

Devoir à la maison n°1

Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (*) voire (**).
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées.**

Exercice 1

Soient E un ensemble non vide et $f : E \rightarrow E$, une application.

On « rappelle » que $f^0 = \text{id}_E$ et pour n entier naturel non nul, $f^n = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f$.

Pour tout entier naturel n , on note $F_n = \text{Im}(f^n)$.

1. (a) Quel est l'ensemble F_0 ?
(b) Montrer que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, i.e. : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n$.
2. On suppose dans cette question qu'il existe un entier p telle que $F_{p+1} = F_p$.
(a) Montrer que $\forall k \geq p, F_k = F_p$.
(b) Montrer que tout sous-ensemble J de $\mathbb{N}$, non vide admet un plus petit élément.
(c) En déduire que $\{k \in \mathbb{N} \mid F_{k+1} = F_k\}$ admet un plus petit élément.
3. On suppose dans cette question que f est injective.
(a) Montrer que si A et B sont deux parties de E telles que $f(A) = f(B)$, alors $A = B$.
(b) En déduire que, s'il existe un entier p tel que $F_{p+1} = F_p$, alors f est bijective.
4. Donner un exemple où l'application f est injective et où la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante pour l'inclusion.

Exercice 2

1. Démontrer géométriquement et algébriquement la formule suivante (*Théorème de l'angle au centre*) :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, \quad \arg z = 2 \arctan \frac{\text{Im}(z)}{|z| + \text{Re}(z)}$$

2. (a) Démontrer l'équivalence :

$$\left| \frac{1+ix}{1-ix} \right| = 1 \iff x \in \mathbb{R}$$

- (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que les racines de l'équation $\left(\frac{1+ix}{1-ix} \right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$ sont les nombres $x_k = \tan \frac{\alpha + k\pi}{n}$ pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ et $\alpha = \arctan a$

(Ces deux questions 1. et 2. sont indépendantes)

Problème

On considère dans tout ce problème la fonction polynomiale :

$$f : x \mapsto x^3 - x - 1$$

1. Etude des racines de f .
 - (a) Montrer que f possède une unique racine réelle, notée λ et que $\lambda \in]1, 2[$.
 - (b) Soit σ une racine complexe, non réelle de f . Calculer $\lambda|\sigma|^2$.
Ordonner les réels $|\sigma|$, 1 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Etude de suites.

On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$$

Puis, on définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \cos(\pi u_n)$

- (a) Pour $0 \leq n \leq 10$, calculer u_n et v_n .
- (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs entières.
- (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique et préciser sa période.
- (d) Montrer que la suite $(w_m)_{m \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad w_m = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^m v_n$$

converge vers $-\frac{1}{7}$.

On pourra faire la division euclidienne de m par 7 : $m = 7q_m + r_m$ avec $r_m \in \{0, 1, \dots, 6\}$.

- (e) Montrer que $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ est LA solution du système (de Cramer) :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \lambda x + \sigma y + \bar{\sigma} z = 0 \\ \lambda^2 x + \sigma^2 y + \bar{\sigma}^2 z = 2 \end{cases}$$

- (f) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \lambda^n + \sigma^n + \bar{\sigma}^n$$

- (g) (*) Montrer que la limite de $\left(\frac{1}{m} \sum_{n=0}^m \cos(\pi \lambda^n) \right)_m$ pour $m \rightarrow +\infty$ n'est pas nulle.

On donnera sa valeur.

3. Equirépartition.

On dit qu'une suite (a_n) est équirépartie (modulo 1) si

- pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in [0, 1]$.
- Pour tout a, b tels que $0 \leq a < b \leq 1$, $\frac{1}{n} \text{card}(\{k \mid u_k \in [a, b]\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b - a$

On admet que (a_n) est équirépartie modulo 1 ssi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m e^{2i\pi p a_n} = 0$.

C'est cette deuxième caractéristique (appelé, critère de WEYL) qui servira pour la suite.

Enfin, on note pour tout nombre réel x , $\theta(x) = x - [x]$, sa partie décimale (x privé de sa partie entière).

- (a) Que vaut $\theta(e)$? (On donnera les 5 premiers chiffres significatifs).
- (b) En exploitant les parties précédentes, montrer que la suite $a_n = \theta(\frac{1}{2}\lambda^n)$ n'est pas équirépartie (modulo 1).
- (c) Montrer que le réel λ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.
- (d) Montrer que pour tout entier $q \in \mathbb{N}$ et tout entier $m \geq 1$,

$$\left| \sum_{n=1}^m e^{2\pi i q n \lambda} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\pi q \lambda)|}$$

- (e) En déduire que la suite $(b_n) = \theta(n\lambda)$ est équirépartie.
- (f) Le résultat précédent reste-t-il valable si l'on remplace λ par un nombre irrationnel quelconque.