



Leçon 1 - Calculs et opérations avec des sommes ou des produits



⇒ Notation de somme

⇒ Sommentation par paquets

1. Quelques problèmes

2. Symboles $\sum$ et $\prod$

2.1. Définition et formule récurrente

2.2. Généralisation de la notion

2.3. Avec Python

3. Evaluer explicitement des sommes

3.1. Télescopage

3.2. Des sommes connues



⇒ Notation de somme

⇒ Sommatation par paquets

1. Quelques problèmes

2. Symboles $\sum$ et $\prod$

2.1. Définition et formule récurrente

2.2. Généralisation de la notion

2.3. Avec Python

3. Evaluer explicitement des sommes

3.1. Télescopage

3.2. Des sommes connues



Problèmes

Problème Nombres triangulaires





Problèmes

Problème Nombres triangulaires

Problème Développement

$$x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n) \text{ et}$$

$$x \mapsto (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx).$$



Problèmes

Problème Nombres triangulaires

Problème Développement

$$x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n) \text{ et}$$

$$x \mapsto (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx).$$

Problème Suite des nombres. Et le suivant ?

1, 4, 10, 20, 35...



Problèmes

Problème Nombres triangulaires

Problème Développement

$$x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n) \text{ et}$$

$$x \mapsto (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx).$$

Problème Suite des nombres. Et le suivant ?

1, 4, 10, 20, 35...

Problème Interpolation à pas constant

Trouver f de degré minimal tel que $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$ et $f(3) = 4$?





Problèmes

Problème Nombres triangulaires

Problème Développement

$$x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n) \text{ et}$$

$$x \mapsto (1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+nx).$$

Problème Suite des nombres. Et le suivant ?

$$1, 4, 10, 20, 35 \dots$$

Problème Interpolation à pas constant

Trouver f de degré minimal tel que $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$ et $f(3) = 4$?

Problème Développement de puissance

$$(a+b+c+\dots)^m ?$$



Problèmes

Problème Kwarizmi

Résoudre, comme El Kwarizmi, l'équation $x^2 + 10x = 39$ en n'exploitant que des méthodes géométriques (calcul d'aire, nombres positifs...)



Problèmes

Problème Kwarizmi

Résoudre, comme El Kwarizmi, l'équation $x^2 + 10x = 39$ en n'exploitant que des méthodes géométriques (calcul d'aire, nombres positifs...)

Problème Mauvais vers italiens



Problèmes

Problème Kwarizmi

Résoudre, comme El Kwarizmi, l'équation $x^2 + 10x = 39$ en n'exploitant que des méthodes géométriques (calcul d'aire, nombres positifs...)

Problème Mauvais vers italiens

Problème Tartaglia et Cardan



⇒ Notation de somme

⇒ Sommatation par paquets

1. Quelques problèmes

2. Symboles Σ et $\prod$

2.1. Définition et formule récurrente

2.2. Généralisation de la notion

2.3. Avec Python

3. Evaluer explicitement des sommes

3.1. Télescopage

3.2. Des sommes connues



Ecriture classique

Remarque Terme sans ambiguïté



Ecriture classique

Remarque Terme sans ambiguïté

On préfère souvent une formulation explicite :

Définition - Notation $\sum$ et $\prod$

Soient $a_1, \dots, a_n$ n nombres réels ou complexes. L'addition dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ étant commutative (on somme dans l'ordre que l'on souhaite) et associative (les parenthèses ne sont pas nécessaires), on note

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_n$$

De même on note

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Le terme a_i s'écrit sous forme d'une formule dépendant de i .



Ecriture classique

Remarque Bons usages et généralisation de notation



Ecriture classique

Remarque Bons usages et généralisation de notation

Exercice

Ecrire avec le symbole Σ , le calcul $1 + 2 + 4 + \cdots + 128$



Variable muette

Attention. Attention à ne pas donner une existence à une variable muette !

Que vaut $\left(\sum_{k=1}^n 2^k \right) + k$? Rien !



Variable muette

Attention. Attention à ne pas donner une existence à une variable muette !

Que vaut $\left(\sum_{k=1}^n 2^k \right) + k$? Rien !

Si on a un doute, on exploite **au brouillon** des points de suspension où l'on se rend compte que les indices i ou k n'existe pas vraiment.



Changement d'indexation

Analyse Changement d'indice



Changement d'indexation

Analyse Changement d'indice

Savoir-faire. Exemple de changement

Faire le changement d'indice $i = n - k$ pour $\sum_{k=1}^n (2k + 1)$

On a donc $k = n - i$ et $2k + 1 = 2n - 2i + 1 = (2n + 1) - 2i$.

k	i
1	$n - 1$
n	0

Et le tableau de correspondance :

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{10} (2k + 1) = \sum_{i=0}^{n-1} [(2n + 1) - 2i]$$



Changement d'indexation

Analyse Changement d'indice

Savoir-faire. Exemple de changement

Faire le changement d'indice $i = n - k$ pour $\sum_{k=1}^n (2k + 1)$

On a donc $k = n - i$ et $2k + 1 = 2n - 2i + 1 = (2n + 1) - 2i$.

k	i
1	$n - 1$
n	0

Et le tableau de correspondance :

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{10} (2k + 1) = \sum_{i=0}^{n-1} [(2n + 1) - 2i]$$



Changement d'indexation

Analyse Changement d'indice

Savoir-faire. Exemple de changement

Faire le changement d'indice $i = n - k$ pour $\sum_{k=1}^n (2k + 1)$

On a donc $k = n - i$ et $2k + 1 = 2n - 2i + 1 = (2n + 1) - 2i$.

k	i
1	$n - 1$
n	0

Et le tableau de correspondance :

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{10} (2k + 1) = \sum_{i=0}^{n-1} [(2n + 1) - 2i]$$



Changement d'indexation

Analyse Changement d'indice

Savoir-faire. Exemple de changement

Faire le changement d'indice $i = n - k$ pour $\sum_{k=1}^n (2k + 1)$

On a donc $k = n - i$ et $2k + 1 = 2n - 2i + 1 = (2n + 1) - 2i$.

k	i
1	$n - 1$
n	0

Et le tableau de correspondance :

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{10} (2k + 1) = \sum_{i=0}^{n-1} [(2n + 1) - 2i]$$

Exercice

Compléter les expressions qui suivent :

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{\dots}^{\dots} a_{k-1} = \sum_{\dots}^{\dots} a_{n-h}$$



Somme, par récurrence

Analyse Σ et récurrence



Somme, par récurrence

Analyse $\sum$ et récurrence

Proposition - A savoir !

On a pour $(a_i)_i, (b_i)_i, \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, :

$$\sum_{i=0}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=0}^n b_i$$

$$\sum_{i=0}^n \lambda a_i = \lambda \sum_{i=0}^n a_i$$

$$\prod_{i=0}^n a_i b_i = \prod_{i=0}^n a_i \times \prod_{i=0}^n b_i$$

$$\prod_{i=0}^n \lambda a_i = \lambda^{n+1} \prod_{i=0}^n a_i$$



Somme, par récurrence

Analyse $\sum$ et récurrence

Proposition - A savoir !

On a pour $(a_i)_i, (b_i)_i, \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, :

$$\sum_{i=0}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=0}^n b_i$$

$$\sum_{i=0}^n \lambda a_i = \lambda \sum_{i=0}^n a_i$$

$$\prod_{i=0}^n a_i b_i = \prod_{i=0}^n a_i \times \prod_{i=0}^n b_i$$

$$\prod_{i=0}^n \lambda a_i = \lambda^{n+1} \prod_{i=0}^n a_i$$

Démonstration



Somme, par récurrence

Analyse Σ et récurrence

Proposition - A savoir !

On a pour $(a_i)_i, (b_i)_i, \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, :

$$\sum_{i=0}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=0}^n b_i$$

$$\sum_{i=0}^n \lambda a_i = \lambda \sum_{i=0}^n a_i$$

$$\prod_{i=0}^n a_i b_i = \prod_{i=0}^n a_i \times \prod_{i=0}^n b_i$$

$$\prod_{i=0}^n \lambda a_i = \lambda^{n+1} \prod_{i=0}^n a_i$$

Démonstration

Remarque le $n+1$ de λ^{n+1} dans le dernier produit



⇒ Notation de somme

⇒ Sommatation par paquets

1. Quelques problèmes

2. Symboles $\sum$ et $\prod$

2.1. Définition et formule récurrente

2.2. Généralisation de la notion

2.3. Avec Python

3. Evaluer explicitement des sommes

3.1. Télescopage

3.2. Des sommes connues



Le plus important...

Plus généralement, ce qui compte en réalité est l'ensemble des éléments additionnés et d'une description (énumérative) de ceux-ci.

Définition - Extension de notation Σ et Π

Si A est un sous-ensemble fini d'éléments de E ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou autre...),
Soit une description énumérative de A : $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, on note

$$\sum_{a \in A} a = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_p} = \sum_{i=1}^p i a_i$$

Encore plus généralement, avec les formules :

- indicatrice $\mathbb{1}_X : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{si } x \notin X \end{cases}$
- ou symbole d'Iverson $[\mathcal{P}(t)] = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{P}(t) \text{ vrai} \\ 0 & \text{si } \mathcal{P}(t) \text{ faux} \end{cases}$

On peut voir notée,

$$\sum_{a \in A} a = \sum_{a \in E} a \mathbb{1}_A(a) = \sum_{a \in E} a [a \in A] = \sum_{a \mid \mathcal{P}(a)} a = \sum_{a \in E} a [\mathcal{P}(a)]$$



Exercices

Exemple $\sum_{i=1}^n a_i$



Exercices

Exemple $\sum_{i=1}^n a_i$

Exercice

Sans utiliser la notation $\sum$, donner l'expression développée de

$$\sum_{i|0 \leq i \leq 6} \frac{1}{2i+1}, \quad \sum_{i|0 \leq 2i \leq 7} \left(3i + \frac{1}{i+1} \right), \quad \sum_{i|0 \leq i^3 \leq 10} \frac{1}{i^2 + i + 1}.$$



Exercices

Exemple $\sum_{i=1}^n a_i$

Exercice

Sans utiliser la notation $\sum$, donner l'expression développée de

$$\sum_{i|0 \leq i \leq 6} \frac{1}{2i+1}, \quad \sum_{i|0 \leq 2i \leq 7} \left(3i + \frac{1}{i+1} \right), \quad \sum_{i|0 \leq i^3 \leq 10} \frac{1}{i^2 + i + 1}.$$

Exercice

Exprimer la somme des inverses de tous les nombres premiers inférieurs à N .



Sommatation par paquets - Partition

Remarque Extension des propriétés ensemblistes



Sommation par paquets - Partition

Remarque Extension des propriétés ensemblistes

Exercice

Si A et B sont deux ensembles disjoints de E , montrer que pour tout $i \in E$, $\mathbb{1}_{A \cup B}(i) - \mathbb{1}_A(i) - \mathbb{1}_B(i) = 0$.

En déduire que $\sum_{i \in A \cup B} a_i = \sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in B} a_i$.



Sommaton par paquets - Partition

Remarque Extension des propriétés ensemblistes

Exercice

Si A et B sont deux ensembles disjoints de E , montrer que pour tout $i \in E$, $\mathbb{1}_{A \cup B}(i) - \mathbb{1}_A(i) - \mathbb{1}_B(i) = 0$.

En déduire que $\sum_{i \in A \cup B} a_i = \sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in B} a_i$.

Définition - Réunion disjointe

On note $C = A \uplus B$, par signifier la double information :

- $C = A \cup B$
- $A \cap B = \emptyset$

Autrement écrit : $x \in C$ si et seulement si $x \in A$ ou (exclusif) $x \in B$.

On peut généraliser cette notation à plusieurs ensembles :

$C = \biguplus_{i=1}^n A_i$ signifie : $x \in C$ si et seulement si $\exists ! i \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in A_i$.



Sommation par paquets - Formule

On a alors la relation de Chasles pour les sommes :

Proposition - Sommation par paquets

Soit une famille $(E_r)_{r \in S}$ une famille d'ensembles indexés par S .

On suppose qu'il s'agit d'une famille d'ensembles disjoints 2 à 2 :

$$\forall r \neq r' \in S, E_r \cap E_{r'} = \emptyset.$$

Alors

$$\sum_{r \in S} \left(\sum_{k \in E_r} a_k \right) = \sum_{\substack{k \in \bigcup_{r \in S} E_r}} a_k$$



Sommation par paquets - Formule

On a alors la relation de Chasles pour les sommes :

Proposition - Sommation par paquets

Soit une famille $(E_r)_{r \in S}$ une famille d'ensembles indexés par S .

On suppose qu'il s'agit d'une famille d'ensembles disjoints 2 à 2 :

$$\forall r \neq r' \in S, E_r \cap E_{r'} = \emptyset.$$

Alors

$$\sum_{r \in S} \left(\sum_{k \in E_r} a_k \right) = \sum_{\substack{k \in \biguplus_{r \in S} E_r}} a_k$$

On voit ici apparaître une double somme. On en reparlera plus loin.



Sommation par paquets - Formule

On a alors la relation de Chasles pour les sommes :

Proposition - Sommation par paquets

Soit une famille $(E_r)_{r \in S}$ une famille d'ensembles indexés par S .

On suppose qu'il s'agit d'une famille d'ensembles disjoints 2 à 2 :

$$\forall r \neq r' \in S, E_r \cap E_{r'} = \emptyset.$$

Alors

$$\sum_{r \in S} \left(\sum_{k \in E_r} a_k \right) = \sum_{\substack{k \in \cup \\ r \in S} E_r} a_k$$

On voit ici apparaître une double somme. On en reparlera plus loin.

Exemple $\mathbb{N}$



Sommaton par paquets - Formule

On a alors la relation de Chasles pour les sommes :

Proposition - Sommaton par paquets

Soit une famille $(E_r)_{r \in S}$ une famille d'ensembles indexés par S .

On suppose qu'il s'agit d'une famille d'ensembles disjoints 2 à 2 :

$$\forall r \neq r' \in S, E_r \cap E_{r'} = \emptyset.$$

Alors

$$\sum_{r \in S} \left(\sum_{k \in E_r} a_k \right) = \sum_{\substack{k \in \bigcup_{r \in S} E_r}} a_k$$

On voit ici apparaître une double somme. On en reparlera plus loin.

Exemple $\mathbb{N}$

Démonstration



Sommaton par paquets - Formule

On a alors la relation de Chasles pour les sommes :

Proposition - Sommaton par paquets

Soit une famille $(E_r)_{r \in S}$ une famille d'ensembles indexés par S .

On suppose qu'il s'agit d'une famille d'ensembles disjoints 2 à 2 :

$$\forall r \neq r' \in S, E_r \cap E_{r'} = \emptyset.$$

Alors

$$\sum_{r \in S} \left(\sum_{k \in E_r} a_k \right) = \sum_{\substack{k \in \biguplus_{r \in S} E_r}} a_k$$

On voit ici apparaître une double somme. On en reparlera plus loin.

Exemple $\mathbb{N}$

Démonstration

Remarque Interversion des symboles Σ



Savoir-faire. Sommation par paquets

Savoir-faire. Exploiter une sommation par paquets

On a parfois intérêt à découper l'ensemble E en (réunion de m) sous-ensembles disjoints $E = E_1 \uplus E_2 \cdots \uplus E_m$.

On calcule alors la somme par paquets :

$$\sum_{r=1}^m \left(\sum_{k \in E_r} a_k \right) = \sum_{k \in E} a_k$$



⇒ Notation de somme

⇒ Sommatation par paquets

1. Quelques problèmes

2. Symboles $\sum$ et $\prod$

2.1. Définition et formule récurrente

2.2. Généralisation de la notion

2.3. Avec Python

3. Evaluer explicitement des sommes

3.1. Télescopage

3.2. Des sommes connues



Numériquement : deux types de boucle

Des calculs de sommes à effectuer sous Python avec des boucles :

- `for`, si l'on connaît bien l'ensemble sur lequel est définie i
- `while`, si i est définie par une propriété



Numériquement : deux types de boucle

Des calculs de sommes à effectuer sous Python avec des boucles :

- `for`, si l'on connaît bien l'ensemble sur lequel est définie i
- `while`, si i est définie par une propriété

Python $\sum_{k=n}^m a(k)$

```

1   S=0
2   for k in range(n,m+1):
3       S=S+a(k)
4   return(S)
```



Numériquement : deux types de boucle

Des calculs de sommes à effectuer sous Python avec des boucles :

- `for`, si l'on connaît bien l'ensemble sur lequel est définie i
- `while`, si i est définie par une propriété

Python $\sum_{k=n}^m a(k)$

```

1      S=0
2      for k in range(n,m+1):
3          S=S+a(k)
4      return(S)

```

Python $\sum_{i \mid f(i) \leq n} a(i)$

```

1      S, i=0,0
2      while f(i)<=n:
3          S=S+a(i)
4          i=i+1
5      return(S)

```



Numériquement : deux types de boucle

Des calculs de sommes à effectuer sous Python avec des boucles :

- `for`, si l'on connaît bien l'ensemble sur lequel est définie i
- `while`, si i est définie par une propriété

Python $\sum_{k=n}^m a(k)$

```

1      S=0
2      for k in range(n,m+1):
3          S=S+a(k)
4      return(S)
```

Python $\sum_{i \mid f(i) \leq n} a(i)$

```

1      S, i=0,0
2      while f(i)<=n:
3          S=S+a(i)
4          i=i+1
5      return(S)
```



Remarque l'ordinateur (calculatrice) comme un obstacle ?

Applications

Truc & Astuces. Écrire un programme pour mieux comprendre

Ecrire un programme permet souvent de mieux comprendre la nature du calcul.

C'est le cas en particulier :

- pour le calcul de somme.
- pour le calcul de probabilités.

Dans ce cas, ce n'est pas le calcul mais la modélisation elle-même du problème qui est mieux comprise.



Applications

Truc & Astuces. Écrire un programme pour mieux comprendre

Ecrire un programme permet souvent de mieux comprendre la nature du calcul.

C'est le cas en particulier :

- pour le calcul de somme.
- pour le calcul de probabilités.

Dans ce cas, ce n'est pas le calcul mais la modélisation elle-même du problème qui est mieux comprise.

Exercice

Ecrire une boucle (double ?) pour faire le calcul :

$$\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=i}^{200-i} i \times j$$



Applications

Truc & Astuces. Écrire un programme pour mieux comprendre

Ecrire un programme permet souvent de mieux comprendre la nature du calcul.

C'est le cas en particulier :

- pour le calcul de somme.
- pour le calcul de probabilités.

Dans ce cas, ce n'est pas le calcul mais la modélisation elle-même du problème qui est mieux comprise.

Exercice

Ecrire une boucle (double ?) pour faire le calcul :

$$\sum_{i=1}^{100} \sum_{j=i}^{200-i} i \times j$$



Remarque Varier les paramètres et informatique

⇒ Notation de somme

⇒ Sommatation par paquets

1. Quelques problèmes

2. Symboles $\sum$ et $\prod$

2.1. Définition et formule récurrente

2.2. Généralisation de la notion

2.3. Avec Python

3. Evaluer explicitement des sommes

3.1. Télescopage

3.2. Des sommes connues



Méthode explicite

C'est la seule méthode qui donne une formule explicite.

Savoir-faire. Méthode du télescope (ou dominos)

Soit (u_n) une suite. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$

$$\text{Alors } \sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

$$\left(= (u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + (u_{p+3} - u_{p+2}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) \right)$$



Méthode explicite

C'est la seule méthode qui donne une formule explicite.

Savoir-faire. Méthode du télescope (ou dominos)

Soit (u_n) une suite. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$

$$\text{Alors } \sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

$$\left(= (u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + (u_{p+3} - u_{p+2}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) \right)$$

Remarque « Voir » le télescope



Méthode explicite

C'est la seule méthode qui donne une formule explicite.

Savoir-faire. Méthode du télescope (ou dominos)

Soit (u_n) une suite. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$

$$\text{Alors } \sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

$$\left(= (u_{p+1} - u_p) + (u_{p+2} - u_{p+1}) + (u_{p+3} - u_{p+2}) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) \right)$$

Remarque « Voir » le télescope

Exercice

Calculer $\sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k}$.



⇒ Notation de somme

⇒ Sommatation par paquets

1. Quelques problèmes

2. Symboles $\sum$ et $\prod$

2.1. Définition et formule récurrente

2.2. Généralisation de la notion

2.3. Avec Python

3. Evaluer explicitement des sommes

3.1. Télescopage

3.2. Des sommes connues



Somme de puissance

Proposition - Sommes de puissances d'entiers consécutifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$



Somme de puissance

Proposition - Sommes de puissances d'entiers consécutifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On peut faire une récurrence, ou bien chercher à démontrer le résultat directement. Une méthode classique : user le télescopage.



Somme de puissance

Proposition - Sommes de puissances d'entiers consécutifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On peut faire une récurrence, ou bien chercher à démontrer le résultat directement. Une méthode classique : user le télescopage.

Démonstration



Récurrance

Exercice

Démontrer par récurrence les résultats précédents



Suite arithmétique

Proposition - Calcul d'une somme arithmétique

Pour une suite arithmétique : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$, on a :

$$\sum_{k=n}^m u_k = (m - n + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$$

C'est-à-dire :

somme de termes succ. = (nb de termes) × (moyenne des termes extrêmes)



Suite arithmétique

Proposition - Calcul d'une somme arithmétique

Pour une suite arithmétique : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$, on a :

$$\sum_{k=n}^m u_k = (m - n + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$$

C'est-à-dire :

somme de termes succ. = (nb de termes) × (moyenne des termes extrêmes)

Démonstration



Suite géométrique

Proposition - Calcul d'une somme géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a :

$$\text{somme de termes successifs} = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$



Suite géométrique

Proposition - Calcul d'une somme géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a :

$$\text{somme de termes successifs} = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

Démonstration



Suite géométrique

Proposition - Calcul d'une somme géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a :

$$\text{somme de termes successifs} = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

Démonstration

Exercice

Calculer $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$



Petits Bernoullis

Proposition - Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$



Petits Bernoullis

Proposition - Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Application $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes



Petits Bernoullis

Proposition - Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Application $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes

Application Factoriser $a^5 - b^5$



Petits Bernoullis

Proposition - Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Application $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes

Application Factoriser $a^5 - b^5$

Démonstration



Petits Bernoullis

Proposition - Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Application $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes

Application Factoriser $a^5 - b^5$

Démonstration

Exercice

Peut-on factoriser $a^n + b^n$? Si oui, factoriser le.



Conclusion

Objectifs

⇒ Notation de somme

⇒ Sommatation par paquets



Conclusion

Objectifs

⇒ Notation de somme

- Donner du sens au point de suspension



Conclusion

Objectifs

⇒ Notation de somme

- Donner du sens au point de suspension
- Règles de calculs à connaître



Conclusion

Objectifs

⇒ Notation de somme

- Donner du sens au point de suspension
- Règles de calculs à connaître
- Télescopage et récurrence



Conclusion

Objectifs

⇒ Notation de somme

- Donner du sens au point de suspension
- Règles de calculs à connaître
- Télescopage et récurrence
- Sommes à connaître : arithmétique, géométrique, Bernoullis...





Conclusion

Objectifs

⇒ Notation de somme

⇒ Sommatation par paquets



Conclusion

Objectifs

- ⇒ Notation de somme
- ⇒ Sommutation par paquets
 - Nécessité de partition !



Conclusion

Objectifs

⇒ Notation de somme

⇒ Sommatation par paquets

- Nécessité de partition !
- Comparable à la relation de Chasles



Conclusion

Objectifs

⇒ Notation de somme

⇒ Sommatation par paquets

- Nécessité de partition !
- Comparable à la relation de Chasles



Conclusion

Objectifs

⇒ Notation de somme

⇒ Sommatation par paquets

- Nécessité de partition !
- Comparable à la relation de Chasles



Conclusion

Objectifs

- ⇒ Notation de somme
- ⇒ Sommatation par paquets

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 1 : Sommes.
3.3. Somme double
- Pour demain : exercices N°2 & 6
- TD de jeudi :
8h-10h (de ALLOUM Solal à MARTY Paul) :
3, 5, 8, 10, 17
16h-18h (de MAUD Valentin à VILLENEUVE Lisa) :
4, 7, 11, 12, 18

