



Leçon 3 - Calculs et opérations avec des sommes ou des produits





⇒ **Coefficients binomiaux**

⇒ **Formule du binôme de Newton**

4. Coefficients binomiaux et formule du binôme

4.1. Factorielles et coefficients binomiaux

4.2. Triangle de Pascal

4.3. Formule du binôme





⇒ **Coefficients binomiaux**

⇒ **Formule du binôme de Newton**

4. Coefficients binomiaux et formule du binôme

4.1. Factorielles et coefficients binomiaux

4.2. Triangle de Pascal

4.3. Formule du binôme





Définitions

Les remarques en marge permettent de s'intéresser aux nombres :





Définitions

Les remarques en marge permettent de s'intéresser aux nombres :

Définition - Factorielle et coefficient binomial

Pour n et p éléments de $\mathbb{N}$, $p \leq n$, on pose :

$0! = 1$ et pour $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ qui se lit "factorielle n "

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ qui se lit « } p \text{ parmi } n \text{ »}$$

On généralise la notation à tout $p \in \mathbb{Z}$: si $p < 0$ ou $p > n$ (si on n'a pas $0 \leq p \leq n$), alors $\binom{n}{p} = 0$.





Définitions

Les remarques en marge permettent de s'intéresser aux nombres :

Définition - Factorielle et coefficient binomial

Pour n et p éléments de $\mathbb{N}$, $p \leq n$, on pose :

$0! = 1$ et pour $n \geq 1$, $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$ qui se lit "factorielle n "

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ qui se lit « } p \text{ parmi } n \text{ »}$$

On généralise la notation à tout $p \in \mathbb{Z}$: si $p < 0$ ou $p > n$ (si on n'a pas $0 \leq p \leq n$), alors $\binom{n}{p} = 0$.

Remarque Plus tard...





Python

Python Calcul de la factorielle avec une boucle

```
1 def factorielle(n):  
2     f=1  
3     for k in range(1,n):  
4         f=f*(k+1)  
5     return(f)
```





Propriétés immédiates

Proposition - Propriétés

Pour tout nombres entiers $n \in \mathbb{N}$ (naturels) et $p \in \mathbb{Z}$ (relatifs) :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}; \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} \quad (\text{Formule du capitaine. Fausse pour } p = 0)$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad (\text{Relation de Pascal})$$





Propriétés immédiates

Proposition - Propriétés

Pour tout nombres entiers $n \in \mathbb{N}$ (naturels) et $p \in \mathbb{Z}$ (relatifs) :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}; \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} \quad (\text{Formule du capitaine. Fausse pour } p = 0)$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad (\text{Relation de Pascal})$$

Démonstration





Propriétés immédiates

Proposition - Propriétés

Pour tout nombres entiers $n \in \mathbb{N}$ (naturels) et $p \in \mathbb{Z}$ (relatifs) :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}; \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} \quad (\text{Formule du capitaine. Fausse pour } p = 0)$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} \quad (\text{Relation de Pascal})$$

Démonstration

Exercice

Pour n, p , simplifier $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$. On pourra y « voir » un télescope





⇒ **Coefficients binomiaux**

⇒ **Formule du binôme de Newton**

4. Coefficients binomiaux et formule du binôme

4.1. Factorielles et coefficients binomiaux

4.2. Triangle de Pascal

4.3. Formule du binôme





Dessiner le triangle

De ces propriétés on déduit un moyen simple de calculer les coefficients binomiaux :

Savoir-faire. Triangle de Pascal

On peut alors construire le triangle de Pascal pour pouvoir calculer facilement (addition et non multiplication) les coefficients binomiaux. On écrit ainsi dans un tableau :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \binom{0}{0} & & & & & & & & \\
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & & \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & & \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & & \\
 \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & & & \\
 \vdots & & & & \vdots & & & &
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{ccccccccccc}
 1 & & & & & & & & & & \\
 1 & & 1 & & & & & & & & \\
 1 & 2^{=1+1} & & 1 & & & & & & & \\
 1 & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 1 & 4 & & 6^{=3+3} & & 4 & & 1 & & & \\
 1 & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
 \vdots & & & & & & & \vdots & & &
 \end{array}$$





Nombres entiers

On l'a déjà dit :

Proposition - Nombres entiers

Pour n et p éléments de $\mathbb{N}$, $p \leq n$, $n!$ et $\binom{n}{p}$ sont des entiers naturels.





Nombres entiers

On l'a déjà dit :

Proposition - Nombres entiers

Pour n et p éléments de $\mathbb{N}$, $p \leq n$, $n!$ et $\binom{n}{p}$ sont des entiers naturels.

Démonstration





Génération Python

Python Triangle de Pascal

En exploitant des listes (de listes) en informatique, il est possible de créer la n^{e} ligne du triangle de Pascal.

```
1 def Pascal(n):
2     L=[0]*(n+1)
3     for h in range(n+1):
4         L[h]=[1]+[0]*n
5     print(L)
6     for h in range(n):
7         for k in range(h+1):
8             L[h+1][k+1]=L[h][k]+L[h][k+1]
9     return(L)
```





⇒ **Coefficients binomiaux**

⇒ **Formule du binôme de Newton**

4. Coefficients binomiaux et formule du binôme

4.1. Factorielles et coefficients binomiaux

4.2. Triangle de Pascal

4.3. Formule du binôme





Formule

Proposition - Formule du binôme (de Newton)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux réels ou deux complexes (ou éléments de tout anneau et tels que $a \times b = b \times a$). Alors :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$





Formule

Proposition - Formule du binôme (de Newton)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux réels ou deux complexes (ou éléments de tout anneau et tels que $a \times b = b \times a$). Alors :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Avec $a = b = 1$:

Corollaire -

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$





Formule

Proposition - Formule du binôme (de Newton)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux réels ou deux complexes (ou éléments de tout anneau et tels que $a \times b = b \times a$). Alors :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Avec $a = b = 1$:

Corollaire -

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Démonstration





Formule

Proposition - Formule du binôme (de Newton)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, b deux réels ou deux complexes (ou éléments de tout anneau et tels que $a \times b = b \times a$). Alors :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Avec $a = b = 1$:

Corollaire -

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

Démonstration

Exercice

Calculer $\sum_{0 \leq p \leq n; p \text{ pair}} \binom{n}{p}$ et $\sum_{0 \leq p \leq n; p \text{ impair}} \binom{n}{p}$.





Conclusion

Objectifs

⇒ Coefficients binomiaux

⇒ Formule du binôme de Newton





Conclusion

Objectifs

⇒ Coefficients binomiaux

- Définition





Conclusion

Objectifs

⇒ Coefficients binomiaux

- Définition
- Relations : formule du capitaine et triangle de Pascal





Conclusion

Objectifs

⇒ Coefficients binomiaux

- Définition
- Relations : formule du capitaine et triangle de Pascal

⇒ Formule du binôme de Newton





Conclusion

Objectifs

⇒ Coefficients binomiaux

- Définition
- Relations : formule du capitaine et triangle de Pascal

⇒ Formule du binôme de Newton

- $$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$





Conclusion

Objectifs

- ⇒ Coefficients binomiaux
- ⇒ Formule du binôme de Newton

Pour la prochaine fois

- Lecture du cours : Chap 9 : Logique et ensembles
- Pour mardi : exercices N°21 & 30 + ACTIVITE sur les équations polynomiales

