

DEVOIR SURVEILLÉ N°0

Sujet donné le samedi 13 septembre 2025, 2h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'énoncé des **formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

PROBLÈME - LA BORNE DE CAUCHY

Dans ce problème, nous étudions un encadrement des modules des racines d'une fonction polynomiale en fonction de ses coefficients. Pour un ensemble E fini, on note $\text{card}(E)$, son cardinal, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\binom{\mathbb{N}_n}{p}$, l'ensemble à p éléments pris dans l'ensemble $\mathbb{N}_n := \llbracket 1, n \rrbracket$.

Par exemple, pour $n = 4$, $\binom{\mathbb{N}_4}{0} = \{\emptyset\}$ alors que $\binom{\mathbb{N}_4}{2} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

Ce problème est composé de quatre parties. La première donne deux résultats utiles par la suite : la généralisation de l'inégalité triangulaire et la valeur de $\text{card}\left(\binom{\mathbb{N}_n}{p}\right)$. La deuxième partie donne un majorant de l'ensemble des racines d'un polynôme H qui a une forme particulière. Ce résultat est exploité dans deux applications en troisième partie. Et il est généralisé à toute forme de polynôme en quatrième partie. Cela se termine par un encadrement (majoration et minoration) des racines d'un polynôme quelconque en fonction de la borne de Cauchy.

I . Préliminaires. Relations sur les ensembles et inégalité triangulaire.

A. On admet que pour tout nombre complexe $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

I.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $z_1, z_2 \dots z_n \in \mathbb{C}$,

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

B. On note, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $C(n, p) = \text{card}\left(\binom{\mathbb{N}_n}{p}\right)$ (on rappelle que $\binom{\mathbb{N}_n}{p}$ a été défini plus haut).

I.2. Donner la description complète de l'ensemble $\binom{\mathbb{N}_5}{3}$. On notera que cet ensemble est composée de 10 éléments.

I.3. Evaluer $C(0, 0) = \text{card}\left(\binom{\mathbb{N}_0}{0}\right)$, $C(1, 0) = \text{card}\left(\binom{\mathbb{N}_1}{0}\right)$ et $C(1, 1) = \text{card}\left(\binom{\mathbb{N}_1}{1}\right)$.

On notera que $\mathbb{N}_0 = \emptyset$.

I.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $p \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et E , un ensemble de p éléments pris dans $\mathbb{N}_{n+1}$. Montrer que :

ou bien $n+1 \in E$, et alors $E \setminus \{n+1\} \in \binom{\mathbb{N}_n}{p-1}$, ou bien $n+1 \notin E$, et alors $E \in \binom{\mathbb{N}_n}{p}$.

(b) En déduire $C(n+1, p) = C(n, p-1) + C(n, p)$.

I.5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $C(n, p) = \binom{n}{p}$.

II . Une première famille de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(c_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ n réels positifs, non tous nuls. On considère la fonction polynomiale

$$H : x \mapsto x^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$$

et on définit également $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-H(x)}{x^n}$.

- II.1. H est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xH'(x) = nx^n - \sum_{k=0}^{n-1} kc_kx^k$
- II.2. Etudier les variations de h et démontrer que h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
- II.3. En déduire que la fonction polynomiale H admet une unique racine réelle strictement positive, notée α .
On exploitera le théorème de la bijection ou corollaire des valeurs intermédiaires, en énonçant et vérifiant chacune de ses hypothèses.
- II.4. Montrer que $H'(\alpha) \neq 0$, donc que α est une racine simple de H .
- II.5. Soit ζ une racine complexe de H . On va démontrer par l'absurde que nécessairement $|\zeta| \leq \alpha$.
Supposons que $|\zeta| > \alpha$. En évaluant le signe de $H(|\zeta|)$, montrer que $|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$.
- II.6. Montrer que cela conduit à une contradiction, puis conclure.

III . Deux applications

- III.1. Première application. Soit $H_1 : x \mapsto x^5 - x^4 - 2x^2 - x - 6$.
Evaluer $H_1(2)$. Que dire des racines de H_1 ? Combien de racines entières H_1 admet-il?
- III.2. Deuxième application. On considère $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 2$, puis $(a_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ m réels strictement positifs et

$$F : x \mapsto \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k$$

une fonction polynomiale de degré $m-1$.
On pose $\gamma = \max_{1 \leq i \leq m-1} \frac{a_{i-1}}{a_i}$, le plus grand rapport des termes consécutifs : $\frac{a_{i-1}}{a_i}$.

- (a) On note $F_\gamma : x \mapsto (x - \gamma)F(x)$.
Montrer que F_γ est une fonction polynomiale de degré m , puis que pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$,

$$[F_\gamma]_k = a_{k-1} - \gamma a_k$$

(avec les conventions : $a_m = 0$ et $a_{-1} = 0$.)

- (b) En déduire que $H : x \mapsto \frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma(x)$ vérifie exactement les hypothèses de la partie II.
En déduire que pour toute racine ζ de F , $|\zeta| \leq \gamma$

IV La borne de Cauchy

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, un polynôme de degré n , à coefficients dans $\mathbb{C}$ et tel que les $(a_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ soient non tous nuls.

- IV.1. Montrer que l'équation d'inconnue $x : \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k = |a_n| x^n$ notée (E) , possède une unique solution réelle strictement positive.
Cette racine est appelée **borne de Cauchy** de f et sera notée dans la suite $\rho(f)$.

Puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k \geq |a_n| x^n$ si et seulement si $x \leq \rho(f)$

- IV.2. Montrer que, pour tout racine complexe ζ de f , on a : $|\zeta| \leq \rho(f)$
- IV.3. Soit $(\zeta_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les n racines complexes (distinctes ou non) de f avec comme convention :

$$0 \leq |\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq \dots \leq |\zeta_n| \leq \rho(f)$$

On a donc la factorisation : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \zeta_i)$.

- (a) On admet que pour tout nombres complexes $z_1, \dots, z_n$, $\prod_{i=1}^n (x - z_i) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{I \in \binom{\llbracket 1, n \rrbracket}{k}} \prod_{i \in I} z_i \right) x^{n-k}$.

Montrer que pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a : $\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leq \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$

- (b) En déduire que : $\rho(f)^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}$

- (c) En déduire que

$$(\sqrt[n]{2} - 1) \rho(f) \leq |\zeta_n| \leq \rho(f)$$