

**Première partie**

**Techniques algébriques,  
à travers l'histoire**



# Chapitre 1

## Calculs et opérations avec des sommes ou des produits

### Résumé -

Pour commencer, nous apprenons à manipuler les symboles  $\Sigma$  et  $\prod$ .

Nous prendrons également le temps d'étudier les méthodes d'étude des doubles sommes (finies).

Les résultats se basent sur la commutativité de l'addition. Tant que les sommes sont finies, il n'y a pas de surprise dans les résultats obtenus. Le cas infini sera étudié plus tard. Les résultats sont assez naturels (il suffit de mettre des ... si on a des doutes). La formule de télescopage peut donner des formules explicites (cf sommes géométriques, formule des petits Bernoullis ou formule sommatoire de Pascal). La seule expression plus compliquée est la formule associée à la sommation par paquets.

Nous obtenons alors un premier résultat intéressant : les coefficients binomiaux (point de vue complémentaire à celui vu au lycée) et leur application à la formule du binôme de Newton. Le cours est complété par une activité : Équations polynomiales / Développement / Factorisation / Racines.

Enfin, voici une liste de petites vidéo ou conférence visionnable sur internet et en lien avec le sujet (de pénibilités variées) :

- Yvan Monka - Symbole Sigma. <https://www.youtube.com/watch?v=0zspJuzo7L8>
- Elj - Nombres de Catalan. <http://eljdx.canalblog.com/archives/2017/02/20/34959863.html>
- Maths moi ça - L'étonnant triangle de Pascal. <https://www.youtube.com/watch?v=IzkfjbWffpc>
- Mathieu Bautista - L'histoire du x. <https://www.youtube.com/watch?v=AW7uNg9RLCs>

### Sommaire

|      |                                             |    |
|------|---------------------------------------------|----|
| 1.   | Quelques problèmes                          | 6  |
| 2.   | Symboles $\Sigma$ et $\prod$                | 7  |
| 2.1. | Définition et formule récurrente            | 7  |
| 2.2. | Généralisation de la notion                 | 9  |
| 2.3. | Avec Python                                 | 12 |
| 3.   | Evaluer explicitement des sommes            | 13 |
| 3.1. | Télescopage                                 | 13 |
| 3.2. | Des sommes connues                          | 13 |
| 3.3. | Sommes doubles (multiples...)               | 15 |
| 3.4. | Exercice d'applications                     | 18 |
| 4.   | Coefficients binomiaux et formule du binôme | 19 |
| 4.1. | Factorielles et coefficients binomiaux      | 19 |
| 4.2. | Triangle de Pascal                          | 20 |
| 4.3. | Formule du binôme                           | 21 |
| 5.   | Bilan                                       | 22 |

## 1. Quelques problèmes

### ? Problème 1 - Nombres triangulaires

Lorsqu'on fait la somme  $1+1+1+\dots 1$ , on peut décrire tous les nombres entiers.

Si on somme ensuite les résultats obtenus :  $1+2+\dots+n$ , quel nombre obtient-on ?

Ce nombre est appelé nombre triangulaire d'ordre  $n$ , noté  $T_n$ . Par exemple :  $T_4 = 1+2+3+4 = 10$ .

Si on somme ensuite les résultats obtenus :  $T_1 + T_2 + \dots + T_n = 1+3+6+10+\dots+T_n$ , quel nombre obtient-on ? Et si on continue, toujours ?

### ? Problème 2 - Suite de nombres. Et le suivant ?

Prenons la suite obtenue à la question précédente : 1, 4, 10, 20, 35. Quel est le terme suivant ?

Et de manière générale étant donnée une suite quelconque de  $n$  termes donnés explicitement, comment trouver le terme suivant ?

### ? Problème 3 - Développement de puissance

Considérons le calcul typiquement algébrique :  $(a+b)^n$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres quelconques et  $n$  en entier.

L'expérience montre que pour  $n=4$  (par exemple), on trouve en développant cette expression :  $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ .

Est-il possible de décrire simplement cette expression : quels sont les facteurs  $a$  et  $b$  obtenus, est-il facile d'exprimer/calculer le nombre situé devant  $a^i b^j$  ?

Et que se passe-t-il si l'on considère plutôt  $(a+b+c+\dots)^m$  ?

### ? Problème 4 - Développement

Donner, pour tout entier  $n$ , la forme développée des applications polynomiales  $x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)$  et  $x \mapsto (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx)$

### ? Problème 5 - Kwarizmi

Résoudre, comme El Kwarizmi, l'équation  $x^2 + 10x = 39$  en n'exploitant que des méthodes géométriques (calcul d'aire, nombres positifs...).

On commence par considérer un carré de côté  $x$  et deux rectangles de côtés  $x$  et 5. On complète...

Adapter la méthode pour résoudre  $x^2 + 21 = 10x$ .

Que pensez-vous de la nature des nombres  $a$ ,  $b$  ou  $c$  si l'on souhaite générer la méthode pour résoudre l'équation associée au trinôme du second degré :  $ax^2 + bx + c = 0$

**? Problème 6 - Mauvais vers italiens**

« *Tartalea exposa sa solution en mauvais vers italiens* » (Lagrange, Oeuvres, 1795).

Il existe une méthode (Tartaglia-Cardan) pour résoudre les équations de degré 3 (voir cours). Comment pouvait-on l'écrire alors qu'il n'existait ni le symbole  $=$ , ni les notations  $x^2 \dots$  ?

**? Problème 7 - Tartaglia et Cardan**

Trouver toutes les solutions de l'équation  $x^3 + 6x = 20$ , avec la méthode de Tartaglia et Cardan, en posant  $x = u - v$  et en exploitant les symétries du problème (on peut résoudre :  $u^3 - v^3 = \dots$  et  $u^3 v^3 = \dots$ ).

Et pour une équation de type  $ax^3 + px + q = 0$  ?

De même donner les solutions de l'équation  $x^4 + px^2 + 1 = 0$ .

**2. Symboles  $\Sigma$  et  $\prod$** **2.1. Définition et formule récurrente****Ecriture classique****Remarque - Terme sans ambiguïté**

La façon naturelle d'écrire une somme longue est de :

1. donner les premiers termes
2. s'assurer que la suite logique des termes est comprise, puis de remplacer ces termes (en grands nombres) par des points de suspension
3. donner la valeur du dernier terme.

Mais comment s'assurer qu'il n'y ait pas ambiguïté ?

On préfère souvent une formulation explicite :

**Définition - Notation  $\Sigma$  et  $\prod$** 

Soient  $a_1, \dots, a_n$   $n$  nombres réels ou complexes. L'addition dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  étant commutative (on somme dans l'ordre que l'on souhaite) et associative (les parenthèses ne sont pas nécessaires), on note

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n$$

De même on note

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Le terme  $a_i$  s'écrit sous forme d'une formule dépendant de  $i$ .

**Histoire - Notation  $\Sigma$** 

Il semble que ce soit Euler (1755) qui utilise pour la première fois le symbole  $\Sigma$  pour désigner une somme. Cette notation est particulièrement utile pour l'étude des séries (cf fin d'année).

Nous le verrons au prochain chapitre, Euler a donné beaucoup de symboles importants aux mathématiques.

**Remarque - Bons usages et généralisation de notation**

Bien évidemment, l'indice  $i$  (qui peut aussi s'appeler  $k, l, m, p \dots$ ) de la somme peut démarrer à une valeur entière autre que 1, toutefois la valeur de départ (sous le signe  $\Sigma$ ) doit être inférieure à la valeur d'arrivée.

**Exercice**

Ecrire avec le symbole  $\Sigma$ , le calcul  $1 + 2 + 4 + \dots + 128$

**Changement d'indexation**

 **Attention** - Attention à ne pas donner une existence à une variable muette!

 Que vaut  $\left(\sum_{k=1}^n 2^k\right) + k$ ? Rien!

Si on a un doute, on exploite **au brouillon** des points de suspension où l'on se rend compte que les indices  $i$  ou  $k$  n'existent pas vraiment.

 **Analyse - Changement d'indice**

 **Pour aller plus loin - Notation  $\mathbb{N}_n$**

On note, tout au long de l'année :

$$\mathbb{N}_n = \llbracket 1, n \rrbracket$$

Cet ensemble commence bien à 1.

Cette notation n'est pas standardisée

 **Savoir faire - Exemple de changement**

Faire le changement d'indice  $i = n - k$  pour  $\sum_{k=1}^n (2k + 1)$

On a donc  $k = n - i$  et  $2k + 1 = 2n - 2i + 1 = (2n + 1) - 2i$ .

Et le tableau de correspondance :

| $k$ | $i$     |
|-----|---------|
| 1   | $n - 1$ |
| $n$ | 0       |

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{10} (2k + 1) = \sum_{i=0}^{n-1} [(2n + 1) - 2i]$$

On notera que les termes  $i$  sont notés dans l'ordre croissant (ce qui inverse l'ordre du calcul effectivement réalisé).

Exercice

Compléter les expressions qui suivent :

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{\dots}^{\dots} a_{k-1} = \sum_{\dots}^{\dots} a_{n-h}$$

**Somme, par récurrence**

 **Analyse -  $\sum$  et récurrence**

**Proposition - A savoir!**

On a pour  $(a_i)_i, (b_i)_i, \lambda \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n (a_i + b_i) &= \sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=0}^n b_i & \sum_{i=0}^n \lambda a_i &= \lambda \sum_{i=0}^n a_i \\ \prod_{i=0}^n a_i b_i &= \prod_{i=0}^n a_i \times \prod_{i=0}^n b_i & \prod_{i=0}^n \lambda a_i &= \lambda^{n+1} \prod_{i=0}^n a_i\end{aligned}$$

**Démonstration**

 **Remarque - le  $n+1$  de  $\lambda^{n+1}$  dans le dernier produit**  
 ... est donc en fait le cardinal de  $I$ , ensemble sur lequel on fait le produit.

**2.2. Généralisation de la notion**

Puis généralement, ce qui compte en réalité est l'ensemble des éléments additionnés et d'une description (énumérative) de ceux-ci.

**Définition - Extension de notation  $\sum$  et  $\prod$** 

Si  $A$  est un sous-ensemble fini d'éléments de  $E$  ( $= \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  ou autre...), Soit

**Pour aller plus loin - Descriptions des ensembles**

Nous verrons qu'un ensemble se définit en règle générale, soit par extension :  $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\}$  soit par compréhension :  $I = \{i \mid \mathcal{P}(i) \text{ (vraie)}\}$

une description énumérative de  $A : A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ , on note

$$\sum_{a \in A} a = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_p} = \sum_{i=1}^p i a_i$$

Encore plus généralement, avec les formules :

- indicatrice  $\mathbb{1}_X : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{si } x \notin X \end{cases}$
- ou symbole d'Iverson  $[\mathcal{P}(t)] = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{P}(t) \text{ vrai} \\ 0 & \text{si } \mathcal{P}(t) \text{ faux} \end{cases}$

On peut également noter,

$$\sum_{a \in A} a = \sum_{a \in E} a \mathbb{1}_A(a) = \sum_{a \in E} a [\mathcal{P}(a)]$$

cette dernière se rencontre parfois sous l'écriture  $\sum_{a \mid \mathcal{P}(a)} a = \sum_{a \in E} a [\mathcal{P}(a)]$

 **Exemple** -  $\sum_{i=1}^n a_i$

#### Exercice

Sans utiliser la notation  $\sum$ , donner l'expression développée de

$$\sum_{i \mid 0 \leq i \leq 6} \frac{1}{2i+1}, \quad \sum_{i \mid 0 \leq 2i \leq 7} \left(3i + \frac{1}{i+1}\right), \quad \sum_{i \mid 0 \leq i^3 \leq 10} \frac{1}{i^2 + i + 1}.$$

#### Exercice

Exprimer la somme des inverses de tous les nombres premiers inférieurs à  $N$

### Sommation par paquets

#### Remarque - Extension des propriétés ensemblistes

Toute les propriétés que nous allons voir maintenant découlent des propriétés sur la description des ensembles.

Par exemple ici, la décomposition de  $E$  sous forme d'une partition.

#### Exercice

Si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles disjoints de  $E$ , montrer que pour tout  $i \in E$ ,  $\mathbb{1}_{A \cup B}(i) = \mathbb{1}_A(i) + \mathbb{1}_B(i)$ .

En déduire que  $\sum_{i \in A \cup B} a_i = \sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in B} a_i$ .

Généralisons ce résultat. Il faut commencer par définir une notation :

#### Pour aller plus loin - Autre notation

On trouve parfois également la notation :  $C = A \sqcup B$  ou encore  $C = A \dot{\cup} B$ .

Ce + est là pour pouvoir signifier un résultat que l'on verra plus loin, si  $C = \biguplus_{i=1}^n A_i$ , alors  $\text{card}(C) =$

$$\sum_{i=1}^n \text{card}(A_i).$$

#### Définition - Réunion disjointe

On note  $C = A \dot{\cup} B$ , par signifier la double information :

- $C = A \cup B$
- $A \cap B = \emptyset$

Autrement écrit :  $x \in C$  si et seulement si  $x \in A$  ou (exclusif)  $x \in B$ .

On peut généraliser cette notation à plusieurs ensembles :

$$C = \biguplus_{i=1}^n A_i \text{ signifie : } x \in C \text{ si et seulement si } \exists ! i \in \mathbb{N}_n \text{ tel que } x \in A_i.$$

On a alors la relation de Chasles pour les sommes :

**Proposition - Sommation par paquets**

Soit une famille  $(E_r)_{r \in S}$  une famille d'ensembles indexés par  $S$ .

On suppose qu'il s'agit d'une famille d'ensembles disjoints 2 à 2 :

$$\forall r \neq r' \in S, E_r \cap E_{r'} = \emptyset.$$

Alors

$$\sum_{r \in S} \left( \sum_{k \in E_r} a_k \right) = \sum_{k \in \bigsqcup_{r \in S} E_r} a_k$$

On voit ici apparaître une double somme. On en reparlera plus loin.

 **Exemple -  $\mathbb{N}$**

**Démonstration** **Remarque - Intervention des symboles  $\Sigma$** 

Dans la démonstration, on a inversé deux symboles  $\Sigma$ . Cela sera justifié par la suite, car il s'agit d'une somme finie.

C'est comme si on sommait les termes dans un tableau : d'abord en ligne, puis en colonne ; ou d'abord en colonne, puis en ligne. Dans tous les cas, on obtient le même résultat car il s'agit d'additionner une et une seule fois tous les termes du tableau.

 **Savoir faire - Exploiter une sommation par paquets**

On a parfois intérêt à découper l'ensemble  $E$  en (réunion de  $m$ ) sous-ensembles disjoints  $E = E_1 \sqcup E_2 \cdots \sqcup E_m$ .

On calcule alors la somme par paquets :

$$\sum_{r=1}^m \left( \sum_{k \in E_r} a_k \right) = \sum_{k \in E} a_k$$

### 2.3. Avec Python

Il arrive souvent que l'on rencontre des calculs de sommes à effectuer sous Python. La méthode est simple, on emploie des boucles :

- `for`, si l'on connaît bien l'ensemble sur lequel est définie  $i$
- `while`, si  $i$  est définie par une propriété

 **Informatique** -  $\sum_{k=n}^m a(k)$

```

1 def Somme1(n,m):
2     S=0
3     for k in range(n,m+1):
4         S=S+a(k)
5     return (S)
```

 **Informatique** -  $\sum_{i \mid f(i) \leq n} a(i)$

```

1 def Somme2(n):
2     S, i=0,0
3     while f(i)<=n:
4         S=S+a(i)
5         i=i+1
6     return (S)
```

 **Remarque - L'ordinateur (calculatrice) comme un obstacle?**

*L'une des principales raisons de la faiblesse des élèves pour le calcul est l'usage trop tôt de la calculatrice.*

*Il faut laisser le temps pour comprendre, maîtriser, puis ne pas oublier le sens du calcul avant de passer à la calculatrice.*

*Néanmoins, il ne faut pas systématiquement tout jeter !*

 **Truc & Astuce pour le calcul - Écrire un programme pour mieux comprendre**

Écrire un programme permet souvent de mieux comprendre la nature du calcul.

C'est le cas en particulier :

- pour le calcul de somme.
- pour le calcul de probabilités.

Dans ce cas, ce n'est pas le calcul mais la modélisation elle-même du problème qui est mieux comprise.

#### Exercice

Écrire une boucle (double ?) pour faire le calcul :

$$\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=i}^{200-i} i \times j$$

 **Remarque - Varier les paramètres et informatique**

*L'informatique permet aussi de facilement faire varier les paramètres. On a vu la force de l'usage des paramètres dans le calcul. Mais c'est aussi, de manière générale, la force de l'excellent mathématicien. Python nous aidera largement : ce n'est que légèrement une boîte noire pour nous, nous aurons donc pour ambition de bien maîtriser tous nos faits et gestes informatiques (pas de clicothérapie!).*

### 3. Evaluer explicitement des sommes

#### 3.1. Télescopage

C'est la seule méthode qui donne une formule explicite.

##### **Savoir faire - Méthode du télescopage (ou dominos)**

Soit  $(u_n)$  une suite. Soient  $p, n \in \mathbb{N}$  tels que  $p \leq n$

Alors  $\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$

$$\left( = (u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + (u_{p+3} - u_{p+2}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) \right)$$

##### **Remarque - « Voir » le télescopage**

Deux remarques :

- Dans la plupart des situations, la somme ne se présente pas directement sous la forme  $\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k)$ , il faut commencer par faire "apparaître" cette forme.
- On peut aussi avoir intérêt écrire la somme avec des points de suspension pour confirmer le télescopage aperçu

##### Exercice

Calculer  $\sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k}$ .

#### 3.2. Des sommes connues

##### **Proposition - Sommes de puissances d'entiers consécutifs**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$



##### **Pour aller plus loin - Théorème fondamentale de l'analyse entière?**

Intégrer  $\leftrightarrow$  Dériver sont les deux problèmes inverses l'un de l'autre. Ils sont définis pour des fonctions de la variable réelle.

Pour la variable entière, les fonctions sont des suites. Et intégrer consiste simplement à faire le calcul  $\sum_{k=0}^n a_k$ . Alors à quoi correspond la dérivation de la variable entière ? Au calcul  $a_{n+1} - a_n$  ! (c'est pas exemple comme cela qu'on voit si une suite est croissante...).

La formule du télescopage présente ce lien :  $\sum \leftrightarrow \delta$

On peut faire une récurrence, ou bien chercher à démontrer le résultat directement. Une méthode classique : user le télescopage.

##### **Démonstration**

##### Exercice

Démontrer par récurrence les résultats précédents

 **Savoir faire - Se passer du formalisme d'une récurrence ou invariant de boucle**

On peut souvent se passer de la formalisation de la récurrence (mais avec les mêmes calculs).

Ici on considère la suite  $u_n = \sum_{k=1}^n k^3 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .

On note que  $u_{n+1} = u_n$  (même calcul que  $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ ) et que  $u_1 = 0$ .

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = 0$ . CQFD.

**Proposition - Calcul d'une somme arithmétique**

Pour une suite arithmétique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

on a :

$$\sum_{k=n}^m u_k = (m - n + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$$

C'est-à-dire :

somme de termes succ. = (nb de termes)  $\times$  (moyenne des termes extrêmes)

**Démonstration**

Exercice

Démontrer le résultat en suivant la « méthode de Gauss » (double somme inversée...)

**Proposition - Calcul d'une somme géométrique**

Soit  $x \in \mathbb{R}$  (ou  $x \in \mathbb{C}$ ) et  $n \in \mathbb{N}$ . On a alors :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement pour une suite géométrique de raison  $q \neq 1$ , on a :

$$\text{somme de termes successifs} = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

**Démonstration**

Exercice

Calculer  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

On se rappelle, avec les petits Bernoulli :

**Proposition - Une factorisation à connaître**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

 **Application** -  $3^n - 2^n$ , sous forme d'une addition de  $n$  termes

 **Application** - Factoriser  $a^5 - b^5$

**Démonstration**Exercice

Peut-on factoriser  $a^n + b^n$  ? Si oui, factoriser le.

**3.3. Sommes doubles (multiples...)** **Heuristique - Somme à multiples indices**

On peut faire une somme d'éléments pris dans un ensemble fini. Mais la description de ces éléments n'est pas toujours naturellement donnée sous la forme  $x_i, i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Parfois les éléments apparaissent comme les éléments d'un tableau (*matrice*) et sont donc doublement (ou plus) indexés :  $x_{i,j}, i \in \mathbb{N}_n, j \in \mathbb{N}_m$ .

Les choses se présentent différemment selon que  $i$  et  $j$  sont « indépendants » entre eux ou non.

Cas  $i$  et  $j$  indépendants. Produit cartésien d'ensembles

 **Analyse** - Du sens des formules

**Définition - Somme double**

On considère une famille de nombres réels ou complexes  $(a_{i,j})$  indexée par deux indices  $i$  et  $j$ ,  $i$  compris entre 1 et  $n$ ,  $j$  compris entre 1 et  $m$  où  $n$  et  $m$  sont deux entiers non nuls donnés. On peut représenter ces nombres par un tableau où l'indice  $i$  désigne la ligne et l'indice  $j$  la colonne :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & \dots & a_{i,m} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & \dots & a_{n,m} \end{array}$$

La somme de tous les éléments de ce tableau est notée

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in [1,n] \times [1,m]} a_{i,j}.$$

**Savoir faire - Somme multiple (indépendance)**

Pour la calculer on peut procéder d'au moins deux façons, la première consiste à faire d'abord la somme des termes ligne par ligne, puis d'additionner les résultats :

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \sum_{j=1}^m a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la ligne } i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j},$$

une seconde étant de sommer d'abord les termes colonne par colonne puis d'additionner les résultats :

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} a_{i,j} = \sum_{j=1}^m \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la colonne } j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j}.$$

**Remarque - Diagonale**

Il y a d'autres possibilités, par exemple en sommant suivant des lignes diagonales lorsque  $n = m$ .

On reverra cela plus loin.

**Exercice**

Calculer  $\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} i j$

Comme le montre l'exercice précédent :

**Proposition - Produit de deux sommes (développement ou factorisation)**

Soient des réels (ou des complexes)  $a_i$  et  $b_j$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq p$ . Alors :

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{j=1}^p b_j \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} a_i b_j$$

**Démonstration****Cas  $i$  et  $j$  dépendants****♣ Heuristique - Cas :  $i$  et  $j$  dépendants**

Ici on somme seulement certains termes du tableau rectangulaire  $a_{i,j}$ .

Et donc les indices sont dépendants l'un de l'autre!

Par exemple, dans cette situation, les valeurs prises par  $j$  (à l'intérieur de la somme) dépendent de celles prises par  $i$  (à l'extérieur de la somme). Il y a, en revanche, souvent liberté dans le choix de l'ordre de sommation (d'abord  $i$  ou d'abord  $j$ ).

**🔍 Analyse -  $G = \{a_{i,j}, i \in \mathbb{N}_n, j \in A_i\}$** **Proposition - Somme double classique**  $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j}$ 

Soit  $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$  une famille de nombres réels ou complexes :

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}.$$

**Démonstration**

ExerciceCalculer  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$  **Pour aller plus loin - Formalisme/sens**

On notera ici (mais c'est souvent le cas en mathématiques) que le formalisme est plus efficace que la recherche de sens : il permet une sorte d'automat(hi)sation.

Néanmoins, il est bon de toujours accompagner l'un par l'autre.

 **Savoir faire - Somme multiple (dépendance)**

Pour la calculer on ordonne les indices de sommation :

1. on choisit celle qui sera le plus à l'extérieur (donc à gauche) des symboles  $\sum$ . Elle ne dépend que de paramètres fixés et d'aucun indice.
2. on choisit ensuite la suivante, la seconde dans l'ordre des sommes. Elle dépend des paramètres fixés et de l'indice précédent

...

$$\text{Exemple : } \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^n \left( \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} \right)$$

 **Analyse - Sens de ces modes de sommations****3.4. Exercice d'applications**Exercice

Retrouver la valeur de  $S = \sum_{k=1}^n k$ , en notant que  $S = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k 1$

Exercice

Montrer que  $\left( \sum_{k=1}^n d_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n d_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_i d_j$ .

On peut aussi démontrer l'inégalité célèbre de Cauchy-Schwarz :

Exercice

1. En développant  $\sum_{1 \leq i < j \leq 3} (a_i b_j - a_j b_i)^2$ , montrer que  $\left(\sum_{k=1}^3 a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^3 a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^3 b_k^2\right)$ .

2. De même, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$$

3. A quelle condition a-t-on :  $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$

### Exercice

Ecrire le développement polynôme de

$$\prod_{i=1}^n (x - a_i)$$

Quelle formule retrouve-t-on lorsque tous les  $a_j$  sont égaux ?

## 4. Coefficients binomiaux et formule du binôme

### 4.1. Factorielles et coefficients binomiaux

#### Définitions

Les remarques en marge permettent de s'intéresser aux nombres :

#### Définition - Factorielle et coefficient binomial

Pour  $n$  et  $p$  éléments de  $\mathbb{N}$ ,  $p \leq n$ , on pose :

$0! = 1$  et pour  $n \geq 1$ ,  $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$  qui se lit "factorielle  $n$ "

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ qui se lit « } p \text{ parmi } n \text{ »}$$

On généralise la notation à tout  $p \in \mathbb{Z}$  : si  $p < 0$  ou  $p > n$  (si on n'a pas  $0 \leq p \leq n$ ), alors  $\binom{n}{p} = 0$ .

#### ✎ Pour aller plus loin - Coefficients binomiaux réels

On sent qu'on pourrait s'intéresser plutôt aux nombres

$$\binom{x}{p} = \frac{x(x-1)\dots(x-p+1)}{p!}$$

avec  $x \in \mathbb{C}$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

Dans ce cas, la méthode du triangle de Pascal doit s'adapter, alors que la formule du binôme de Newton reste vraie !

#### 🔴 Remarque - Plus tard...

• Il n'est pas évident que pour  $p \leq n$ ,  $\binom{n}{p}$  est un nombre entier.

Si tel est le cas (on le verra plus loin) cela signifie que  $p!$  divise tout nombre de la forme  $n(n-1)\dots(n-p+1)\dots$

• Nous reprendrons la notion de coefficient binomial lorsque nous ferons du dénombrement. Cela expliquera véritablement l'origine de ce calcul.

#### 💻 Informatique - Calcul de la factorielle avec une boucle

```
1 def factorielle(n):
2     f=1
3     for k in range(1,n):
4         f=f*(k+1)
5     return(f)
```

### Propriétés immédiates

**Proposition - Propriétés**

Pour tout nombres entiers  $n \in \mathbb{N}$  (naturels) et  $p \in \mathbb{Z}$  (relatifs) :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2};$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} \text{ (Formule du capitaine. Elle est fausse pour } p=0)$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \text{ (Relation de Pascal)}$$

**Histoire - Blaise Pascal**

Blaise Pascal (1623-1662) est un français, génie des mathématiques (mais pas uniquement). Il redémontre tout Euclide, seul à 12 ans. Il fonde la géométrie projective (avec Desargues) et la « géométrie du hasard » avec Fermat.

Mais c'est aussi l'inventeur de la brouette, de la première machine à calculer ou du premier transport en commun parisien...

Il présente le triangle de Pascal dans le traité du triangle arithmétique (mais ce n'est pas lui le premier à le découvrir).

**Démonstration****Exercice**

Pour  $n, p$ , simplifier  $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$ . On pourra y « voir » un télescope

**4.2. Triangle de Pascal**

De ces propriétés on déduit un moyen simple de calculer les coefficients binomiaux :

**🔧 Savoir faire - Triangle de Pascal**

On peut alors construire le triangle de Pascal pour pouvoir calculer facilement (addition et non multiplication) les coefficients binomiaux. On écrit ainsi dans un tableau :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \binom{0}{0} & & & & & & & & & & 1 \\
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & & & & 1 & 1 \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & & & & 1 & 2^{=1+1} & 1 \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & & & & 1 & \underline{3} & \underline{3} & 1 \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & & & & 1 & 4 & \underline{6^{=3+3}} & 4 & 1 \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & & & & \vdots
 \end{array}
 \rightarrow$$

On l'a déjà dit :

#### Proposition - Nombres entiers

Pour  $n$  et  $p$  éléments de  $\mathbb{N}$ ,  $p \leq n$ ,  $n!$  et  $\binom{n}{p}$  sont des entiers naturels.

Démonstration

#### 📁 Informatique - Triangle de Pascal

En exploitant des listes (de listes) en informatique, il est possible de créer la  $n^{\text{e}}$  ligne du triangle de Pascal.

```

1 def Pascal(n):
2     L=[0]*(n+1)
3     for h in range(n+1):
4         L[h]=[1]+[0]*n
5     print(L)
6     for h in range(n):
7         for k in range(h+1):
8             L[h+1][k+1]=L[h][k]+L[h][k+1]
9     return(L)

```

### 4.3. Formule du binôme

#### Proposition - Formule du binôme (de Newton)

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $a, b$  deux réels ou deux complexes (ou éléments de tout

#### 📖 Histoire - Isaac Newton



On attribue couramment à Isaac Newton (1642-1707) la révolution scientifique de la science moderne, grâce à son travail mathématique sur les calculs différentiel et intégral et son travail en mécanique (relation fondamentale de la dynamique, loi des forces...).

La formule du binôme qui apparaît ici est en fait due à Pascal (1654), et généralisée une première fois par Newton (avec son travail d'interpolation polynomiale - 1671) puis par Abel avec tout exposant  $n \in \mathbb{R}$  au début du XIX<sup>e</sup> siècle.

anneau et tels que  $a \times b = b \times a$ ). Alors :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Avec  $a = b = 1$  :

**Corollaire -**

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

**Démonstration**



**Pour aller plus loin - De qui parle-t-on ?**

« Il est de bonne famille et il a reçu une excellente éducation. Prodigieusement doué pour les mathématiques, à vingt et un ans il publiait une étude sur le binôme de Newton, qui fit sensation dans toute l'Europe et lui valut de devenir titulaire de la chaire de mathématiques dans une de nos petites universités. Tout donnait à penser qu'il allait faire une carrière extrêmement brillante. Mais l'homme avait une hérédité chargée, qui faisait de lui une sorte de monstre, avec des instincts criminels d'autant plus redoutables qu'ils étaient servis par une intelligence exceptionnelle. Des bruits fâcheux coururent bientôt sur lui dans l'Université, qui l'obligèrent à se démettre. Il vint à Londres où il se mit à donner des cours destinés aux officiers de l'armée. »

Exercice

Calculer  $\sum_{0 \leq p \leq n; p \text{ pair}} \binom{n}{p}$  et  $\sum_{0 \leq p \leq n; p \text{ impair}} \binom{n}{p}$ .

## 5. Bilan

Synthèse

- ↪ En mathématique, la sélection (naturelle) opère également et un langage se crée. Des définitions et concepts sont sélectionnés, comme des mots de la langue; et le formalisme comme l'écriture de ce langage. Le formalisme doit être compact (souvent), ressemblant à sa notion attachée (rarement) et efficace calculatoirement (absolument). C'est le cas de la notation  $\sum$  (ou  $\prod$ ) qu'on utilise comme un « auto-mathisme » avec un peu d'habitude : changement de variable, sommation par paquets, télescopage, somme multiple...
- ↪ Pour bien comprendre cette utilisation, on se rend compte que l'enjeu est de maîtriser la manipulation de l'ensemble des indices. Cette notion d'ensemble est au cœur des mathématiques, nous reviendrons dessus aux chapitres 9 et 10. (Il faut aussi que l'ensemble des nombres soit commutatif).

- ↪ Les nombres de sous-ensemble à  $k$  éléments à partir d'un ensemble à  $n$  élément est également un calcul qui se présente dans de très nombreuses branches des mathématiques. Il est formalisé par le coefficient binomial et une expression de langage : «  $k$  parmi  $n$  ».
- ↪ De nombreuses propriétés (issues de domaines variés) peuvent lui être attachés : triangle de Pascal, binôme de Newton, nombre de chemins dans des arbres binaires fusionnés, inversion de Pascal...
- ↪ En science, les problèmes se traduisent sous forme d'équations, souvent polynomiales (cf. Activité).
- Ces fonctions polynomiales sont très présentes car elles sont stables par addition, multiplication et composition. La multiplication s'appelle développement. On développe avec intelligence! Le plus important pour résoudre une équation est de savoir factoriser. Le théorème de factorisation est très important : il permet de séparer les problèmes de résolution.
- Dans quelques rares cas (degré faible), il existe des formules explicites qui donnent les expressions des racines d'une fonction polynomiale.

### Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Changement d'indice
- Savoir-faire - Sommation par paquets
- Savoir-faire - Méthode de télescopage
- Truc & Astuce pour le calcul - Ecrire un programme pour mieux comprendre
- Truc & Astuce pour le calcul - Invariant de boucle
- Savoir-faire - Somme multiple (indépendance)
- Savoir-faire - Somme multiple (dépendance)
- Savoir-faire - Triangle de Pascal

### Notations

| Notations          | Définitions                                                                     | Propriétés                                                                                                                                                                                                                   | Remarques                                                                                 |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $[\mathcal{P}(i)]$ | Notation d'Iverson pour la propriété $\mathcal{P}$                              | $\forall i, [\mathcal{P}(i)] \in \{0, 1\}$ avec $[\mathcal{P}(i)] = 1$ ssi $\mathcal{P}(i)$ vraie                                                                                                                            |                                                                                           |
| $n!$               | Factorielle de $n$ (lire dans ce sens!)                                         | $n! = \prod_{k=1}^n k$                                                                                                                                                                                                       | $0! = 1$ et par récurrence $n! = n \times (n-1)!$                                         |
| $\binom{n}{k}$     | Coefficient binomial de $k$ parmi $n$                                           | $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)_k}{k!}$ (si $n$ n'est pas entier)                                                                                                                                        | C'est le nombre de sous-ensemble à $k$ éléments pris dans un ensemble $E$ à $n$ éléments. |
| $[f]_k$            | coefficient de la fonction polynomiale $f$ devant le monôme $x^k$ (cf Activité) | $(1+x)^r = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r}{k} x^k$ (même si $r \notin \mathbb{N} \dots$ )<br>Linéarité : $[\lambda f + \mu g]_k = \lambda [f]_k + \mu [g]_k$<br>Convolution : $[f \times g]_k = \sum_{i=0}^k [f]_i [g]_{k-i}$ | $\deg f = n \iff \forall k > n, [f]_k = 0$                                                |
| $b_a^n(x)$         | Petit Bernoulli en $a$ d'indice $n$ (cf Activité)                               | $\forall x \in \mathbb{K} \quad b_a^n(x) = \sum_{i=0}^n x^i a^{n-i}$ (fonction polynomiale)                                                                                                                                  | $x^{n+1} - a^{n+1} = (x-a) \times b_a^n(x)$                                               |

### Retour sur les problèmes

- Nombres triangulaires.  $T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$ . Si on note  $T_n^k$ , telle que  $T_n^k = \sum_{h=1}^n T_h^{k-1}$  et  $T_n^0 = n$ .  
On trouve alors par récurrence :  $T_n^k = \binom{n+k}{k+1}$ .
- Suite de nombres. Et le suivant?  
Une stratégie : apprendre des évolutions sur les premiers nombres, donc calculer la suite  $\delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$ . Pour en déduire  $u_m =$

$$u_{m-1} + \delta(u)_{m-1}.$$

Si ce n'est pas suffisant, évaluer (par récurrence) :  $\delta^k(u)_n = \delta^{k-1}(u)_{n+1} - \delta^{k-1}(u)_n \dots$

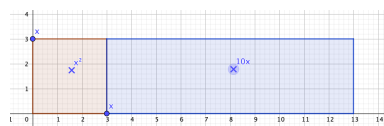
3. A calculer... Il n'y a pas de résultats intéressants, sauf en petite taille ou en expression formelle.

4. Développement de puissance.

C'est le coefficient multinomial de Newton :  $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n =$

$$\sum_{m_1+m_2+\dots+m_k=m} \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!} \prod_{i=1}^k a_i^{m_i}.$$

Vous comprenez?



- 5.

6. Il faut transformer en phrase les opérations  $\times$ ,  $\sqrt{\cdot}$ ...

7.  $x = u - v$ ,  $x^3 = (u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$ .

On a donc :  $x^3 + 6x - 20 = u^3 - v^3 - 3uv(u - v) + 6x - 20 = u^3 - v^3 + 3x(2 - uv) - 20$ .

Ajoutons la condition  $uv = 2$ , on a donc  $u^3 - v^3 = 20$  et  $u^3v^3 = 8$ .

Ainsi,  $u^3$  et  $-v^3$  sont racines de  $x^2 - Sx + P = x^2 - 20x - 8 = 0$ .

$\delta = 432$ , puis  $u^3 = 10 + \sqrt{108}$  et  $v^3 = 10 - \sqrt{108}$ .

Et enfin,  $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$ .

Autre méthode :  $x^3 + 6x = 20$ ? Par essai :  $x = 2$  fonctionne.

$$x^3 + 6x - 20 = (x - 2)(x^2 + 2x + 10) = (x - 2)(x + 1 - 3i)(x + 1 + 3i)$$

Puis, on exploite la formule de Cardan et enfin on reconnaît une bi-carré :

$$\begin{aligned} x^4 + px^2 + 1 &= (x^2 - \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4}}{2})(x^2 - \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}) \\ &= (x - \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}})(x + \sqrt{\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}})(x - \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}})(x + \sqrt{\frac{-p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}}) \end{aligned}$$