x)\big)=f(x)$, donc f est paire

également $g(-x)=\frac{1}{2}\big(h(-x)-h(x)\big)=-\frac{1}{2}\big(h(x)-h(-x)\big)=g(x)$, donc g est impaire

Exercice

Soit A,B,C et D quatre points du plan tel que $AC=BD$ et (AB) non parallèle à (CD).
Alors il existe une unique rotation du plan r tel que $r(A)=B$ et $r(C)=D$.
Donner ses caractérisatiques

Correction

Nous allons raisonner par analyse-synthèse.

ANALYSE. Supposons que $r(A)=B$ et $r(C)=D$.

Notons Ω le centre de r et θ son angle de rotation.

Comme $r(A)=B$, on a donc $|\Omega A|=|\Omega B|$ et $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})=\theta$.

Ainsi, Ω est sur la médiatrice de $[AB]$. De même Ω est sur la médiatrice de $[CD]$.

Ces deux médiatrices se coupent en un seul point, ssi elles ne sont pas parallèles.

Si ces médiatrices sont parallèles, alors (AB) et (CD) sont parallèles,

la contraposée donne donc :

si (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, alors les deux médiatrices se coupent en un seul point.

Ainsi Ω est obtenu de manière unique et $\theta:=(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})$, bien défini.

SYNTHESE. Considérons la rotation, centrée Ω concours des médiatrices et d'angle $\theta:=(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})$.

On a par définition $r(A)=B$.

Comme $\Omega C=\Omega D$, $\Omega A=\Omega B$ et $AC=BD$, les triangles ΩAC et ΩBD sont semblables.

Donc $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega C})=(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega D})$.

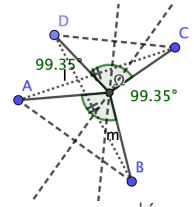
Ainsi, avec la relation de Chasles (des angles) :

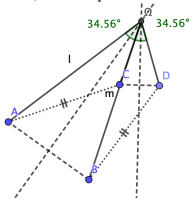
$$\theta=(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})=(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega C})+(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B})=(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega D})+(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B})=(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega D})$$

Donc $r(C)=D$. BILAN : Il existe une unique rotation tel que $r(A)=B$ et $r(C)=D$, c'est la rotation dont le centre est Ω, le point de concours des médiatrices de $[AB]$ et de $[CD]$ et d'angle $\theta=(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B})$.

On appliquera ce résultat dans le cours sur les nombres complexes.

Représentation - Deux configurations de l'exercice





4.5. Exploiter un contre-exemple dans une démonstration

Savoir faire - Utilisation d'un contre-exemple

Lorsque l'on veut prouver qu'une implication est fausse, on cherche un exemple vérifiant l'hypothèse mais pas la conclusion, ce que l'on appelle un *contre-exemple*.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x+\frac{3}{2}|-\frac{1}{2}$. Montrer que $(x\geqslant -1)$ et $(f(x)\geqslant 0)$ ne sont pas équivalents.

Correction

$-10\leqslant -1$ et $f(-10)=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=3\geqslant 0$

4.6. Démonstration par récurrence

Proposition - Principe admis (axiome)

Soit $P(n)$ (parfois notée $\mathscr{P}_n$) une propriété portant sur l'entier n.

Si on a

$$\begin{cases} P(0) \text{ vraie} \\ \forall n\in\mathbb{N}, (P(n) \text{ vraie } \Rightarrow P(n+1) \text{ vraie}) \end{cases}$$

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

Savoir faire - Rédaction d'un raisonnement par récurrence

- Pour $n=0$, $P(0)$ est vérifiée, avec vérification effective! (souvent deux simples calculs)
- Supposons la propriété vérifiée pour **un certain** $n\geqslant 0$ (et surtout pas "pour tout", parce que là, ce n'est plus la peine de faire une démonstration!).

  $\Rightarrow$ Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Remarque - Démarrer à un autre nombre

On peut aussi démarrer à une valeur de n autre que 0.

Exercice

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $n<2^n$.

Correction

Remarquons d'abord que pour tout entier n, $2^n\geqslant 1$ Notons pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$: « $n<2^n$ ».

— $0<1=2^0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}_n$ est vérifiée.
Donc $n<2^n$ et donc $n+1<2^n+1\leqslant 2^n+2^n=2^{n+1}$
Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est alors vraie.

Le résultat est donc bien démontré par récurrence et on peut affirmer : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n<2^n$.

Exercice

Y a-t-il des erreurs dans les raisonnements suivants ? Où sont-elles ?

1. On a : $10^{n+1}+1=10\times 10^n+1=(9+1)\times 10^n+1=9\times 10^n+10^n+1$
   Donc, si 10^n+1 est divisible par 9, il en est de même de $10^{n+1}+1$, ce qui prouve que pour tout entier naturel n, 10^n+1 est divisible par 9.
2. Prouvons que tout ensemble fini a tous ses éléments égaux :
   Si dans tout ensemble E_n à n éléments, tous les éléments sont égaux, alors, soit E_{n+1} un ensemble à $n+1$ éléments :

   $$E_{n+1}=\{x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1}\}.$$

   Avec l'ensemble de n éléments $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, on a, par hypothèse de récurrence : $x_1=x_2=\cdots=x_n$.
   Avec l'ensemble de n éléments $\{x_2,x_3,\dots,x_{n+1}\}$, on a, par hypothèse de récurrence : $x_2=x_3=\cdots=x_{n+1}$.
   Donc $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$.
   Comme la propriété est vraie pour $n=1$ (cas d'un singleton), il en résulte que tout ensemble de n éléments a tous ses éléments égaux.

Correction

Dans le premier raisonnement, on montre bien le moteur de la récurrence : $\mathscr{P}(n)\Rightarrow\mathscr{P}(n+1)$.
Mais l'initialisation n'est pas démontrée ; et pour cause : elle est fausse.
Le résultat (pour tout $n\in\mathbb{N}$) n'est donc pas démontré (et d'ailleurs il est toujours faux).
Dans le second raisonnement, c'est plus subtile. Dans le passage $\mathscr{P}(n)\Rightarrow\mathscr{P}(n+1)$,
il faut nécessairement que E_{n+1} possède au moins 3 éléments, et donc $n\geqslant 2$.
Ainsi, l'initiation ne sert à rien ici, il faut commencer par démontrer $\mathscr{P}(2)$.

Savoir faire - Récurrence à plusieurs pas (ou plusieurs termes)

Suivant la façon dont est énoncée la propriété de récurrence $P(n)$ il peut être nécessaire

- d'initialiser la récurrence avec plusieurs (k) valeurs de n
- de supposer $P(n),\dots,P(n+k-1)$ (il y en a aussi k) vraies pour un certain $n\geqslant 0$
- de prouver que ces k propriétés exactes entraînent $P(n+k)$ vraie

Histoire - Citation de Henri Poincaré, La science et l'hypothèse, 1902

« Le caractère du raisonnement par récurrence est qu'il contient, condensés, pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes.
Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade.
Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques.
Le théorème est vrai du nombre 1.
Or si il est vrai de 1, il est vrai de 2.
Donc il est vrai de 2.
Or si il est vrai de 2, il est vrai de 3.
Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite... »

Savoir faire - Récurrence forte

- Pour $n=0$, $P(0)$ est vérifiée (avec vérification effective!)
- Supposons la propriété vérifiée **jusqu'à** un certain $n \geqslant 0$ (i.e $P(0), P(1), \dots, P(n)$ vraies)
- Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On parle parfois alors de « récurrence à plusieurs pas » ou de « récurrence forte », par opposition à la récurrence du théorème dite « récurrence simple (ou faible) »).

Exercice

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{2}{5}, u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^n+3^n}{5}$.

Correction

Nous verrons par la suite d'autre méthode que la récurrence.
En attendant, nous devons employer ici une récurrence à deux pas.
Notons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$: « $u_n = \frac{2^n+3^n}{5}$ ».

- $\frac{2^0+3^0}{5} = \frac{2}{5} = u_0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- $\frac{2^1+3^1}{5} = \frac{5}{5} = u_1$, donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vérifiées.
  Donc $u_{n+2} = 5\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{5} - 6\frac{2^n+3^n}{5} = \frac{2^n(10-6)+3^n(15-6)}{5} = \frac{2^{n+2}+3^{n+2}}{5}$ Donc $\mathscr{P}_{n+2}$ est alors vraie.

Le résultat est donc bien démontré par récurrence et on peut affirmer : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^n+3^n}{5}$.

Exercice

Montrer que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Correction

On fait une récurrence forte.
Notons pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}_n$: « n se décompose en produit de nombres premiers ».

- 2 est un nombre premier donc $\mathscr{P}_2$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ supposons que pour tout entier $k \leqslant n$, $\mathscr{P}_k$ est vérifiée.
  Si $n+1$ est un nombre premier, alors il est le produit de nombres premiers.
  Si $n+1$ n'est pas premiers, il existe $a, b \geqslant n$ tel que $n+1 = ab$.
  Or $\mathscr{P}_a$ et $\mathscr{P}_b$ sont vraies, donc on peut décomposer ces deux nombres,
  et par produit $n+1$ est également le produit de nombres premiers.
  Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est alors vraie.

Le résultat est donc bien démontré par récurrence (forte) et on peut affirmer que tout entier $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Exercice

Montrer qu'un changement d'hypothèse de récurrence ramène une récurrence à plusieurs pas ou une récurrence forte à une récurrence faible.

Correction

Dans le cas d'une récurrence à h pas, on peut considérer $\mathscr{Q}_n$: « $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ et … $\mathscr{P}_{n+h}$ ».
Dans le cas d'une récurrence forte, on peut considérer $\mathscr{Q}_n$: « $\forall\, k \geqslant n\ \mathscr{P}_k$ ».

Exercice

Montrer par récurrence forte que toute suite décroissante d'entiers est stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang).

Correction

On note, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_k$: « si $(u_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ avec $u_0 = k$ et (u_n) décroissante, alors (u_n) est stationnaire. »

- Si $u_0 = 0$, alors nécessairement, il s'agit de la suite stationnaire égal à 0, car $0 = u_0 \geqslant \underbrace{u_n}_{\in\mathbb{N}} \geqslant 0$.
  Donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $h \geqslant k$, $\mathscr{P}_h$ est vraie.
  Soit (u_n) suite d'entiers, décroissante telle que $u_0 = k+1$.
  • Ou bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = k+1$ et donc (u_n) est stationnaire.
  • Ou bien il existe $n_0 \in N$ tel que $u_{n_0} \neq k+1$, par décroissance, $u_{n_0} < k+1$.
  Considérons la suite (extraite) (v_n) telle que $v_n = u_{n+n_0}$.
  Alors (v_n) est une suite d'entiers, décroissante de premier terme $u_{n_0} \leqslant k$.

On applique $\mathscr{P}_{u_{n_0}}$ à (v_n), qui est donc stationnaire à partir du rang N.
Alors (u_n) est stationnaire à partir du rang $N+n_0$. Donc $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

4.7. Démonstration par algorithme

Algorithme

Heuristique - Exploitation d'un algorithme

Un algorithme peut permettre de démontrer, constructivement, l'existence d'un certain objet (ou d'une certaine fonction).
La difficulté est plutôt de démontrer que l'algorithme :

- se termine bien
- réalise bien ce que l'on désire

Définition - Algorithme

Un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver avec certitude (c'est-à-dire sans indétermination ou sans ambiguïté), en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données.

Terminaison de l'algorithme

Pour démontrer que l'algorithme termine (que le nombre d'étapes est fini), on exploite un variant de boucle, en règle général, en suite d'entiers décroissante. Pour des boucles `for`, la terminaison de boucle est en règle générale immédiate.

Savoir faire - Démontrer qu'une boucle se termine

On identifie une expression (variable) qui :

- est entière
- décroît strictement à chaque étape de la boucle

Alors, nécessairement, la boucle se termine.

Exemple - Division euclidienne

On considère le bout de programme suivant :

```
q=0
r=n
while r>=d :
        q=q+1
        r=r-d
```

Ce programme calcul le quotient `q` et le reste `r` de la division euclidienne de `n` par `d`. (A démontrer)
Mais est-ce qu'il termine bien? Oui
On constate que la suite des valeurs prises par la variable `r` est **strictement décroissante** de `n` à un nombre compris entier positif plus petit que `d`.
Si la boucle ne s'arrêtait pas, alors cette suite de valeur serait infini, ce qui est impossible.

Exercice

On considère le bout de programme suivant :

```
c=0
while p>0 :
        if c==0 :
                p=p-2
                c=1
        else :
                p=p+1
                c=0
```

1. Que fait ce programme ?

2. Les variables `p` et `c` sont-elles décroissantes, strictement ?
3. Montrer que la variable `t=2p+3c` est entière, strictement décroissante.
   En déduire la terminaison de l'algorithme.

Correction

1. On commence par faire le tableau pour comprendre, avec les premiers étapes ce qui peut se passer :

temps	p	c
0	p	0
1	p-2	1
2	p-2+1=p-1	0
3	p-3	1
4	p-2	0
5	p-4	1

   Le programme donne donc pour finir `p=0` (condition d'arrêt) et `c=0`, si `p` est pair initialement, et `c=1` sinon.
2. Les variables `p` et `c` ne sont pas décroissantes.
3. Il y a deux évolutions possibles pour `t=2p+3c`, selon la valeur de `c`.
   — si `c=0`, alors `t=2p+3c`→`2(p-2)+3(c+1)=2p+3c-1`
   — si `c=1`, alors `t=2p+3c`→`2(p+1)+3(c-1)=2p+3c-1`
   Donc la variable `t=2p+3c` est entière, strictement décroissante.
   L'algorithme se termine donc bien.

Correction de l'algorithme

Il faut aussi savoir **démontrer** que le programme (avec de nombreuses répétitions de la boucle) réalise se que l'on souhaite.
On utilise alors pour cela des *invariant de boucles.*
Comme son nom l'indique il s'agit d'identifier (créer) une expression-variable qui ne change pas de valeur tout au long du programme.
Puis lorsque le programme se termine, en exploitant cette expression, nous pourrons démontrer que l'on obtient bien le résultat attendu.

Savoir faire - Utilisation d'un invariant de boucle pour démontrer le résultat attendu

Pour démontrer qu'une boucle réalise bien le résultat attendu,

1. on cherche une expression qui reste constante tout au long des calculs de la boucle ;
2. on calcule sa valeur initiale (avant le début de la boucle) ;
3. on en déduit sa valeur finale ;
4. enfin connaissant les valeurs finales des variables du système (testées pour la sortie de boucle), on en déduit la valeur de la variable retournée par le programme.

Exemple - Retour sur la division euclidienne

Reprenons l'algorithme de la division euclidienne par soustraction successive :

```
q=0
r=n
while r>=d :
        q=q+1
        r=r-d
```

— La valeur qui n'évolue pas est `t=dq+r`.
   En effet, on passe à chaque boucle de `t=dq+r`→`d(q+1)+(r-d)=dq+d+r-d=dq+r`
— De plus initialement, `t=d×0+n=n`
— Et pour finir `r` appartient à l'intervalle $[0, d[$.

On a donc trouver le couple `(q,r)` tel que `n=dq+r` avec `r`$\in [0, d[$.
C'est la définition de la division euclidienne. Et le résultat obtenu est bien celui attendu.

Exercice

Montrer que le programme


```
def somme2(n) :
    S=0
    for i in range(1,n+1):
        S=S+i**2
    return(S)
```

calcule bien $\sum_{i=1}^{100} i^2$

Correction

Notons `T=S-`$\sum_{k=1}^{i-1} k^2$.

Alors à chaque étape, on a `T=S-`$\sum_{k=1}^{i-1} k^2$ ⟶`S+i`^{2}`-`$\sum_{k=1}^{i} k^2$`=S-`$\sum_{k=1}^{i-1} k^2$ Nous avons trouvé notre invariant : `T`.

Initialement, `T=0`, à la fin aussi et donc `S=`$\sum_{k=1}^{n} k^2$

Exercice

On cherche à écrire un programme qui calcul $n!$.

1. Ecrire un programme avec une boucle `while`.
2. **Démontrer** que le programme se termine bien.
3. **Démontrer** que le programme effectue bien ce que l'on souhaite.

Correction

1.
```
def factorielle2(n):
    """Calcul de la factorielle de n"""
    f=1
    k=1
    while k<n :
        f,k=f*(k+1),k+1
    return(f)
```

2. Il s'agit de trouver une variable entière qui décroit strictement.
   Ici, c'est clair, il faut prendre `k`.
   Elle commence à `n`, et décroit strictement à chaque étape. Donc à partir d'un certain moment (ici `n` étapes, puisqu'elle diminue de 1 à chaque étape), elle est nulle ; et la boucle s'arrête bien.
3. Notons $I = f*(k!)$.
   A l'instant initial, $k = n$, $f = 1$ et il a pour valeur $I = 1 \times n! = n!$.
   A chaque instant, on a $I = f*(k!) \to (f*k)((k-1)!) = I$. Donc I est invariant.
   Enfin, en fin de course, pour la dernière boucle, $k = 1$, et donc $I = f*1! = n!$. Ce qui implique que $f = n!$.
   Le programme renvoie la valeur de f, donc c'est bien la valeur de $n!$.

Proposition - Plus petit élément d'un ensemble fini

Considérons E un ensemble muni d'une relation d'ordre totale.
Un ensemble A de n éléments de E admet un plus petit élément.

Nous allons faire la démonstration par algorithme

Démonstration

Soit A un ensemble fini, on peut supposer que $A = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$.
Considérons l'algorithme :

```
a=A[1]
   for k in range(n):
      if A[k]<a :
         a=A[k]
   return(a)
```

L'algorithme termine car il s'agit d'une boucle `for`
Il faut montrer la correction en trouvant un invariant de boucle. On va considérer pour le tour `k` la proposition $\mathscr{P}_k$:« $\forall\ i \leqslant k,\ a \leqslant x_i,\ a \in A$ ». Au premier tour, comme $A[1] = x_1 = a$, $\mathscr{P}_1$ est vraie.
Si $\mathscr{P}_k$ est vraie, il en est de même de $\mathscr{P}_{k+1}$, selon que $x_{k+1} < a$ ou $x_{k+1} \geqslant a$.
En bout de course, on a donc $a \leqslant x_i$, pour tout $i \leqslant n$ et $a \in A$.
□

5. Bilan

Synthèse

- ⇝ En mathématiques, les raisonnements se fondent sur une vision ensembliste des objets ou des propositions. Nous faisons un premier passage, *de bon sens*, sur ce qu'est un ensemble et ce que signifie appartenir à un ensemble ou en être une partie ; ce qu'est un intervalle ou un produit cartésien d'ensembles.
- ⇝ Naturellement, apparait fréquemment dans les affirmations mathématiques ensemblistes deux notions : une notion d'universalité *pour tout* et une notion d'exception *il existe*. La formalisation qui est le langage écrit des mathématiques, réserve donc deux symboles pour ces notions : $\forall$ et $\exists$. On les retrouve tout le temps.
- ⇝ Les mathématiques donnent des relations (de vérité ?) entre les assertions. Nous voyons différentes méthodes exploitées dans *l'artisanat de la démonstration* : table de vérité (cas par cas), implication ou équivalence, analyse-synthèse, contraposée, raisonnement par l'absurde, contre-exemple ou récurrences…

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- — Savoir-faire - Montrer que I est un intervalle de $\mathbb{R}$
- — Savoir-faire - Noter les dépendances
- — Savoir-faire - Montrer que $F \subset E$
- — Savoir-faire - Prouver l'égalité de deux ensembles
- — Savoir-faire - $A \Rightarrow B$. Raisonnement direct.
- — Savoir-faire - $A \Rightarrow B$. Raisonnement par contraposée.
- — Savoir-faire - $A \Leftrightarrow B$. On procède en deux temps.
- — Savoir-faire - $A \Leftrightarrow B$. On procède par équivalences connues successives.
- — Truc & Astuce pour le calcul - Ne pas abuser de $\Leftrightarrow$
- — Savoir-faire - Raisonnement par l'absurde
- — Savoir-faire - Analyse-Synthèse
- — Savoir-faire - Utilisation d'un contre-exemple
- — Savoir-faire - Rédaction d'un raisonnement par récurrence
- — Savoir-faire - Récurrence à plusieurs pas (ou plusieurs termes)
- — Savoir-faire - Récurrence forte
- — Savoir-faire - Démontrer qu'une boucle termine
- — Savoir-faire - Utilisation d'un invariant de boucle pour démontrer le résultat attendu

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\forall$ - $\exists$	Pour tout (ou quel que soit) - Il existe	Les affirmations mathématiques exploitent très souvent uniquement ces deux symboles	Attention, on $\forall\, a \exists\, b \Leftrightarrow \exists\, b$
$A \Longrightarrow B \equiv B \Longleftarrow A$	Implication de A vers B	A est suffisante pour B et B est nécessaire à A	Ex : $\exists\, b \forall\, a \Rightarrow$
$A \Longleftrightarrow B$	A et B sont équivalentes	Identique à $A \Rightarrow B \& B \Rightarrow A$	Ne pas en ab

Retour sur les problèmes

48. Quoi dire…
49. Ce n'est probablement pas qu'un langage, mais…
50. Ce n'est pas un problème

Chapitre 10

Relations binaires sur un ensemble

Résumé -

Nous complétons quelques notions essentielles du fondement des mathématiques (formalisé non sans mal à la fin du XIX-ième siècle). Ces fondements se basent sur les ensembles !
Mais il faut agir sur ces ensemble. Nous commençons donc d'abord par voir deux notions dont l'emploi en mathématiques est fréquent (en particulier lorsqu'il s'agit de construire de nouvelles notions). Il s'agit des relations binaires : relation d'ordre et relation d équivalence.
Dans ce chapitre, il y a beaucoup de définitions. A apprendre !! Quelques vidéos :

- — *Science4all - Les mathématiques modernes - https ://www.youtube.com/watch ?v=7fbn99V1f9U*
- — *Maths Adultes - Relations binaires - https ://www.youtube.com/watch ?v=W7cH06qOImM*

Sommaire

1. Problèmes

Problème 48 - Graphe

En option « maths expertes », les élèves étudient les graphes : sommets, arrêtes…. C'est une famille essentielle d'objets en mathématiques et en informatique (nous les y retrouverons en fin d'année). Comment formaliser proprement les graphes ? Comment passer de l'idée bien comprise (de sommets et d'arêtes/flèches) à une représentation mathématique/informatique acceptable ?

Problème 49 - Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité ?

Pour résoudre un exercice, on exploite souvent des équivalences ($\Leftrightarrow$). La bijection de f permet d'écrire : $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$ en prenant x et y dans les bons ensembles.
Si f n'est pas surjective, il suffit de changer l'ensemble de définition de y et la résolution du problème se conserve.
Mais si f n'est pas injective, qu'il y a plusieurs solutions $x_1, x_2, \dots x_n$ à l'équation $f(x) = y$. Que faire ?
Une idée : forcer l'égalité et affirmer que $x_1 = x_2 = \dots x_n$, comme pour l'équation $\tan x = \sqrt{3}$ qui permet d'affirmer $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$….
C'est choquant ! Comment rendre cela propre : en redonnant un sens nouveau à l'égalité $x_1 = x_2 = \dots x_n$. Qu'est-ce qu'une égalité ?

Problème 50 - Relation d'ordre ?

Pour résoudre le problème précédent, nous créons la notion de relation d'équivalence.
Mais plus souvent, lorsque nous prenons deux objets nous ne pouvons pas affirmer qu'ils sont pareils. Souvent l'un est PLUS quelque chose que l'autre.
Comment formaliser cette idée ? Qu'est-ce qu'une relation d'ordre ? Et comment l'exploiter ?

Problème 51 - Plus grand élément

Existe-t-il nécessairement un, un seul, plus grand élément à un ensemble ordonné ?
Par exemple : quel est le plus grand élément de $[0,1[$?

Problème 52 - Codage de graphe (ou relation) à partir d'applications. Et réciproquement…

Après avoir défini les ensembles, on peut ou bien définir les applications et à partir de là les relations (ou graphes), ou bien définir les relations et à partir de là les applications.
Comment faire naturellement ces deux implications ? (Evidemment, pas en même temps…)

2. Graphe

2.1. Formalisation

Heuristique - Images mentales des graphes!

Pour l'heuristique et les images mentales (à ne pas oublier et vraiment à garder en mémoire!!), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

Définition - Graphe non orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset \binom{S}{2}$ de paires d'arêtes.
On appelle graphe non orienté le couple (S, A).

Définition - Graphe orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset S \times S$ de couples d'arêtes.
On appelle graphe orienté le couple (S, A).

Exercice
Donner la définition formalisée d'un graphe complet.

Correction
Un graphe complet est, heuristiquement, dont chaque sommet est relié à tous les autres.
Formellement : $A = S \times S$ (cas orienté) ou $A = \binom{S}{2}$ (cas non orienté).

2.2. Vocabulaire

Définition - Sommets reliés

Soit (S, A) un graphe (orienté ou non).
On dit que deux sommets $s_1, s_2 \in S$ sont reliés si $(s_1, s_2) \in A$ (cas orienté) ou $\{s_1, s_2\} \in A$ (cas non orienté)

Définition - Degré d'un sommet

Soit $s \in S$ un sommet d'un graphe non orienté (S, A) a pour degré $d(s) = \text{card}(A_s)$ où $A_s = \{a \in A \mid s \in a\}$.
Soit $s \in S$ un sommet d'un graphe orienté (S, A) a pour degré sortant $d_+(s) = \text{card}(A_s)$ où $A_s = A \cap (\{s\} \times S)$ et pour degré entrant $d_-(s) = \text{card}(A'_s)$ où $A'_s = A \cap (S \times \{s\})$.

Exercice
Comment définir chemin d'un sommet à un autre ?
Et graphe connexe ?

Correction
On dit que le graphe (S, A) admet un chemin de s à s' $(\in S)$ s'il existe un entier n et une suite $(s_0, s_1, s_2, \dots s_n)$ d'éléments de S tels que $s_0 = s$, $s_n = s'$ et $\forall\, i \in \mathbb{N}_n$, $(s_{i-1}, s_i) \in A$ (cas orienté) ou $\{s_{i-1}, s_i\} \in A$ (cas non orienté).
Un graphe est connexe si pour tout sommets $s, s' \in S$, il existe un chemin de s à s'.

2.3. Applications

On retrouvera très vite les graphes dans le cours sur les relations binaires, plus loin en probabilité et algèbre linéaire (chaine de Markov), ou en informatique… A l'occasion, nous verrons en informatique, un façon supplémentaire et pratique de coder/définir un graphe à l'aide de matrice…

3. Relations binaires

3.1. Construction et représentation

Définition - Relation
Soit E un ensemble.
Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de $E \times E$. Si $(x, y) \in E^2$ on écrit $x\mathscr{R}y$ lorsque $(x, y) \in G$.

On peut représenter une relation par un graphe (diagramme sagittal) : une représentation de $E \times E$ et avec des flèches on indique que x (du premier E) est en relation à y (du second E).

Exemple - Stade Toulousain
Par exemple dans l'ensemble E=Boutique du Stade Toulousain où :

$$E = \{\text{beret rouge, chaussette blanche, maillot rouge, maillot noir, short rouge, cuissart noir}\} = \{B_R, CH_B, M_R, M_N, S_R, C_N\},$$

on définit la relation $\mathscr{R}_1$ par "est de la même couleur que" c'est-à-dire que l'on a

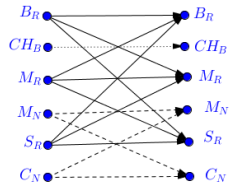
$$G_1 = \{(B_R, M_R), (M_R, B_R), (M_R, S_R), (S_R, M_R), (B_R, S_R), (S_R, B_R), (B_R, B_R), (M_R, M_R), (S_R, S_R), (CH_B, CH_B), (M_N, C_N), (C_N, M_N), (M_N, M_N), (C_N, C_N)\}$$

ou encore $B_R \mathscr{R}_1 M_R$, $M_R \mathscr{R}_1 B_R$, $M_R \mathscr{R}_1 S_R$...

Exercice
On peut définir dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ les relations $\mathscr{R}_1$ "est un multiple de" ou $\mathscr{R}_2$ "est le double de".
Expliciter G_1, G_2 et les diagrammes sagittaux de ces deux relations.

Correction
$G_1 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\}$ et $G_2 = \{(0,0), (2,1), (4,2), (6,3)\}$

Représentation - Graphe



C'est le graphe de l'exercice du Stade Toulousain.

3.2. Caractérisations

Définition - Propriétés des relations
Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que $\mathscr{R}$ est :
- réflexive si $\forall x \in E$, $x\mathscr{R}x$;
- symétrique si $\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$;
- antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x \Rightarrow x = y$;
- transitive si $\forall (x, y, z) \in E^3$, $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z$.

Exemple - Stade Toulousain
Dans l'exemple précédent, la relation est réflexive, symétrique et transitive.
Exercice
Comment se représentent pour un graphe les propriétés précédentes ?

Correction
En terme de graphe, cela signifie que :
- pour la réflexivité : chacun est relié à lui-même, donc le diagramme présente des lignes droites.
  (Dans le cas d'une représentation matricielle : que des 1 sur la diagonale)
- pour la symétrie : un flèche dans un sens, donne une flèche dans l'autre sens (on pourrait faire des doubles flèches).
  On parle alors de graphe non orienté.
  (Dans le cas d'une représentation matricielle : la matrice est symétrique)
- pour l'antisymétrie : il ne peut y avoir de double flèche, excepté sur eux-mêmes.
  (Dans le cas d'une représentation matricielle : la matrice est presque antisymétrique)
- pour la transitivité : il y a des blocs de points regroupés entre eux.

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

Définition - Relation d'ordre
Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition - Plus petit
Une relation d'ordre permet de *comparer* deux éléments. Lorsque $x\mathscr{R}y$ on dit que x est "plus petit" que y et on note usuellement $x \preceq y$.

Savoir faire - Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre.
Il s'agit de montrer, tour à tour, que la relation est réflexive, antisymétrique et transitive.

Pour aller plus loin - Treillis (de Galois)
Pour les relations d'ordre, au lieu du grpahe, on préfère une représentation graphique sous forme de treillis (de Galois).
Si $x \preceq y$, alors on représente x « sous » y, et l'on trace un lien entre les deux.
Si l'ordre est total, il n'y a qu'un élément à chaque hauteur.
Cette représentation n'a d'intérêt que pour E de cardinal fini (et petit), même si elle peut aussi donner de bonnes idées complémentaires.

4.2. Ensemble avec ordre total

Définition - Ordre total
Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre total si
$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \preceq y \text{ ou } y \preceq x$$
(c'est-à-dire si deux éléments quelconques de E sont comparables).

Remarque - Concernant le treillis (ou graphe)
Le fait que l'ordre soit total signifie que le treillis/graphe est connexe (en un seul morceau).

Exemple - Sur $\mathbb{R}$
Par exemple, dans $\mathbb{R}$ la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total, en revanche $<$ n'est pas une relation d'ordre.
En effet, $<$ n'est pas reflexive.
Exercice
Sur $E = \mathbb{R}^2$ on définit les deux relations suivantes :
- l'ordre produit :
$$(x, y) \preceq_1 (x', y') \Leftrightarrow x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'$$
- l'ordre lexicographique :
$$(x, y) \preceq_2 (x', y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y')$$

Vérifier qu'il s'agit de relations d'ordre. S'agit-il d'ordre partiel ou d'ordre total ?

Correction
Première relation :
- Réflexive : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant x$ et $y \leqslant y$, donc $(x, y) \preceq_1 (x, y)$
- Antisymétrique :Soient $x, y, x'y' \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y) \preceq_1 (x', y')$ et $(x', y') \preceq_1 (x, y)$
  Donc $x \leqslant x'$, $x' \leqslant x$, $y \leqslant y'$ et $y' \leqslant y$.
  Donc $x = x'$ et $y = y'$ (car $\leqslant$ est antisymétrique sur $\mathbb{R}$).
  Finalement $(x, y) = (x', y')$
- Transitive : Soient $x, y, x', y', x'', y'' \in \mathbb{R}$, tels que $(x, y) \preceq_1 (x', y')$ et $(x', y') \preceq_1 (x'', y'')$.
  On a donc $x \leqslant x' \leqslant x''$ et $y \leqslant y' \leqslant y''$, donc $(x, y) \preceq_1 (x'', y'')$

Cette relation n'est pas totale : il n'y a aucune relation entre $(1, 0)$ et $(0, 1)$ (et pas de relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$). Première relation :
- Réflexive : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x = x$ et $y \leqslant y$, donc $(x, y) \preceq_2 (x, y)$
- Antisymétrique :Soient $x, y, x'y' \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y) \preceq_2 (x', y')$ et $(x', y') \preceq_2 (x, y)$
  On ne peut avoir $x < x'$, sinon, on aurait pas $(x', y') \preceq_2 (x, y)$, donc $x = x'$.
  Puis $y \leqslant y'$ et $y' \leqslant y$ donc $y = y'$.
  Finalement $(x, y) = (x', y')$
- Transitive : Soient $x, y, x', y', x'', y'' \in \mathbb{R}$, tels que $(x, y) \preceq_2 (x', y')$ et $(x', y') \preceq_2 (x'', y'')$.
  Alors $x \leqslant x' \leqslant x''$.
  - Ou bien $x < x''$ et donc $(x, y) \preceq_2 (x'', y'')$
  - Ou bien $x = x''$ et donc $x = x' = x''$
    et donc $y \leqslant y' \leqslant y''$ et ainsi $(x, y) \preceq_2 (x'', y'')$

  Dans tous les cas $(x, y) \preceq_2 (x'', y'')$

Cette relation est totale : elle permet d'écrire le dictionnaire !
C'est aussi l'ordre total qui permet de classer les nombres écrits décimalement (ou une base quelconque, d'ailleurs).

4.3. Ensemble avec ordre partiel

Définition - Ordre partiel
Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre partiel s'elle n'est pas total.
C'est-à-dire : il existe $(x,y) \in E^2$ tel que $x \not\preceq y$ et $y \not\preceq x$.

Exercice
Soit Ω un ensemble et $E = \mathscr{P}(\Omega)$. On définit sur E la relation $\mathscr{R}$ par

$$\forall (A,B) \in E^2, A \mathscr{R} B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Vérifier que la relation $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre. S'agit-il d'une relation d'ordre total ?

Correction
- Elle est réflexive : pour tout ensemble A, on a $A \subset A$.
- Elle est antisymétrique : soient A et B tels que $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.
- Elle est transitive : soient A, B et C tels que $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

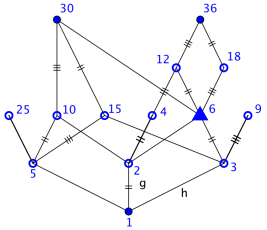
Mais ce n'est pas une relation d'ordre totale : si $\mathrm{Card}(E) \geqslant 2$, il n'y a pas de relation entre $\{a\}$ et $\{b\}$ si $a \neq b$.

Exemple - Divisibilité sur $\mathbb{N}$
La relation « divise » : $n|m$, si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = nk$ est une relation d'ordre partielle.
Exercice
Montrer ce résultat

Correction
C'est une relation reflexive, antisymétrique et transitive

Remarque - Treillis
On peut faire un treillis de divisibilité de certains nombres entiers.
Ce n'est pas une droite, comme avec $(\mathbb{R}, \leqslant)$ par exemple.

Représentation - Treillis de diviseurs de 30 et 36



4.4. Eléments particuliers

Majorant/minorant

Définition - Majorants,minorants
Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :
- $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \preceq M$;
- $m \in E$ est un minorant de A si $\forall x \in A, m \preceq x$;

Exemple - Majorant sur $(\leqslant, \mathbb{R})$
Pour la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$,
3 est un majorant de l'ensemble $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.
D'une certaine façon, ce n'est pas le meilleur.

Exemple - Majorant sur $(|, \mathbb{N})$
Pour la relation d'ordre $|$ sur $\mathbb{N}$,
- 120 est un majorant de $\{1,2,3,4,5\}$
  Ce n'est pas le meilleur. On dit que c'est un multiple.
  La majorant le plus intéressant serait le plus petit multiple. (PPCM)
- 3 est un minorant de $\{6,9,12\}$.
  On dit que c'est un diviseur.
  C'est d'une certaine façon le meilleur car c'est le plus grand des diviseurs (PGCD).

Exercice
Pour la relation d'ordre $\subset$ sur $\mathbb{R}$.
Donner un majorant et un minorant de $\{\{1,2,3\},\{2,3,5\}\}$

Correction
On peut prendre par exemple : $A = \{1,2,3,5\}$ et $B = \{2,3\}$ respectivement.
En fait tout majorant doit contenir A et tout minorant est inclus dans B

Plus grand/petit élément

Définition - Plus grand élément, plus petit élément
Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :
- $a \in E$ est un plus grand élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \preceq a$;
- $a \in E$ est un plus petit élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, a \preceq x$.

En fait a est respectivement un majorant de A et élément de A ou bien un minorant et élément de A

Théorème - Unicité
Un plus petit grand élément de $A \subset E$, lorsqu'il existe, est unique, noté $\max(A)$.
Un plus petit petit élément de $A \subset E$, lorsqu'il existe, est unique, noté $\min(A)$.

Démonstration
Supposons que A admettent (au moins) deux plus petits éléments : a_1 et a_2.
Alors pour tout $x \in A$, $a_1 \preceq x$, donc en particulier pour $x = a_2 \in A$: $a_1 \preceq a_2$.
Et pour tout $x \in A$, $a_2 \preceq x$, donc en particulier pour $x = a_1 \in A$: $a_2 \preceq a_1$.
Par antisymétrie : $a_1 = a_2$. A admet au plus un seul plus petit élément. □

Attention - Attention au mot
Ici il ya une source d'erreur classique. On fera bien attention aux mots définis ici : (un) majorant, (un) minorant, (le) plus grand élément, (le) plus grand élément.
S'ajoutent à ces mots : élément maximal, minimal…
Il y aura bientôt également l'expression borne supérieure, borne inférieure…

On rencontre très souvent le cas suivant :
Exercice
On suppose que $\preceq$ est une relation d'ordre total sur E.
Soit $A \subset E$. On suppose que A est fini.
Montrer que A admet nécessairement un plus grand élément

Correction
On fait une récurrence sur $\mathrm{Card}(A)$.
$\mathscr{P}_n$: Si $\mathrm{Card}(A) = n$, alors A admet un plus grand élément. Pour l'hérédité, on note que si $A = A_n \uplus \{a\}$, alors $\max(A) = \max(\max(A_n), a)$… Nous encourageons également à faire une démonstration par algorithme.

Exercice
On admet qu'un ensemble fini admet toujours un plus petit élément (il suffit de faire au plus $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaisons - mais on peut se contenter de $n-1$ comparaisons…).
Montrer que tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Correction
Soit $A \subset \mathbb{N}$. Soit $a \in A$.
Alors $A' = A \cap [\![0,a]\!]$ est fini (car inclus dans $[\![0,a]\!]$), il admet un plus petit élément a'.
Pour tout $x \in A$,
ou bien $x > a$ et donc $a' \leqslant a < x$,
ou bien $x \leqslant a$ donc $x \in A'$ et donc $a' \leqslant x$.
Ainsi a' est le plus petit élément de A

Eléments maximaux/minimaux

Remarque - Généralisation : élément maximal ou minimal
On peut également définir la notion d'élément maximal ou minimal :
- *$M \in A$ est un élément maximal de A si $\forall x \in A, M \preceq x \Rightarrow x = M$;*

— $m \in A$ *est un élément minimal de* A *si* $\forall x \in A, x \preceq m \Rightarrow x = m$.

S'il s'agit d'une relation d'ordre total, ces éléments coïncident avec les plus grand et plus petit éléments (s'ils existent).

Exemple - Ensemble avec plusieurs éléments maximaux

Pour qu'il y en ait plusieurs, il ne faut pas qu'ils coïncident avec l'unique plus grand élément.
Donc d'après la remarque, l'ordre ne doit pas être total.
On peut prendre l'ordre produit sur $E = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(x,y) \in E \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, le disque unité.
Alors A n'admet pas de plus grand élément et tous les éléments de $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ sont des éléments maximal de A.
En effet, si $(x_0, y_0) \in M$ et $(x,y) \in A$, avec $(x_0, y_0) \preceq_1 (x,y)$, alors $x_0 \leqslant x$ et $y_0 \leqslant y$.
Alors $1 = x_0 + y_0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$, on a donc $x^2 + y^2 = 1 = x_0^2 + y_0^2$.
Ainsi $(x^2 - x_0^2) + (y^2 - y_0^2) = 0$, avec un somme de termes positifs, donc $x^2 - x_0^2 = 0$ et $y^2 - y_0^2 = 0$.
Enfin pat positivité de x_0 et y_0 : $x = x_0$ et $y = y_0$, donc $(x,y) = (x_0, y_0)$.

Borne supérieure/inférieure

Une dernière définition, pour des cas plus simples que celui de l'exemple précédent :

Définition - Borne inférieure, borne supérieure
Soit A un ensemble muni d'une relation d'ordre.
— Si l'ensemble des majorants de A est non vide et admet un plus petit élément a, a est appelé borne supérieure de A, on note $a = \sup A$.
— Si l'ensemble des minorants de A est non vide et admet un plus grand élément b, b est appelé borne inférieure de A, on note $b = \inf A$.

Cette définition sera au coeur de la définition de l'ensemble $\mathbb{R}$ (à partir de $\mathbb{Q}$ avec la relation d'ordre totale $\leqslant$). Mais elle sert aussi à d'autres moments du cours

Exemple - Borne inférieure et supérieure pour $(\mathbb{N}, |)$ (divisibilité)

Comme leur nom l'indique :
— La borne supérieure de l'ensemble fini d'entiers $\{u, v\}$ est le $PPCM(u,v)$.
— La borne inférieure de l'ensemble fini d'entiers $\{u, v\}$ est le $PGCD(u,v)$.

Savoir faire - Montrer que $a = \sup E$

On montre en deux temps :
1. $\forall x \in E, x \preceq a$
2. $\forall z$ tel que $\forall x \in E, x \preceq z$, alors $a \preceq z$
(tout majorant z de E est plus grand que a)
OU (de manière équivalente)
$\forall u \preceq a, \exists x \in E$ tel que $u \preceq x$
(tout élément plus petit que a ne peut pas être un majorant de E)

Exercice
Comment repérer sur le treillis des multiples et diviseurs de u et de v, leur PGCD et leur PPCM ?

Correction
C'est le grand père commun (PPCM) ou le petit fils commun (PGCD)

Exercice
Comment peut-on définir l'ensemble borne supérieure de deux ensembles A et B pour la relation $\subset$?
Même question avec la borne inférieure ?

Pour aller plus loin - Espaces vectoriels
On indiquera que dans le cadre des espaces vectoriels, où l'on exige en outre une stabilité pour l'addition vectoriel, la borne supérieure des sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 est donnée par l'ensemble $F_1 + F_2$

Correction
Tout simplement : $A \cup B$ et $A \cap B$ respectivement

4.5. Ordre strict

Définition - Ordre strict
Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On définit la relation $\prec$ par :

$$x \prec y \Leftrightarrow (x \preceq y \text{ et } x \neq y)$$

ce n'est pas une relation d'ordre sur E car elle n'est pas réflexive.

Exemple - Sur $\mathbb{R}$

La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre (totale).
Alors que $<$ est une relation d'ordre strict.

5. Relation d'équivalence

5.1. Propriétés caractéristiques

Définition - Relation d'équivalence
Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Pour aller plus loin - Relation d'équivalence : volonté de définir =
Sur le site images des maths, un article intéressant : http ://images.math.cnrs.fr/Egalite

Exemple - Stade Toulousain

On a vu une première relation d'équivalence, avec l'exemple du stade Toulousain.

Exemple - Fractions rationnelles

Montrer que $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ par $(a,b)\mathscr{R}(c,d)$ ssi $a \times d = b \times c$ est une relation d'équivalence.
Montrons que $\mathscr{R}$ ainsi définie est :
— réflexive.
$a \times b = b \times a (= ab)$ donc $(a,b)\mathscr{R}(a,b)$.
— symétrique.
Supposons que $(a,b)\mathscr{R}(c,d)$, donc $a \times d = b \times c$
donc $c \times b = d \times a$ donc $(c,d)\mathscr{R}(a,b)$.
— transitive.
Supposons que $(a,b)\mathscr{R}(c,d)$ et $(c,d)\mathscr{R}(e,f)$ donc $a \times d = b \times c$ et $c \times f = d \times e$.
donc $(a \times f) \times d = f \times (a \times d) = f \times (c \times b) = (f \times c) \times b = d \times e \times b$.
et comme d est non nul, il est inversible (dans $\mathbb{R}$) et donc $a \times f = e \times b$ donc $(a,b)\mathscr{R}(e,f)$.

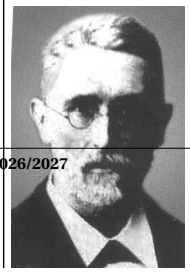
Savoir faire - Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence

Il s'agit de montrer, tour à tour, que la relation est réflexive, symétrique et transitive.

Exercice
Montrer que $\mathscr{R}$ définie sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ (ensemble des suites) par $(u_n)\mathscr{R}(v_n)$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ est une relation d'équivalence.

Correction
Montrons que $\mathscr{R}$ ainsi définie est :
— réflexive.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_n} = 1$ donc $(u_n)\mathscr{R}(u_n)$.
— symétrique.
Supposons que $(u_n)\mathscr{R}(v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc $(v_n)\mathscr{R}(u_n)$.

Histoire - Construction de $\mathbb{Z}$
Etant donné $\mathbb{N}$, construit par un principe de type récurrence (par Péano); on peut suivre Dedekind est construire $\mathbb{Z}$.
On note sur $\mathbb{N}^2$, $\mathscr{R}$ telle que $(n,m)\mathscr{R}(n',m')$ ssi $n + m' = n' + m$
Les classes d'équivalence sont de la forme $(0,n) = \{(k, k+n), k \in \mathbb{N}\}$, représenté de l'entier relatif : $-n$.



— transitive.
Supposons que $(u_n)\mathcal{R}(v_n)$ et $(v_n)\mathcal{R}(w_n)$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{w_n}=1$.
donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{w_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}\times\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{w_n}=1$ et donc $a\times f=e\times b$ donc $(u_n)\mathcal{R}(w_n)$.

Exercice
Soit $f:E\to F$.
On définit la relation $\mathcal{R}_f$ sur E par $x\mathcal{R}_f y$ ssi $f(x)=f(y)$.
Montrer que $\mathcal{R}_f$ est une relation d'équivalence sur E.

Correction
Trivial

5.2. Classes d'équivalence

Définition - Classe d'équivalence
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Pour $a\in E$, on appelle classe d'équivalence de a l'ensemble $C(a)=\{x\in E\,|\,x\mathcal{R}a\}$. a est un représentant de $C(a)$.

Exemple - Fractions rationnelles
Les classes d'équivalence des fractions rationnelles sont exactement les couples dont les fractions sont égales.
On voit sur cette exemple le but de la notion de classe d'équivalence : préciser et généraliser la notion d'égalité!
Les fractions rationnelles simplifiés sont des représentants particulièrement simple de leur classe d'équivalence.

Exercice
Montrer que $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{C}^{*2}$, par $z=a+\mathrm{i}b\mathcal{R}z'=a'+\mathrm{i}b'$ ssi $a\times b'=a'\times b$ est une relation d'équivalence.
Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$?

Correction
Montrons que $\mathcal{R}$ ainsi définie est :
— réflexive.
$a\times b=b\times a(=ab)$ donc $a+\mathrm{i}b\mathcal{R}a+\mathrm{i}b$).
— symétrique.
Supposons que $a+\mathrm{i}b\mathcal{R}c+\mathrm{i}d$, donc $a\times d=b\times c$
donc $c\times b=d\times a$ donc $c+\mathrm{i}d\mathcal{R}a+\mathrm{i}b$.
— transitive.
Supposons que $a+\mathrm{i}b\mathcal{R}c+\mathrm{i}d$ et $c+\mathrm{i}d\mathcal{R}e+\mathrm{i}f$ donc $a\times d=b\times c$ et $c\times f=d\times e$.
donc $(a\times f)\times d=f\times(a\times d)=f\times(c\times b)=(f\times c)\times b=d\times e\times b$.
et comme d est non nul, il est inversible (dans $\mathbb{R}$) et donc $a\times f=e\times b$ donc $a+\mathrm{i}b\mathcal{R}e+\mathrm{i}f$.
Les classes d'équivalence peuvent représentées par les droites passant par 0.

Exercice
Montrer que $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$, par $\theta\mathcal{R}\theta'$ ssi $\exists\,k\in\mathbb{Z}$ tel que $\theta-\theta'=2k\pi$ est une relation d'équivalence.
Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$?

Correction
Montrons que $\mathcal{R}$ ainsi définie est :
— réflexive.
$\theta-\theta=0=0\times 2\pi$ donc $\theta\mathcal{R}\theta$.
— symétrique.
Supposons que $\theta\mathcal{R}\theta'$, donc $\theta-\theta'=2k\pi$
donc $\theta'-\theta=-2k\pi$ donc $\theta'\mathcal{R}\theta$.
— transitive.
Supposons que $\theta\mathcal{R}\theta'$ et $\theta'\mathcal{R}\theta''$ donc $\theta-\theta'=2k\pi$ et $\theta'-\theta''=2k'\pi$.
donc $\theta-\theta''=(\theta-\theta')+(\theta'-\theta'')=2k\pi+2k\pi=2(k+k')\pi$.
et donc $\theta\mathcal{R}\theta''$.
Les classes d'équivalence peuvent représentées par les arguments principaux. En fait, on retrouve la même classe d'équivalence que précédemment.

Proposition - Caractéristique par les classes d'équivalence
Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E, a et b deux éléments de E. Alors
$$a\mathcal{R}b\Leftrightarrow C(a)=C(b)\,.$$

Démonstration
Supposons que $a\mathcal{R}b$.
Soit $x\in C(b)$, alors $x\mathcal{R}b$ et par transitivité (et réflexivité) : $x\mathcal{R}a$, donc $x\in C(a)$.
$\forall\,x\in C(b)$, $x\in C(a)$, donc $C(b)\subset C(a)$.
Et, si $y\in C(a)$ alors $y\mathcal{R}a$, donc $y\mathcal{R}b$, donc $y\in C(b)$. Et $C(a)\subset C(b)$.
Bilan : $C(a)=C(b)$.
Réciproquement, si $C(a)=C(b)$, alors $a\in C(a)\subset C(b)$, donc $a\in C(b)$ et $a\mathcal{R}b$. □

Exercice
On note $\mathcal{P}$ le plan usuel. On définit sur $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ la relation $\mathcal{R}$ par
$$(A,B)\mathcal{R}(C,D)\Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$
Il s'agit d'une relation d'équivalence. Que représentent les classes d'équivalence de cette relation ?

Correction
Les classes d'équivalence sont données par l'ensemble de tous les vecteurs (pas d'origine).

Définition - Système de représentants
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble E.
Si il existe $S\subset E$ tel que pour tout $x\in E$, $\exists!\,s\in S$ tel que $x\mathcal{R}s$,
on dit que S est un système de représentants de la classe d'équivalence $\frac{E}{\mathcal{R}}$.
(Il y a une bijection naturelle entre S et $\frac{E}{\mathcal{R}}$).
On note souvent $S_{E\setminus\mathcal{R}}$ un tel système.
Si E est fini, il existe toujours un système de représentants (sinon cela peut nécessiter l'axiome du choix).

Remarque - Notation floue
La notation $S_{E\setminus\mathcal{R}}$ est très imprécise (pas de différence entre un système et un autre). Souvent ce qui compte pour les démonstrations est d'un considérer un système quelconque, sans précision.

Exemple - Relation de congruence modulo $[0,2\pi]$
L'argument principal d'un nombre complexe noté Arg$z$ est choisi dans l'ensemble des représentants $[0,2\pi[$ (ou $]-\pi,\pi]$ selon les conventions).
Il représente sa classe d'équivalence des nombres réels associé à un même argument d'un nombre complexe.

5.3. Partition de E

Heuristique - Classe d'équivalence : partition de E
Avoir une relation d'équivalence, c'est faire l'assimilation entre différents objets à priori différents et finalement identique (ou plutôt équivalent) du point de vue de la relation. L'ensemble du départ est alors réduit en partie plus petite, ces éléments sont les classes d'équivalence. Elles forment une partition de l'ensemble initial.

Définition - Partition d'un ensemble
Une partition de E est un ensemble de sous-ensembles (non vides) de E tel que :
— leur réunion fait E
— leur intersection 2 à 2 est vide

Remarque - Sous-ensemble vide? Pseudo-partition
Pour définir une partition, on refuse les sous-ensembles vide. Cela rend les choses plus simples...
Mais parfois (en probabilité par exemple avec les systèmes pseudo-complet d'événements) que l'on ait à faire avec un ensemble « naturellement » vide.
On parlera alors de pseudo-partition.

Proposition - Partition de E
Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors ses classes d'équivalence forment une partition de E.

Démonstration
On note O_i, la famille des classes d'équivalence (la notion de famille est vue en fin de chapitre).
Pour tout $x \in E$, x appartient à sa propre classe d'équivalence, donc $x \in \bigcup_i O_i$ et $O_i \neq \emptyset$,

donc $E \subset \bigcup_i O_i$.

Réciproquement, toutes les classes d'équivalences O_i sont des parties de E.
Donc $\bigcup_i O_i \subset E$.

Finalement $E = \bigcup_i O_i$.

Soit O_i et O_j deux classes d'équivalence.
Si $x \in O_i \cap O_j$, alors tous les éléments de O_i sont en relation avec x donc $O_i = C(x)$.
De même tous les éléments de O_j sont en relation avec x donc O_j est la classe de x.
Donc ou bien $O_i = O_j (= C(x))$, ou bien $O_i \cap O_j = \emptyset$. □

Remarque - La réciproque est vraie
Etant donnée une partition sur E : $E = \bigcup_{i \in I} O_i$.
Considérons alors $\mathscr{R}$: $(x \mathscr{R} y)$ ssi $\exists\, i \in I$ tel que $x \in O_i$ ET $y \in O_i$.
$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

Remarque - Classes d'équivalence et dénombrement
Si E fini se décompose en classe d'équivalence $(O_i)_{i \in I}$, alors $\#E = \sum_{i \in I} \#O_i$.
Il arrive souvent que E se décompose en n classes d'équivalence toutes de même cardinal c.
Dans ce cas : $\#E = c \times n$.

Application - Dénombrement et classe d'équivalence
La relation $\mathscr{R}$ définie sur $F \times G$ par :

$$(a,b)\mathscr{R}(c,d) \iff a = c$$

est une relation d'équivalence.
Les classes d'équivalence sont en nombre de $\#F$. Et chacune des classes possède exactement $\#G$ éléments.
Donc $\#(F \times G) = \sum_{i \in I} \#O_i = \sum_{a \in F} \#G = \#G \times \sum_{a \in F} 1 = \#G \times \#F$.
Il s'agit vraiment de la formalisation du premier résultat de dénombrement…

5.4. Préordre et opérations sur les classes

Définition - Préordre
Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E.
On dit qu'il s'agit d'une relation de préordre si elle est réflexive et transitive.

Proposition - Relation d'équivalence associée
La relation $\equiv$ définie sur E, par $x \equiv y$ si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$ est une relation d'équivalence

Démonstration
Comme $\mathscr{R}$ est réflexive ; pour tout $x \in E$, $x \equiv x$, donc $\equiv$ est réflexive.
Soit $x, y \in E$ tels que $x \equiv y$, alors $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$ et donc $y \equiv x$. Ainsi $\equiv$ est symétrique.
Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \equiv y$ et $y \equiv z$.
Alors $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$ et $y\mathscr{R}z$ et $z\mathscr{R}y$.
Donc $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$ et $z\mathscr{R}y$ et $z\mathscr{R}x$ et par transitivité de $\mathscr{R}$: $x\mathscr{R}z$ et $z\mathscr{R}x$.
Donc $\equiv$ est transitive.
Ainsi $\equiv$ est une relation d'équivalence. □

Proposition - $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre pour $\equiv$
En prenant pour égalité de la relation d'antisymétrie, la relation $\equiv$, alors $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre.

Démonstration
On a clairement $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$ si et seulement si $x \equiv y$. □

Analyse - Projection de $\mathscr{R}$ sur les classes d'équivalence
Ce qui semble plus naturel est de travailler directement sur les classes d'équivalence.
On définit alors $\overline{\mathscr{R}}$ la relation $C(x)\overline{\mathscr{R}}C(y)$ si $x\mathscr{R}y$.
Mais cette relation dépend du choix du représentant x ou x' de la même classe $C(x) = C(x')$…
A moins que non… : soit $x, x' \in E$ tels que $C(x) = C(x')$ i.e. $x \equiv x'$ i.e. $x\mathscr{R}x'$ et $x'\mathscr{R}x$.
De même supposons que $y \equiv y'$.
Alors $C(x)\overline{\mathscr{R}}C(y)$ ssi $x\mathscr{R}y$, par transtivité : $x'\mathscr{R}x\mathscr{R}y\mathscr{R}y'$, donc $C(x')\overline{\mathscr{R}}C(y')$.
Il reste à montrer (lecteurs) que $\overline{\mathscr{R}}$ est bien une relation d'ordre sur $\frac{E}{\equiv}$.

6. Bilan

Synthèse

- Les ensembles, dont on a vu qu'ils étaient à la base des raisonnements mathématiques, peuvent être « travaillés ». Ils peuvent être coupés en morceaux, avec des classes d'équivalence ou bien structurés visuellement avec une relation d'ordre.
- Selon chaque situation, on fait évoluer notre regard !

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre
- Savoir-faire - Montrer que $a = \sup E$
- Savoir-faire - Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence

Notations

	Propriétés	*Remarques*
définition (du terme de gauche)		autre notation : $s \overset{\text{def.}}{=}$
équivalence variées	Réflexive, Symétrique, Transitive	
les classes d'équivalence sur E	Les classes d'équivalence forment une partition de E	
tion d'équivalence $\mathscr{R}$		
représentants de $\frac{E}{\mathscr{R}}$	$S_{\frac{E}{\mathscr{R}}} \subset E$ et $\forall\, x \in E, \exists !\, s \in S_{\frac{E}{\mathscr{R}}}$ tel que $x\mathscr{R}s$.	
ordre variées	Réflexive, Antiymétrique, Transitive	
élément de E pour UNE relation	$\max E \in E$ et $\forall\, x \in E, x \leqslant \max E$ (ou $\subset$.…..)	Si la relation est totale, $\max E$ est au plus unique.
e a priori		
lément de E pour UNE relation	$\min E \in E$ et $\forall\, x \in E, \min E \leqslant x$ (ou $\subset$.…..)	Si la relation est totale, $\min E$ est au plus unique.
e a priori		
es majorants de E	$\forall\, x \in E,\ x \leqslant \sup E$ et $[\forall\, x \in E, x \leqslant y \Rightarrow \sup E \leqslant y$	Au plus unique.
des minorants de E	$\forall\, x \in E,\ \inf E \leqslant x$ et $[\forall\, x \in E, y \leqslant x \Rightarrow y \leqslant \inf E$	Au plus unique.

Retour sur les problèmes

48. Voir cours
49. Voir cours
50. Voir cours
51. Pas de plus grand élément à $[0,1[$. Mais un plus petit élément à tous ses majorants : $\sup[0,1[= 1$, on l'appelle la borne supérieure.

52. Si les applications sont bien définies.
Alors une relation $\mathscr{R}$ est une application f de E^2 dans $\{0,1\}$, avec $f((a,b)) = 1$ ssi $a\mathscr{R}b$.
Si les relations sont bien définies.
Alors une application f de E sur F est définie par $f(a) = b$ ssi $a\mathscr{R}b$.

Chapitre 11

Applications (entre ensembles)

Résumé -

Nous complétons quelques notions essentielles du fondement des mathématiques (formalisé non sans mal à la fin du XIX-ième siècle). Ces fondements se basent sur les ensembles et sur les applications entre ces ensembles!
Quelles sont les applications qui ne transforment pas trop les ensembles?
Les ensembles images ou réciproques (retour) permet de décrire (par des ensembles) les qualités de l'application.
Une application classique est l'application qui compte les éléments. On précisera ici les notions intuitives de cardinaux des ensembles ici.
Nous terminerons pas étudier les familles Quelques vidéos :

- *Khan Academy - Intersection et union d'ensembles - https ://www.youtube.com/watch ?v=vcwMTpgNlQA*
- *Canal unisciel (P. Dehornoy) - La théorie des ensembles 50 ans après Cohen - https ://www.canal-u.tv/video/institut_fourier/patrick_dehornoy _la_theorie_des_ensembles_cinquante_ans_apres_cohen.41917*

Sommaire

1. Problèmes

Problème 53 - Qualités des fonctions

Résoudre une équation, c'est trouver x (tous les x) tel que $f(x) = b$, où b et f sont connus.
Il est intéressant de savoir si :
- l'équation a (au moins) une solution.
- l'équation a exactement une solution.
- l'équation a (au plus) une solution.

Evidemment, la réponse dépend de b et de f, on peut la noter $f^{-1}(\{b\})$, c'est un ensemble de solution (qui peut être vide)!.
Si on reprend ces trois options, qu'on généralise à tout b, on trouve 3 qualités précises de f. Comment peut-on qualifier ces trois propriétés?

Problème 54 - Image mentale

Voici une image donnée par un étudiant en 2025-2026.
Si l'on considère la distribution du courrier; B, l'ensemble des boites aux lettres et C l'ensemble des courriers, est-il plus naturel de considérer $\Phi : B \to C$: à chaque boite aux lettres, on associe les courriers reçus par le propriétaire ou bien $\Phi : C \to B$, à chaque courrier on associe la boite aux lettres du destinataire?
Les questions qui suivent naturellement sont alors : est-ce que tout le monde a du courrier? Peut-il y avoir plusieurs courrier pour une même personne?

Problème 55 - Description d'ensemble simple

Peut-on comparer deux ensembles facilement. Pour être un tant soit peu identique, ils doivent au moins avoir le même nombre d'éléments.
Comment fait-on pour savoir cela? Quelle est la nature du lien qui unit l'un à l'autre? Existe-t-il des ensembles de référence à k éléments?
Comment calculer formellement le nombre d'éléments d'un sous-ensemble?

Problème 56 - Cardinal fini. Cardinal infini

Deux ensembles sont de taille identique s'il existe une application bijective de l'un sur l'autre.
Même l'existence d'une application bijective d'un ensemble à un autre peut très bien se produire même si les ensembles ne sont pas de taille fini.
Existe-t-il des ensembles infinis de même taille? Des ensembles infinis de tailles différentes? Existe-t-il une relation d'ordre (totale?) entre les ensembles de taille infini?

Problème 57 - Nombres rationnels

Quelles sont les caractéristiques de l'application : $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(a,b) \mapsto \frac{a}{b}$?

Problème 58 - Famille $(O_i)_{i\in I}$

Lorsqu'une application dépend d'un nombre réel, on note $f : x \mapsto \dots$ cette application.
Lorsqu'elle dépend d'un nombre entier naturel, on la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Existe-t-il une notation officielle pour une application qui dépend d'un ensemble I de points. Et comment on appelle cette application : fonction, suite, autre chose?

2. Applications de E dans F

Il s'agit ici de donner une théorie plus précise sur les fonctions.

2.1. Vocabulaire lié aux applications

Heuristique - Application (définition non formelle)

Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est un "procédé" qui associe à chaque élément $x \in E$ un élément $f(x) \in F$. Une telle application est notée

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

$f(x)$ est appelé image de x par f;
l'ensemble E est appelé ensemble de départ de l'application f;
l'ensemble F est appelé ensemble d'arrivée de f.
On a donc une application de E dans F dès qu'à tout élément $x \in E$ on peut associer sans ambiguïté un élément $f(x) \in F$ (c'est-à-dire s'il y en a un et un seul possible).

Une application est donc déterminée par la donnée des couples $(x, f(x))$ où x parcourt E, d'où la définition plus formelle :

Définition - Application

Soient E et F deux ensembles et $\mathcal{G} \subset E \times F$ vérifiant

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, |\ (x,y) \in \mathcal{G}.$$

La donnée d'un tel triplet $(E,F,\mathcal{G})$ s'appelle une application de E dans F.
On note

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

où y est l'unique élément de F vérifiant $(x,y) \in \mathcal{G}$.
$\mathcal{G}$ s'appelle le graphe de l'application. On le note souvent Γ_f.
On a donc $\Gamma_f = \{(x,y) \in E \times F \,|\, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \,|\, x \in E\}$.

Remarque - Fonctions ou applications?

D'après la définition, une fonction définie sur E, à valeurs dans F, est une application de E dans F.

De cette définition découle le résultat suivant :

Savoir faire - Montrer une égalité de deux fonctions

Soient $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ deux applications. f et g sont égales si et seulement si :

- $E = E'$ (même ensemble de départ),
- $F = F'$ (même ensemble d'arrivée),
- $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

Définition - Ensemble de fonctions

On notera $\mathscr{F}(E,F)$ (on trouve aussi les notations $\mathscr{A}(E,F)$ ou F^E) l'ensemble des applications (ou fonctions) de E dans F.

Exemple - Classiques

- Pour tout ensemble E, l'application $x \mapsto x$ de E dans lui-même est appelée application identité de E et notée Id_E, son graphe est la diagonale de E^2.
- Soient E et $F \neq \emptyset$ deux ensembles, et $a \in F$. L'application $x \mapsto a$ de E dans F s'appelle une application constante, son graphe est $E \times \{a\}$.
- Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles. Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ l'application

$$\begin{array}{rcl} p_i : & E_1 \times \cdots \times E_n & \to E_i \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto x_i \end{array}$$

s'appelle la i-ième projection ou la i-ième application coordonnée.

Définition - Restriction et prolongement

Soit $f : E \to F$ une application.

- Soit $A \subset E$. **La** restriction de f à A, notée $f_{|A}$, est l'application

$$\begin{array}{rcl} f_{|A} : & A & \to F \\ & x & \mapsto f(x) \end{array}$$

- Si $E \subset B$, une application $\tilde{f} : B \to F$ est **un** prolongement à B de l'application f si $\tilde{f}_{|E} = f$, c'est-à-dire si $\forall x \in E, \tilde{f}(x) = f(x)$.

Définition - Composée

Soient deux applications $f : E \to F, g : F \to G$. On définit l'application composée, notée $h = g \circ f$, de E dans G par

$$\forall x \in E, h(x) = g(f(x))$$

Exemple - Identité

Si on a une application $f : E \to F$, alors $Id_F \circ f = f$ et $f \circ Id_E = f$.

Remarque - Répresentation

Il est parfois utile de représenter les applications par un graphe.

Attention - Non commutativité

En général, même lorsque les deux applications $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens, elles sont différentes.

Proposition - Associativité de $\circ$

Pour trois applications $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

On peut donc noter $h \circ g \circ f$.

Démonstration

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ sont toutes deux des applications de F dans H.
Soit $x \in F$,

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h\big(g(f(x))\big) = (h \circ g)(f(x)) = [(h \circ g) \circ f](x)$$

□

2.2. Bijections (injections et surjections)

Applications injectives ou surjectives

Heuristique - Résoudre une équation

Une fonction est de la forme : $E \xrightarrow{f} F$. A tout x de E, f donne une valeur de F.
Résoudre une équation est toujours le problème inverse :
Sont données : $E \xrightarrow{f} F$ et $b \in F$. Il s'agit de trouver $x \in E$ tel que $f(x) = b$.
Les questions naturelles sont les suivantes :

- Cette équation admet-elle (au moins) une solution?
- Cette équation admet-elle au plus une solution?
- Cette équation admet-elle exactement une solution? Ce qui évite les quiproquos…

Définition - Injection et surjection

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que

- f est injective (est une injection) si $\forall (x,x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;
- f est surjective (est une surjection) si $\forall y \in F, \exists x \in E \,|\, y = f(x)$.

Pour aller plus loin - Exemples

Donner E, F, f et b pour les équations :

- $y' + y = x$
- $x^2 + 3x - 4 = 2$
- $\begin{cases} 2x & +y & = & 1 \\ x & -y & = & 2 \end{cases}$

Remarque - Notation

On pourra noter $f : E \hookrightarrow F$ pour exprimer que f est une application injective de E sur F.
On pourra noter $f : E \twoheadrightarrow F$ pour exprimer que f est une application surjective de E sur F.
Comment écrire une flèche de bijection ? $E \hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow F$

Exercice

Montrer que f est injective ssi $\forall\ b \in F$, $f(x) = b$ admet au plus une solution.
Montrer que f est surjective ssi $\forall\ b \in F$, $f(x) = b$ admet toujours (au moins) une solution.

Correction

Supposons f injective.
Si $f(x) = b$ admet deux solutions x_1 et x_2, alors $f(x_1) = f(x_2)$, impossible si f injective.
Si $\forall\ b \in F$, $f(x) = b$ admet au plus une solution, alors $f(x) = f(x')(= b)$ donc $x = x^{P}rime$
La deuxième équivalence correspond exactement à la définition de la surjection.

Savoir faire - Autres formulations équivalentes (injectivité, surjectivité)

Il y a différentes façons équivalentes de formuler ces propriétés :

- Dire que f est injective revient à dire (par contraposée) que :

$$\forall (x,x') \in E^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

  c'est-à-dire que deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont des images distinctes.
- Dire que f est surjective revient à dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent.

Exemple - $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sin x$

Les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles injectives? surjectives?

$$f_1 : x \mapsto x^2, \quad f_2 : x \mapsto x^3, \quad f_3 : x \mapsto \sin x$$

f_1 n'est ni injective ni surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, elle est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$, puis même injective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ ou de $\mathbb{R}_-$ sur $\mathbb{R}_+$.

f_2 est injective et surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
f_3 est ni injective ni surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, elle est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1,1]$, puis même injective de $[\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi]$ sur $[-1,1]$.

Exercice

L'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x+y) \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ?
Mêmes questions avec

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x-y, 2x+y, x-3y) \end{array}$$

Correction

$(x-y, 2x+y) = (a,b) \iff (x,y) = (\frac{a+b}{3}, \frac{b-2a}{3})$.
Donc f est injective et surjective.
$(x-y, 2x+y, x-3y) = (a,b,c) \iff (x,y) = (\frac{a+b}{3}, \frac{b-2a}{3})$ avec $c = \frac{7a-2b}{3}$.
Donc f est injective mais pas surjective (si $c \neq \frac{7a-2b}{3}$, pas de solution...).

Nous ferons plus tard une étude plus complète de l'étude des systèmes linéaires.

Exercice

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \\ & z \mapsto \exp z \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ?

Correction

Elle n'est pas injective : $1 = e^0 = e^{2i\pi}$.
En revanche, exp est bien surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$. En effet, si $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$,
$\exp\left(\ln(\rho) + i\theta\right) = \exp^{\ln\rho} e^{i\theta} = z$.

Remarque - Les ensembles qui sont importants!

On remarquera que :

- *c'est l'ensemble de départ joue un rôle important pour l'injectivité,*
- *c'est l'ensemble d'arrivée joue un rôle important dans la surjectivité.*

Heuristique - Stratégies

Soit $f: E \to F$. Il est pratique que f soit bijective, mais cela ne nous appartient pas en règle générale.
Toutefois, il est possible de rendre :

- f surjective en restreignant « simplement » l'ensemble d'arrivée à $f(E)$.
- f injective en restreignant l'ensemble de départ, ou plus fréquemment en considérant non plus $f: E \o F$, mais $\hat{f}: \frac{E}{\mathscr{R}_f} \to F, \overline{x} \mapsto f(x)$.

Exercice

Montrer que pour cette dernière stratégie, la fonction $\hat{f}$ est bien définie et qu'elle est injective

---

Correction

Si $\overline{x} = \overline{y}$, alors $f(x) = f(y)$ et donc il n'y a pas de problème pour écrire $\hat{f}(\overline{x})$.
Elle est injective, car si $f(\overline{x}) = f(\overline{x'})$, alors $f(x) = f(x')$ et donc $x \mathscr{R}_f x'$ et donc $\overline{x} = \overline{x'}$.

Théorème - Propriétés des composées

Soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications.
Si f et g sont injectives (respectivement surjectives), alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective).

Démonstration

Supposons que f et g sont injectives.
Soient $x, x' \in G$ tel que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$.
Par injectivité de g : $f(x) = f(x')$
Par injectivité de f : $x = x'$
Donc $g \circ f$ est injective.
Supposons que f et g sont surjectives.
Soit $y \in G$,
par surjectivité de g, il existe $u \in F$ tel que $g(u) = y$.
par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = u$.
Donc $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(u) = y$
Donc $g \circ f$ est surjective.
□

Exercice

Soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications. Montrer que :

- si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
- si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Correction

Supposons que $g \circ f$ est injective.
Soient $x, x' \in E$ tel que $f(x) = f(x')$.
alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $x = x'$ car $g \circ f$ injective.
Par conséquent f est injective.
Supposons que $g \circ f$ est surjective.
Soit $y \in G$. Alors il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$.
donc avec $X = f(x)$, on a $g(X) = y$.
Par conséquent f est surjective.

Applications bijectives

Pour que l'equation $f(x) = b$ admette une unique solution, quel que soit $b \in F$, il faut (et il suffit) que f soit bijective :

Définition - Application bijective

Soit $f: E \to F$ une application. On dit que f est bijective (ou est une bijection) de E sur F si si f est injective et surjective.
Dire que f est bijective revient à dire que :

$$\forall\, y \in F, \exists\, !x \in E \quad \text{tel que} \quad y = f(x)$$

c'est-à-dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un et un seul antécédent.

Définition - Application réciproque

Soit f une bijection de E sur F, on définit une application g par

$$\begin{array}{rccl} g: & F & \to & E \\ & y & \mapsto & x \quad | \, y = f(x) \text{ (unique antécédent de } y \text{ par } f) \end{array}$$

Cette application g est elle-même bijective et appelée bijection réciproque de f, et notée f^{-1}.

Démonstration

Il faut montrer que g ainsi définie est bien bijective.
Soit $x \in E$, alors prenons $y = f(x)$, on a donc $g(y) = x$. Donc g est surjective.
Si $g(y) = g(y') = x$, alors cela signifie que $y = f(x) = y'$. Donc g est injective. □

Savoir faire - Critère pour montrer la bijectivité

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.
Alors f et g sont bijectives et $g = f^{-1}$

Exercice

Soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ n-1 \text{ si } n \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Etudier l'injectivité et la surjectivité des applications f et g.
Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Conclusion ?

Correction

$g(0) = g(1) = 0$, donc g n'est pas injective (donc pas bijective).
0 n'a pas d'antécédent par f, donc f n'est pas surjective (ni bijective).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g \circ f(n) = n$ en revanche $f \circ g(n) = n$ pour $n \neq 0$, mis $f \circ g(0) = f(0) = 1$.
Conclusion : il faut bien les deux conditions $f \circ g = Id_F$ ET $g \circ f = Id_E$ pour affirmer la bijectivité.

Proposition - Relation entre f et f^{-1}

Si f est une bijection de E sur F, on a

$\forall x \in E, (f^{-1} \circ f)(x) = x$ soit $f^{-1} \circ f = Id_E$;
$\forall y \in F, (f \circ f^{-1})(y) = y$ soit $f \circ f^{-1} = Id_F$;
$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$;
$(f^{-1})^{-1} = f$.

Pour aller plus loin - Homographie de $\mathbb{C}$

Comme le montre l'exercice, il y a une certaine stabilité pour les fonction homographique $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ (réciproque de la même forme).
Il s'agit d'une famille de transformation de $\mathbb{C}$ très étudiée : en particulier elle conserve le birapport !
Notons que dans ce cas, il vaut mieux se placer sur $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$...

Démonstration

Soit $x \in E$, avec $y = f(x)$, on $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ car $y = f(x)$. Donc $f^{-1} \circ f = Id_E$.
Soit $y \in F$, notons $x = f^{-1}(y)$, donc $y = f(x)$ et ainsi : $f(f^{-1}(y) = f(x) = y$. Donc $f \circ f^{-1} = Id_F$.
L'équivalence proposée découle de la définition.
$(f^{-1})^{-1} : E \to F, z \mapsto y$ tel que $f^{-1}(y) = z$, i.e. $y = f(z)$. Ainsi $\forall\, z \in E, (f^{-1})^{-1}(z) = f(z)$. □

Exercice

Soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z+2i}{z-i} \end{array}$$

Montrer que l'on peut trouver $F \subset \mathbb{C}$ tel que l'application $\hat{f}$ de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans F définie par $\hat{f}(z) = f(z)$ soit une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Correction

$f(z) = Z \iff \dfrac{z+2i}{z-i} = Z \iff z+2i = Z(z-i) \iff z(1-Z) = -2i - Zi \iff z = \dfrac{(Z+2)i}{Z-1}$.
Donc si $Z \neq 1$, $f(z) = Z \Longrightarrow h(Z) = z$, avec $h : Z \mapsto \frac{(Z+2)i}{Z-1}$.
Ainsi $\hat{f} : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}, z \mapsto f(z)$ est bijective et admet une application réciproque : $\hat{h}$.
Il est possible de donner une interprétation géométrique à ce calcul.

Théorème - Bijection réciproque d'une composée

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections, alors $g \circ f$ est une bijection et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration

$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ f = Id_E$.
$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = Id_F$.
On a ainsi et la bijectivité de $g \circ f$ et la valeur de $(g \circ f)^{-1}$. □

3. Image directe et image réciproque d'un ensemble

Heuristique - Si les applications ne sont pas bijectives

Si $f : E \to F$ n'est pas bijective, peut-on néanmoins trouver « comme » une application réciproque.
On a vu que tout n'est pas perdu, à condition de limiter l'ensemble de départ (pour tenter de gagner l'injectivité) et de réduire l'ensemble d'arrivée (pour gagner la surjectivité).
Dans le premier cas, on s'intéressera à l'ensemble réciproque de F par f, c'est un sous-ensemble de E.
Dans le second cas, on s'intéressera à l'ensemble image de E par f, c'est un sous-ensemble de F.

3.1. Image directe

Définition - Ensemble image

Soit $f : E \to F$ une application.
L'ensemble des éléments de F qui admettent un antécédent par f est une partie de F appelée ensemble image ou image de f et notée $\operatorname{Im} f$:

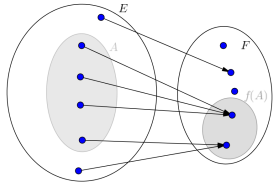
$$\operatorname{Im} f = \{y \in F \mid \exists x \in E; y = f(x)\}.$$

Remarque - Autre écriture

On peut écrire $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in E\}$

Représentation - Image directe

Avec un graphe :



Savoir faire - Critère de surjectivité.

On a donc

$$f \text{ surjective } \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$$

Et toute application $f : E \to F$ définit une surjection en restreignant l'ensemble d'arrivée, c'est à dire en considérant l'application de E dans $\operatorname{Im} f$ qui a x associe $f(x)$ (que l'on continue usuellement à noter f, on dit alors que f est surjective de E sur $\operatorname{Im} f$).

Définition - Image directe

Soient $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle image (directe) de A par f la partie de F, notée $f(A)$, définie par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A; y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} = \{f(x); x \in A\}.$$

Remarque - Autres notations en exploitant Im f

On constate que l'on a également $\operatorname{Im} f = f(E)$.
Donc f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.
Et $f(A) = \operatorname{Im} f_{|A}$.

Savoir faire - Montrer que $y \in f(A)$

Pour montrer que $y \in f(A)$ il faut trouver $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Proposition - Stabilité et image
Soit $f : E \to F$ une application et $A_1, A_2 \subset E$. Alors

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2);$$
$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2);$$
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

Démonstration
Supposons que $A_1 \subset A_2$,
Soit $y \in f(A_1)$, alors il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$.
Mais $x \in A_2$ également, donc $y = f(x) \in f(A_2)$.
Donc $f(A_1) \subset f(A_2)$.
Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$ donc il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$.
donc il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$ ou $x \in A_2$ tel que $y = f(x)$
donc $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$ i.e. $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
Réciproquement, soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
donc $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$
donc il existe $x_1 \in A_1$ tel que $y = f(x_1)$ ou $x_2 \in A_2$ tel que $y = f(x_2)$
donc il existe $x_1 \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x_1)$ ou $x_2 \in A_2 \cup A_1$ tel que $y = f(x_2)$
dans tous les cas $y \in f(A_1 \cup A_2)$.
Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$ donc il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$.
donc il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$ et $x \in A_2$ tel que $y = f(x)$
donc $y \in f(A_1)$ et $y \in f(A_2)$ i.e. $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. □

Attention - Une seule inclusion pour l'intersection!
On fera bien attention qu'il n'y a pas l'égalité : $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
Pour se convaincre on peut penser au cas où $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.
Par exemple, avec $f : x \mapsto x^2$, $A_1 = [-2,-1]$ et $A_2 = [1,2]$,
alors $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, et $f(A_1) \cap f(A_2) = [1,4] \cap [1,4] = [1,4]$

Pour aller plus loin - Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$
Pour les suites définies par récurrence par une fonction f itérée, ces notions de partie stable (souvent intervalle) ou de points fixes sont très importants. Nous reviendrons sur ces notions

Définition - Partie stable et application induite
Soit $f : E \to E$ une application. On dit qu'une partie A de E est stable par f si $f(A) \subset A$.
On appelle application induite par f sur A l'application

$$A \to A$$
$$x \mapsto f(x)$$

Exemple - Point fixe
Par exemple pour $x \in E$, le singleton $\{x\}$ est stable si et seulement si $f(x) = x$, c'est-à-dire si x est un *point fixe* de f.

3.2. Image réciproque d'un ensemble

Définition - Image réciproque
Soient $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. On appelle image réciproque de B par f la partie de E, notée $f^{-1}(B)$ (ou $[f \in B]$ en probabilité), définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

C'est donc l'ensemble formé des antécédents par f des éléments de B.

Exemple - Pour $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \exp x$
Par exemple pour

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

on a $f^{-1}([0,4]) = [-2,0,2]$, $f^{-1}(\{4\}) = \{-2,2\}$, $f^{-1}([-1,4[) = [-2,2]$ et pour

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \exp z \end{array}$$

on a $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, $g^{-1}(\{1\}) = \{2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $g^{-1}(\mathbb{R}) = \{L + 2ik\pi \mid L \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$

Attention - Ne pas confondre la fonction f^{-1} et l'ensemble $f^{-1}(B)$
Il s'agit d'une notation qui ne demande pas que f soit bijective. (voir l'exemple précédent)

Savoir faire - Montrer que $x \in f^{-1}(B)$
Pour montrer que $x \in f^{-1}(B)$ il faut montrer que $f(x) \in B$.

Exemple - Fonction sin
Soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{array}$$

Déterminer, si cela a un sens : $f(0)$; $f(\{0\})$; $f([0,\pi[)$; $f(\mathbb{R})$; $f^{-1}(0)$; $f^{-1}(\{0\})$; $f^{-1}([0,+\infty[)$.
$f(0) = 0$; $f(\{0\}) = \{0\}$; $f([0,\pi[) = [0,1]$; $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$; $f^{-1}(0)$ pas de sens ;
$f^{-1}(\{0\}) = \pi\mathbb{Z}$; $f^{-1}([0,+\infty[) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$.

Remarque - Et si f est bijective
Soit $f : E \to F$ un bijection. Pour $B \subset F$ la notation $f^{-1}(B)$ n'est pas ambigüe.
En effet, ici f^{-1} existe, et $f^{-1}(B)$ est l'image de B par f^{-1}. Donc

$$f^{-1}(B) = \operatorname{Im} f_{|B}^{-1} = \{f^{-1}(y), y \in B\} = \{x \in E \mid \exists\, y \in B, x = f^{-1}(y)\}$$
$$= \{x \in E \mid f(x) (= y) \in B\} = f^{-1}(B)$$

Proposition - Stabilité et image réciproque
Soit $f : E \to F$ une application et $B_1, B_2 \subset F$. Alors

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2);$$
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2);$$
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Démonstration
Supposons que $B_1 \subset B_2$,
Soit $x \in f^{-1}(B_1)$, alors $f(x) \in B_1 \subset B_2$ Donc $x \in f^{-1}(B_2)$
Donc $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
On peut reconduire le même genre de démonstration que plus haut. Ou autre :

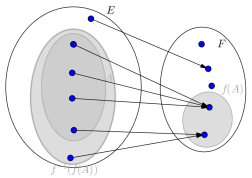
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = \{x \in E \mid f(x) \in B_1 \cap B_2\} = \{x \in E \mid f(x) \in B_1 \text{ et } f(x) \in B_2\}$$
$$= \{x \in E \mid x \in f^{-1}(B_1) \text{ et } x \in f^{-1}(B_2)\} = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

(On a directement l'égalité sans faire la double inclusion).
De même :

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = \{x \in E \mid f(x) \in B_1 \cup B_2\} = \{x \in E \mid f(x) \in B_1 \text{ ou } f(x) \in B_2\}$$
$$= \{x \in E \mid x \in f^{-1}(B_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(B_2)\} = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

□

Représentation - Image directe et réciproque
Avec un graphe :



Attention - Attention $f^{-1}(f(A)) \neq A$ et $f(f^{-1})(B) \neq B$
Le schéma montre sur un exemple qu'on a pas l'égalité…
On a au mieux : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$

Exercice
Démontrer ces inclusions. Donner des contre-exemple de l'inclusion réciproque

Correction
Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$ et donc $x \in f^{-1}(f(A))$.
De même si $y \in f(f^{-1}(B))$, alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$.
Mais comme $x \in f^{-1}(B)$, cela signifie que $f(x) \in B$, donc $y = f(x) \in B$.
Prenons $f : x \mapsto x^2$, $A = [0,2]$, $f(A) = [0,4]$ et $f^{-1}(f(A)) = [-2,2] \supset A$.
C'est un problème d'injectivité De même avec $B = [-1,2]$, $f^{-1}(B) = [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, $f(f^{-1}(B)) = [0,2] \subset B$ *C'est un problème de surjectivité*

4. Fonction indicatrice

4.1. Définition

Définition - Fonction indicatrice
Soit E un ensemble. Pour $A \subset E$, on appelle fonction indicatrice de A l'application de E dans $\mathbb{R}$, notée $\mathbb{1}_A$ ou χ_A, définie par

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Remarque - Pourquoi et comment exploiter une telle fonction ?
Cela permet de représenter certaines fonctions définies par morceaux par une seule expression (très utile en probabilités) sur $\mathbb{R}$, par exemple la loi uniforme sur $[a,b]$ a pour densité $\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}$ et la loi exponentielle de paramètre λ a pour densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$.
Cela permet également de ramener certaines égalités d'ensemble à des calculs sur les fonctions.

4.2. Propriétés ensemblistes et calcul avec fonctions indicatrices

Proposition - Propriété essentielle de la fonction indicatrice
Soient A et B deux parties de E. Alors

$\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A \subset B$ $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$ (d'où le nom de fonction caractéristique);
$\mathbb{1}_{\complement_E A} = 1 - \mathbb{1}_A$;
$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$;
$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

Exercice
Soit E un ensemble. Pour deux parties A et B de E, on appelle différence symétrique de ces deux parties la partie de E définie par

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Comment exprimer la fonction indicatrice de $A\triangle B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B ?
En déduire que pour trois parties A, B, C de E, on a $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

Correction

$\mathbb{1}_{A\triangle B} = \mathbb{1}_{A\cup B} - \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$ On a donc $A\triangle B = B\triangle A$ (ce qui est assez évident).
On a également :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A\triangle B)\triangle C} &= \mathbb{1}_{A\triangle B} + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_{A\triangle B}\mathbb{1}_C \\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2[\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C] \\ &\quad +4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\end{aligned}$$

Ce résultat est symétrique en A, b et C, donc : $(A\triangle B)\triangle C = (B\triangle C)\triangle A = A\triangle(B\triangle C)$.

Démonstration
Si $A \leqslant B$. Soit $x \in E$ Supposons que $\mathbb{1}_A(x) = 1$, alors $x \in A$ donc $x \in B$ donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$.
Donc, comme les indicatrices sont à valeurs dans $\{0,1\}$, on a $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$.
Réciproquement, si $\mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$. Soit $x \in A$, alors $\mathbb{1}_B(x) \geqslant \mathbb{1}_A(x) = 1$, donc $x \in B$.
La double inclusion signifie la double inégalité. Donc $A = B$ ssi $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
$x \in \complement_E(A) \leftrightarrow x \notin A \leftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 0 \leftrightarrow 1 - \mathbb{1}_A(x) = 1$.
Quatrième proposition :

$$\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$
$$\Longleftrightarrow \mathbb{1}_A(x) = 1 \text{ et } \mathbb{1}_B(x) = 1 \Longleftrightarrow 1 = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = \left(\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B\right)(x)$$

car pour $a, b \in \{0,1\}$, $a \times b = 1$ si et seulement si $a = b = 1$ Comme il n'y a que deux valeurs, on peut affirmer $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
Cinquième proposition :
On peut aussi faire un autre type de démonstration, avec comme une table de vérité

$x \in ?$	$\mathbb{1}_{A\cup B}(x)$	$\mathbb{1}_A(x)$	$\mathbb{1}_B(x)$	$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x)$
$x \in A, x \in B$	1	1	1	$1+1-1=1$
$x \in A, x \notin B$	1	1	0	$1+0-0=1$
$x \notin A, x \in B$	1	0	1	$0+1-0=1$
$x \notin A, x \notin B$	0	0	0	$0+0-0=0$

□

On retrouve évidemment des résultats comparables à ceux vus en logique…

5. Cardinal d'ensemble fini

5.1. Principe des tiroirs

Nous considérons ici que l'ensemble $\mathbb{N}$ est bien connu. Nous expliquerons au chapitre suivant sa construction, en attendant, il nous faut savoir que c'est l'ensemble d'appui du raisonnement par récurrence….
On rappelle que l'on note $\mathbb{N}_k = \{1,2,3,\dots k-1,k\}$, l'ensemble des k premiers entiers naturels non nuls.
On commence par deux lemmes.

Lemme - Injection de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_p$. Principe des tiroirs (DIRICHLET)
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.
S'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ injective, alors $n \leqslant p$.
Sous sa forme contraposée : si $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ avec $n > p$,
Alors il existe $x \neq x\prime \in \mathbb{N}_n$ tel que $\varphi(x) = \varphi(x')$ (φ non injective).

Démonstration
On peut le démontrer par récurrence sur n.
Posons, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$: « $\forall\, p \geqslant 1$, $(\exists\, \varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$ injective$) \Rightarrow n \leqslant p$ ».
— Le cas $n = 1$ est simple, car nécessairement $p \geqslant 1$.
Donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $\varphi : \mathbb{N}_{n+1} \to \mathbb{N}_p$ injective.
On note $r = \varphi(n+1) \in \mathbb{N}_p$.
On considère $\psi : \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}_p$, $k \mapsto \begin{cases} p & \text{si } k = r \\ r & \text{si } k = p \\ k & \text{sinon} \end{cases}$.
En fait, ψ intervertit p et r. ψ est une bijection de $\mathbb{N}_p$ sur $\mathbb{N}_p$.
Donc, par composition, $\psi \circ \varphi : \mathbb{N}_{n+1} \to \mathbb{N}_p$, injective et $(\psi \circ \varphi)(n+1) = \psi(r) = p$.
Notons $\Psi = (\psi \circ \varphi)_{|\mathbb{N}_n}$, alors Ψ est également une injection (par restriction).
Et $\Psi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_{p-1}$.
On peut appliquer $\mathscr{P}_n$ avec Ψà condition que $p \geqslant 2$. Dans ce cas : $n \leqslant p-1$.
Et si $p = 1$, alors $\phi(n) = 1 = \phi(n+1)$, donc ϕ ne peut être injective, ce cas n'est pas possible.
Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.
□

5.2. Classe des ensembles de même cardinal

Lemme - $\mathscr{R}$ comme relation d'équivalence
On note $\mathscr{R}$, la relation entre ensembles définies par :
$$E \mathscr{R} F \iff \exists\, \varphi : E \to F, \text{bijective}$$
$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Démonstration
On vérifie les trois qualités d'une relation d'équivalence :
— Pour tout ensemble E, l'application $\varphi : E \to E, x \mapsto x$ est bijective de E sur E.
Donc pour tout E, $E \mathscr{R} E$ i.e. $\mathscr{R}$ est reflexive.
— Soient deux ensembles E et F tels que $E \mathscr{R} F$.
Alors il existe $\varphi : E \to F$ bijective de E sur F.
Elle admet une réciproque $\varphi^{-1} : F \to E$ bijective.
Donc pour tout E, F, $E \mathscr{R} F \Rightarrow F \mathscr{R} E$ i.e. $\mathscr{R}$ est symétrique.
— Soient trois ensembles E, F et G tels que $E \mathscr{R} F$ et $F \mathscr{R} G$.
Alors il existe $\varphi_1 : E \to F$ et $\varphi_2 : F \to G$ bijectives.
$\phi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ est une bijection de E sur G.
Donc pour tout E, F, G, $E \mathscr{R} F$ et $F \mathscr{R} G \Rightarrow E \mathscr{R} G$ i.e. $\mathscr{R}$ est transitive.
□

Définition - Ensemble de cardinal n. Ensemble fini.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit qu'un ensemble E est fini de cardinal $n (\in \mathbb{N})$, si $E \mathscr{R} \mathbb{N}_n$. On note $\text{Card}(E) = n$
On dit qu'un ensemble E est fini, si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que E est fini de cardinal n.
Une fonction $\varphi : \mathbb{N}_n \to E$ bijective s'appelle une énumération de E. Elle permet d'écrire $E = \{\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)\}$ (ou parfois $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Exemple - Cardinal de $E = \{1, 2, \dots k\}$
L'identité est bijective de E sur $\mathbb{N}_k$, donc $\text{card}(E) = k$.

Exercice
Montrer que si $n, p \in \mathbb{N}$ et $n < p$, alors on n'a pas $\mathbb{N}_n \mathscr{R} \mathbb{N}_p$.

Correction
On démontre le résultat contraposé.
Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{N}_n \mathscr{R} \mathbb{N}_p$.
Alors il existe $\varphi : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_p$, bijective donc injective.
Et d'après le résultat admis : $n \leqslant p$.
Et par symétrie de la relation $\mathscr{R}$, on a de même : $p \leqslant n$.
Ainsi $n = p$. Donc par contraposée :
$$n < p \Longrightarrow n \neq p \Longrightarrow \text{NON } [\mathbb{N}_n \mathscr{R} \mathbb{N}_p]$$

Proposition - Classe d'équivalence pour $\mathscr{R}$
Sur l'ensemble des ensembles $E, F, \dots$ de cardinaux finis, on a l'équivalence : $E \mathscr{R} F \Longleftrightarrow \text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.
Les classes d'équivalence pour $\mathscr{R}$ sont formé des ensembles de même cardinaux.
On peut les *paramétrer* par leur cardinaux

Pour aller plus loin - Construction de $\mathbb{N}$
Un mode de construction de $\mathbb{N}$ qui a fait grand bruit au début du XX^e siècle consistait à dire que l'ensemble des nombres entiers était en fait l'ensemble des cardinaux possibles pour les ensembles finis.
Qu'est-ce que 3, un représentant de tous les ensembles à 3 éléments. Si on veut…

5.3. Cardinal, fonction indicatrice et somme (finie)

Proposition - Calcul avec l'indicatrice
Soit E, un ensemble fini et A un sous-ensemble de E.
Alors A est fini et le calcul $\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$ a un sens, il vaut $\text{Card}(A)$.

Démonstration
Comme E est un ensemble fini, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi : E \to \mathbb{N}_k$ bijective.
On peut donc écrire que $E = \{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2) \dots \varphi^{-1}(k)\}$ que l'on préfère noter $\{x_1, x_2, \dots x_k\}$.
On a alors la somme $\sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$ qui se calcule de la façon suivante : $\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_A(x_i)$.
On note alors $\varphi : A \to \mathbb{N}$, $x_h (\in A \subset E) \mapsto \sum_{i=1}^{h} \mathbf{1}_A(x_i)$. Alors
— φ est injective :
si $x_h \neq x_\ell$, alors on peut supposer $h < \ell$ (SPDG) et donc $\varphi(x_\ell) = \varphi(x_h) + \sum_{i=h+1}^{\ell} \mathbf{1}_A(x_i) \geqslant \varphi(x_h) + \mathbf{1}_A(x_\ell) \geqslant \varphi(x_h) + 1$, donc $\varphi(x_h) \neq \varphi(x_\ell)$.
— Par ailleurs, par construction $\varphi(A)$ est de la forme $\mathbb{N}_s$ avec $s = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_A(x_i)$:
$\varphi(x_{m+1}) - \varphi(x_m) = \mathbf{1}_A(x_{m+1}) \in \{1, 0\}$. Il ne peut y avoir de trou.
La fonction φ établit donc une bijection de A sur $\mathbb{N}_s$. Nécessairement A est fini et $s = \text{Card}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_A(x_i)$.
□

Corollaire - Inclusion et cardinaux
Si $A \subset B (\in E)$ avec E un ensemble fini, alors $\text{Card}\, A \leqslant \text{Card}\, B$.

Démonstration
On a vu $A \subset B$ implique $\mathbb{1}_A \subset \mathbb{1}_B$.
On somme en tout x de E. □

Exercice
Soient E, un ensemble fini de cardinal n et F, un ensemble fini de cardinal m.
1. On suppose que $f : E \to F$ est une application injective.
   (a) Montrer que $f(E)$ est un ensemble fini de cardinal n.
   (b) Montrer que $n \leqslant m$.
2. Que se passe-t-il si f est surjective ?
3. Démontrer le théorème de Cantor-Bernstein pour des ensembles E et F finis.
$$\exists\, i : E \to F, j : F \to E \text{ injectives} \Longrightarrow \exists\, b : E \to F \text{ bijective}$$

Pour aller plus loin - Cardinal de réunions d'ensembles finis
On verra plus tard qu'avec $\mathbb{1}_{A \cup B} + \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$, on a $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
Que vaut $\text{Card}(A \cup B \cup C) = ?$

Correction

1. (a) $E \mathscr{R} \mathbb{N}_n$. Et on note $\hat{f} : E \to f(E), x \mapsto f(x)$.
Par définition de $f(E)$: pour tout $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = \hat{f}(x)$.
Donc $\hat{f}$ est surjective de E sur $f(E)$.
Et si $\hat{f}(x) = \hat{f}(x')$, alors $f(x) = f(x')$ et donc $x = x'$, car f injective.
Donc $\hat{f}$ est injective.
Par conséquent $\hat{f}$ est bijective de E sur $f(E)$ et donc $E \mathscr{R} f(E)$.
Par transitivité, $f(E) \mathscr{R} \mathbb{N}_n$, $f(E)$ est un ensemble fini de cardinal n.
   (b) On note $\varphi : E \to \mathbb{N}_n$, bijective (elle existe bien car $E \mathscr{R} \mathbb{N}_n$).
Alors φ^{-1} est injective. Il en est de même de $f \circ \varphi^{-1}$ (f est injective).
Puis on note $\psi : F \to \mathbb{N}_m$ bijective (elle existe bien car $F \mathscr{R} \mathbb{N}_m$).
ψ est injective et par composition :
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$$
est également injective. Donc $n \leqslant m$.
2. Si f est surjective : $f(E) = F$, et donc $\text{Card}\, F = \text{Card}\, f(E)$.
Or $\text{Card}(f(E)) \leqslant \text{Card}\, E$, donc $\text{Card}\, F \leqslant \text{Card}\, E$.
3. Soient E et F deux ensembles finis.
On suppose qu'il existe $i : E \to F$ injective. Donc d'après 2., $\text{Card}(E) \leqslant \text{Card}(F)$.
On suppose qu'il existe $j : F \to E$ injective. Donc d'après 2., $\text{Card}(F) \leqslant \text{Card}(E)$.
Donc, par double inégalité : $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.
D'après la question 1.(c), cela signifie que $E \mathscr{R} F$. Et par définition, cela signifie qu'il existe une bijection de E sur F.
$\exists\, i : E \to F, j : F \to E$ injectives $\Longrightarrow \exists\, b : E \to F$ bijective

L'exercice donne le résultat suivant (dans le cas injectif)

Pour aller plus loin - Dénombrable (au plus)
On étendra l'énumération à $\mathbb{N}$ entier.
On dit qu'un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
On dit qu'un ensemble est au plus dénombrable s'il est

Proposition - Cardinaux, injectivité et surjectivité
Si E et F sont des ensembles finis.
S'il existe une fonction $f : E \to F$ injective, alors $\text{card}E \leqslant \text{card}(F)$ (la réciproque est vraie).
S'il existe une fonction $f : E \to F$ surjective, alors $\text{card}F \leqslant \text{card}(E)$ (la réciproque est vraie).

Démonstration
On a toujours $\text{card}f(E) \leqslant \text{card}(E)$, avec égalité ssi f injective.
On a toujours $\text{card}f(E) \leqslant \text{card}(F)$, avec égalité ssi f surjective. □

6. Familles

6.1. Familles quelconques

On peut définir de manière formelle la notion de famille d'éléments ou de famille d'ensemble.

Définition - Familles
Soient I et E deux ensembles. On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute "liste" (finie ou non, avec répétitions éventuelles), notée $(a_i)_{i\in I}$, telle qu'à tout élément de I (appelé indice) soit associé un unique élément a_i de E (appelé terme d'indice i de la famille).
Cette famille peut donc être considérée comme l'application

$$\begin{array}{rl} a: & I \to E \\ & i \mapsto a_i = a(i) \end{array}$$

Définition - Sous famille
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un ensemble E.
Si $J \subset I$, on dit que $(a_i)_{i\in J}$ est une sous-famille de $(a_i)_{i\in I}$.
on dit également que $(a_i)_{i\in I}$ est une sur-famille de $(a_i)_{i\in J}$.

Exemple - $E = \mathbb{R}$ **et** $I = \mathbb{N}$
Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{N}$, on définit ainsi une *suite* de réels.

Définition - Intersection et réunion d'une famille de parties
Soient un ensemble I (les indices) et un ensemble E.
On considère une famille de parties de E (c'est-à-dire une famille d'éléments de $\mathscr{P}(E)$) $(A_i)_{i\in I}$.
On note

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\} \text{ et } \bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

Exemple - $E = \mathbb{R}$
Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, on a

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} [-k,k] = \quad , \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [-k,k] = \quad , \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right[= \quad .$$

Exercice
On dit que la suite numérique (u_n) converge vers ℓ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \epsilon$$

1. Montrer que $|u_n - \ell| < \epsilon \iff \ell \in]u_n - \epsilon, u_n + \epsilon[$.
2. En déduire que l'ensemble des limites possibles pour la suite (u_n) est l'intersection d'une réunion d'intersection d'ensembles

Correction

1. $|u_n - \ell| < \epsilon \iff -\epsilon < \ell - u_n < \epsilon \iff u_n - \epsilon < \ell < u_n + \epsilon \iff \ell \in]u_n - \epsilon, u_n + \epsilon[$
2. On a donc :

$$\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \quad \{\ell \mid \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \epsilon\} = \bigcap_{n\geqslant N}]u_n - \epsilon, u_n + \epsilon[$$

Puis

$$\forall \epsilon > 0, \quad \{\ell \mid \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \epsilon\} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n\geqslant N}]u_n - \epsilon, u_n + \epsilon[\right)$$

Et

$$\{\ell \mid \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \epsilon\} = \bigcap_{\epsilon>0} \left[\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n\geqslant N}]u_n - \epsilon, u_n + \epsilon[\right) \right]$$

6.2. Famille indexée sur $\mathbb{N}$. Suites

Vocabulaire de base sur les suites (infinies)

L'ensemble E n'est pas précisé pour le moment. Cela peut être $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou autre chose ($\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$...).
Par la suite nous pourrons avoir besoin que l'ensemble E soit ordonné.

Définition - Suite et ensemble de suites
Soit E un ensemble.
Une suite est une application $u : \mathbb{N} \to E$ (on dira aussi qu'une application de $\{n \in \mathbb{N} | n \geqslant n_0\}$ dans E où $n_0 \in \mathbb{N}$ est une suite). On note cette application sous forme indicielle :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{(éventuellement } (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{) ou } (u_n)$$

On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans E.

Attention - Avec ou sans parenthèses
(u_n) désigne une suite alors que u_n désigne un nombre de E (le n ou $n+1$-ième terme de la suite).

Exemple - Suite (ou famille) de fonctions
Il arrivera, de plus en plus souvent durant ces années de CPGE que vous rencontriez des suites de fonctions.
On les note en générale (f_n), avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$.
On peut, par exemple, avoir à étudier $M_n = \sup_{x\in I} f_n(x)$, puis le comportement de la suite (M_n).

$\mathbb{N}$ est ordonnée

Heuristique - Particularité des suites aux familles
L'ensemble d'indexation des suites $\mathbb{N}$ a une particularité très importante que n'a pas I.
Il est ordonné naturellement. Ainsi, une notion importante des suites qui n'existe pas pour les familles est la notion de suite croissante que l'on verra un peu plus bas ou encore les propriétés vraies à partir d'un certain rang.
Autre propriété : si $A \subset \mathbb{N}$, alors A est borné si et seulement si A est fini.

Définition - Propriété vraie à partir d'un certain rang...
On dit qu'une propriété $p(n)$ est vérifiée à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la propriété $p(n)$ soit vraie pour $n \geqslant n_0$.

Exercice
Quelle est le contraire, *formalisée*, d'une propriété vraie à partir d'un certain rang ?
Que penser également de $A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \text{ vraie}\}$

Correction
La formalisation positive est : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant n$, $p(n)$ est vraie. La négation donne : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, n' \geqslant n$ tel que $p(n)$ fausse.
Dans le premier cas A est bornée (par n_0) et dans le second cas A est infini.

Analyse - Suites extraites (sous-suite)
Si on enlève des termes d'une suite, on obtient une suite extraite.
Soit E une partie infinie de $\mathbb{N}$. On dit $(u_n)_{n\in\mathbb{E}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Le problème est que l'indexation sur E n'est pas très aisée à exploiter.
Par ailleurs, la particularité de la croissance doit être conservé. Il faut garder l'ordre.
On aimerait que si $\varphi : \mathbb{N} \to E(\subset \mathbb{N})$ est une bijection, elle conserve l'ordre :

$$k \leqslant h \Longleftrightarrow \varphi(k) \leqslant \varphi(h) (\in E)$$

On a donc la définition suivante :

Définition - Suites extraites
On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{\varphi(n)}$$

. On note parfois : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = u_{n_k}$.

Exemple - Suites extraites paires et impaires
La suite extraite des termes d'indice pair de (u_n) est la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
La fonction φ est ici $n \mapsto 2n\ldots$

Exercice
Montrer que si $p(n)$ est vraie à partir d'un certain rang alors elle est vraie pour tous les termes d'une suite extraite de $\mathbb{N}$ à préciser

Correction
Il s'agit simplement de la suite obtenue avec $\varphi : k \mapsto n_0 + k$

Proposition - Suite extraite et ensemble infini
Considérons une famille de propriété indexée par $\mathbb{N}$, notée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On note $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ vraie.}\}$. Alors
A est infinie si et seulement si $\exists\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P_{\varphi(n)}$ est vraie.

Démonstration
Si il existe une suite extraite de (P_n) toujours vraie,
i.e. si il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P_{\varphi(n)}$ est vraie.
Notons $A' = \varphi(\mathbb{N}) = \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots \varphi(n), \ldots\} = \{\varphi(k), k \in \mathbb{N}\}$, c'est un ensemble infini car φ est injectif.
Enfin $A' \subset A$. Donc A est infinie
Réciproquement, supposons que A est infini.
Il faut construire φ.
$A \subset \mathbb{N}$, donc A possède un plus petit élément $n_0 = \varphi(0)$.
Construisons φ par récurrence, i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$, on donne une valeur à $\varphi(k)$ bien déterminée, selon les valeurs de $\{\varphi(0), \ldots \varphi(k-1)\}$.
Ainsi fixons $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\varphi(0) < \cdots < \varphi(k-1)$ sont bien définis.
L'ensemble $A_k = \{\varphi(0), \ldots \varphi(k-1)\}$ est fini, donc $B_k = A \setminus [\![0, \varphi(k-1)]\!]$ est infini, inclus dans $\mathbb{N}$.
Il possède un plus petit élément noté $n_k = \varphi(k)$ et $\varphi(k) > \varphi(k-1)$ et $P_{\varphi(k)}$ est vraie. □

Suites bornées

On considère $E, \preceq$ un ensemble ordonnée.

Définition - Suite majorée, minorée, bornée
On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est
- majorée s'il existe $M \in E$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \preceq M$.
- minorée s'il existe $m \in E$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $m \preceq u_n$.
- bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque - Familles bornées, majorées...
Cette définition est également adaptable au cas des familles simples.

Exercice
Montrer qu'une suite majorée à partir d'un certain rang est une suite majorée.

Correction
Si (x_n) est majorée à partir du rang n_0,
Alors il existe M tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $x_n \leqslant M$.
Notons $M' = \max(M, x_0, x_1, \ldots x_{n_0-1})$ (ensemble fini), alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant M'$

Suites monotones

Définition - Suite croissante, décroissante
On dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E est
- croissante
  si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \preceq u_{n+1}$.
- décroissante
  si $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \preceq u_n$.
- monotone si elle est croissante ou décroissante.
- stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exemple - Deux suites monotones :
- La suite (u_n) où $u_n = \binom{2n}{n}$ est monotone.
  $u_{n+1} - u_n = \binom{2n}{n}\left(\frac{(2(2n+1)}{n+1} - 1\right) = \binom{2n}{n}\frac{3n+1}{n+1} > 0$
- Soit (u_n) une suite de nombres positifs et $m_p = \inf_{n\geqslant p} u_n$. Alors (m_p) est une suite croissante.
  En effet : $m_p = \min(m_{p+1}, u_p)$, donc $m_p \leqslant m_{p+1}$

Nous élargirons ces notions, lorsque nous nous concentrerons sur les suites numériques, une fois que $\mathbb{R}$ sera construit...

7. Bilan

Synthèse

- Depuis la fin du XIX, on travaille en mathématiques à partir d'ensembles. On peut aussi passer d'un ensemble à un autre par des applications. Les applications injectives ne mélangent pas les éléments de l'ensemble du départ, les applications surjectives sont complètes (vu de l'arrivée).
- Très souvent en mathématiques (probabilité, construction de l'intégrale), on s'intéresse plutôt aux ensembles réciproques (ie des antécédents) $f^{-1}(B)$ qu'aux ensembles images directes $f(A)$.
- La fonction indicatrice d'un ensemble A dans E est une projection naturelle de E sur A. Elle est d'une utilité essentielle en mathématique, par exemple pour calculer le cardinal (ou en probabilité).
- On termine par décrire les propriétés pour des familles indexées sur un ensemble I fini ou dénombrable.