



Leçon 2 - Calculs et opérations avec des sommes ou des produits





⇒ **Somme double**

⇒ **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

1. Quelques problèmes

2. Symboles $\sum$ et $\prod$

3. Evaluer explicitement des sommes

3.1. Télescopage

3.2. Des sommes connues

3.3. Sommes doubles (multiples...)

3.4. Exercice d'applications





⇒ Somme double

⇒ Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Quelques problèmes

2. Symboles $\sum$ et $\prod$

3. Evaluer explicitement des sommes

3.1. Télescopage

3.2. Des sommes connues

3.3. Sommes doubles (multiples...)

3.4. Exercice d'applications





Somme de puissance

Proposition - Sommes de puissances d'entiers consécutifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$





Somme de puissance

Proposition - Sommes de puissances d'entiers consécutifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On peut faire une récurrence, ou bien chercher à démontrer le résultat directement. Une méthode classique : user le télescopage.





Somme de puissance

Proposition - Sommes de puissances d'entiers consécutifs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On peut faire une récurrence, ou bien chercher à démontrer le résultat directement. Une méthode classique : user le télescopage.

Démonstration





Récurrance

Exercice

Démontrer par récurrence les résultats précédents





Récurrance

Exercice

Démontrer par récurrence les résultats précédents

Savoir-faire. Se passer du formalisme d'une récurrence ou invariant de boucle

On peut souvent se passer de la formalisation de la récurrence (mais avec les mêmes calculs).

Ici on considère la suite $u_n = \sum_{k=1}^n k^3 - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

On note que $u_{n+1} = u_n$ (même calcul que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$) et que $u_1 = 0$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$. CQFD.





Suite arithmétique

Proposition - Calcul d'une somme arithmétique

Pour une suite arithmétique : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$, on a :

$$\sum_{k=n}^m u_k = (m - n + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$$

C'est-à-dire :

somme de termes succ. = (nb de termes) $\times$ (moyenne des termes extrêmes)





Suite arithmétique

Proposition - Calcul d'une somme arithmétique

Pour une suite arithmétique : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$, on a :

$$\sum_{k=n}^m u_k = (m - n + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$$

C'est-à-dire :

somme de termes succ. = (nb de termes) $\times$ (moyenne des termes extrêmes)

Démonstration





Suite arithmétique

Proposition - Calcul d'une somme arithmétique

Pour une suite arithmétique : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$, on a :

$$\sum_{k=n}^m u_k = (m - n + 1) \times \frac{u_m + u_n}{2}$$

C'est-à-dire :

somme de termes succ. = (nb de termes) $\times$ (moyenne des termes extrêmes)

Démonstration

Exercice

Démontrer le résultat en suivant la « méthode de Gauss » (double somme inversée...)





Suite géométrique

Proposition - Calcul d'une somme géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a :

$$\text{somme de termes successifs} = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$





Suite géométrique

Proposition - Calcul d'une somme géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a :

$$\text{somme de termes successifs} = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

Démonstration





Suite géométrique

Proposition - Calcul d'une somme géométrique

Soit $x \in \mathbb{R}$ (ou $x \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

Plus généralement pour une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a :

$$\text{somme de termes successifs} = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

Démonstration

Exercice

Calculer $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$





Petits Bernoullis

Proposition - Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$





Petits Bernoullis

Proposition - Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Application $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes





Petits Bernoullis

Proposition - Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Application $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes

Application Factoriser $a^5 - b^5$





Petits Bernoullis

Proposition - Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Application $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes

Application Factoriser $a^5 - b^5$

Démonstration





Petits Bernoullis

Proposition - Une factorisation à connaître

Soient a et b deux réels (ou deux complexes), alors :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Application $3^n - 2^n$, sous forme d'une addition de n termes

Application Factoriser $a^5 - b^5$

Démonstration

Exercice

Peut-on factoriser $a^n + b^n$? Si oui, factoriser le.





⇒ Somme double

⇒ Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Quelques problèmes

2. Symboles $\sum$ et $\prod$

3. Evaluer explicitement des sommes

3.1. Télescopage

3.2. Des sommes connues

3.3. Sommes doubles (multiples...)

3.4. Exercice d'applications





Multiple indice

Heuristique. Somme à multiples indices

On peut faire une somme d'éléments pris dans un ensemble fini. Mais la description de ces éléments n'est pas toujours naturellement donnée sous la forme $x_i, i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Parfois les éléments apparaissent comme les éléments d'un tableau (*matrice*) et sont donc doublement (ou plus) indexés :

$$x_{i,j}, i \in \mathbb{N}_n, j \in \mathbb{N}_m.$$

Les choses se présentent différemment selon que i et j sont « indépendants » entre eux ou non.





Cas i et j indépendants. Produit cartésien d'ensembles

Analyse Du sens des formules





Cas i et j indépendants. Produit cartésien d'ensembles

Analyse Du sens des formules

Définition - Somme double

On considère une famille de nombres réels ou complexes $(a_{i,j})$ indexée par deux indices i et j , i compris entre 1 et n , j compris entre 1 et m où n et m sont deux entiers non nuls donnés :

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & \dots & a_{1,m} \\
 \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
 a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & \dots & a_{i,m} \\
 \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
 a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & \dots & a_{n,m}
 \end{array}$$

La somme de tous les éléments de ce tableau est notée :

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,m \rrbracket} a_{i,j}.$$





Savoir-faire

Savoir-faire. Somme multiple (indépendance)

Pour la calculer on peut procéder d'au moins deux façons, la première consiste à faire d'abord la somme des termes ligne par ligne, puis d'additionner les résultats :

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la ligne } i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j},$$

une seconde étant de sommer d'abord les termes colonne par colonne puis d'additionner les résultats :

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} a_{i,j} = \sum_{j=1}^m \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la colonne } j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j}.$$





Savoir-faire

Savoir-faire. Somme multiple (indépendance)

Pour la calculer on peut procéder d'au moins deux façons, la première consiste à faire d'abord la somme des termes ligne par ligne, puis d'additionner les résultats :

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la ligne } i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j},$$

une seconde étant de sommer d'abord les termes colonne par colonne puis d'additionner les résultats :

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} a_{i,j} = \sum_{j=1}^m \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right)}_{\text{somme de la colonne } j} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j}.$$

Remarque Diagonale





Développement / factorisation de sommes doubles indépendantes

Exercice

Calculer

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} ij$$





Développement / factorisation de sommes doubles indépendantes

Exercice

Calculer
$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} ij$$

Comme le montre l'exercice précédent :





Développement / factorisation de sommes doubles indépendantes

Exercice

Calculer $\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} ij$

Comme le montre l'exercice précédent :

Proposition - Produit de deux sommes (développement ou factorisation)

Soient des réels (ou des complexes) a_i et b_j , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$.

Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} a_i b_j$$





Développement / factorisation de sommes doubles indépendantes

Exercice

Calculer $\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} ij$

Comme le montre l'exercice précédent :

Proposition - Produit de deux sommes (développement ou factorisation)

Soient des réels (ou des complexes) a_i et b_j , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$.

Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} a_i b_j$$

Démonstration





Cas i et j dépendants

Heuristique. Cas : i et j dépendants

Ici on somme seulement certains termes du tableau rectangulaire $a_{i,j}$.
Et donc les indices sont dépendants l'un de l'autre !

Par exemple, dans cette situation, les valeurs prises par j (à l'intérieur de la somme) dépendent de celles prises par i (à l'extérieur de la somme). Il y a, en revanche, souvent liberté dans le choix de l'ordre de sommation (d'abord i ou d'abord j).





Cas i et j dépendants

Heuristique. Cas : i et j dépendants

Ici on somme seulement certains termes du tableau rectangulaire $a_{i,j}$.
Et donc les indices sont dépendants l'un de l'autre !

Par exemple, dans cette situation, les valeurs prises par j (à l'intérieur de la somme) dépendent de celles prises par i (à l'extérieur de la somme). Il y a, en revanche, souvent liberté dans le choix de l'ordre de sommation (d'abord i ou d'abord j).

Analyse $G = \{a_{i,j}, i \in \mathbb{N}_n, j \in A_i\}$





Cas i et j dépendants

Analyse $G = \{a_{i,j}, i \in \mathbb{N}_n, j \in A_i\}$

Proposition - Somme double classique $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j}$

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels ou complexes :

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}.$$





Cas i et j dépendants

Analyse $G = \{a_{i,j}, i \in \mathbb{N}_n, j \in A_i\}$

Proposition - Somme double classique $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j}$

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels ou complexes :

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{i,j}.$$

Démonstration





Exercice

Exercice

Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij.$





Exercice

Exercice

Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.

Savoir-faire. Somme multiple (dépendance)

Pour la calculer on ordonne les indices de sommation :

1. on choisit celle qui sera le plus à l'extérieur (donc à gauche) des symboles $\sum$. Elle ne dépend que de paramètres fixés et d'aucun indice.
2. on choisit ensuite la suivante, la seconde dans l'ordre des sommes. Elle dépend des paramètres fixés et de l'indice précédent

...

Exemple :
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} \right)$$



Exercice

Exercice

Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.

Savoir-faire. Somme multiple (dépendance)

Pour la calculer on ordonne les indices de sommation :

1. on choisit celle qui sera le plus à l'extérieur (donc à gauche) des symboles $\sum$. Elle ne dépend que de paramètres fixés et d'aucun indice.
2. on choisit ensuite la suivante, la seconde dans l'ordre des sommes. Elle dépend des paramètres fixés et de l'indice précédent

...

Exemple :
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} \right)$$



⇒ Somme double

⇒ Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Quelques problèmes

2. Symboles $\sum$ et $\prod$

3. Evaluer explicitement des sommes

3.1. Télescopage

3.2. Des sommes connues

3.3. Sommes doubles (multiples...)

3.4. Exercice d'applications





Exercices

Exercice

Retrouver la valeur de $S = \sum_{k=1}^n k$, en notant que $S = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k 1$





Exercices

Exercice

Retrouver la valeur de $S = \sum_{k=1}^n k$, en notant que $S = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k 1$

Exercice

Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n d_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n d_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_i d_j$.





Exercices

Exercice

Retrouver la valeur de $S = \sum_{k=1}^n k$, en notant que $S = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k 1$

Exercice

Montrer que $\left(\sum_{k=1}^n d_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n d_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} d_i d_j$.

Exercice

1. En développant $\sum_{1 \leq i < j \leq 3} (a_i b_j - a_j b_i)^2$, montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^3 a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^3 a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^3 b_k^2 \right).$$

2. De même, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$



3. A quelle condition a-t-on l'égalité ?



Exercices

Exercice

Ecrire le développement polynomiale de

$$\prod_{i=1}^n (x - a_i)$$

Quelle formule retrouve-t-on lorsque tous les a_j sont égaux ?





Conclusion

Objectifs

⇒ Sommes doubles

⇒ Inégalité de Cauchy-Schwarz





Conclusion

Objectifs

⇒ Sommes doubles

- Produit dans le cas de variable indépendante





Conclusion

Objectifs

⇒ Sommes doubles

- Produit dans le cas de variable indépendante
- Cas dépendants : une méthode à suivre avec Iverson





Conclusion

Objectifs

⇒ Sommes doubles

- Produit dans le cas de variable indépendante
- Cas dépendants : une méthode à suivre avec Iverson

⇒ Inégalité de Cauchy-Schwarz





Conclusion

Objectifs

⇒ Sommes doubles

- Produit dans le cas de variable indépendante
- Cas dépendants : une méthode à suivre avec Iverson

⇒ Inégalité de Cauchy-Schwarz

- A connaître (dans sa version sommatoire).





Conclusion

Objectifs

⇒ Sommes doubles

⇒ Inégalité de Cauchy-Schwarz

- A connaître (dans sa version sommatoire).





Conclusion

Objectifs

⇒ Sommes doubles

⇒ Inégalité de Cauchy-Schwarz

- A connaître (dans sa version sommatoire).





Conclusion

Objectifs

⇒ Sommes doubles

⇒ Inégalité de Cauchy-Schwarz

- A connaître (dans sa version sommatoire).





Conclusion

Objectifs

⇒ Sommes doubles

⇒ Inégalité de Cauchy-Schwarz

- A connaître (dans sa version sommatoire).





Conclusion

Objectifs

⇒ Sommes doubles

⇒ Inégalité de Cauchy-Schwarz

- A connaître (dans sa version sommatoire).





Conclusion

Objectifs

⇒ Sommes doubles

⇒ Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 1 : Sommes
4. Coefficients binomiaux
- Pour demain : exercices N°13 & 15

