

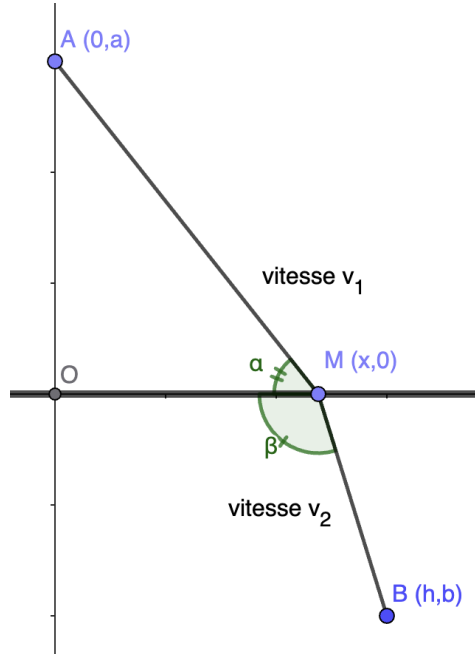
DEVOIR SURVEILLE 1

CORRECTION

EXERCICE - PRINCIPE DE FERMAT

On cherche donc le trajet de la lumière (modélisé ici par des particules de photon) pour aller d'un point A à un point B à travers deux milieux. Nous considérerons (en exploitant le principe de FERMAT) que le trajet suit une ligne droite dans un milieu homogène lorsque la vitesse de déplacement est constante.

On considère un repère cartésien délimitant le milieu. Le point A a pour coordonnée $(0, a)$, le point M a pour coordonnée $(x, 0)$ et le point B a pour coordonnée (h, b) . La particule se déplace avec une vitesse v_1 dans le milieu $y > 0$, et v_2 dans le milieu $y \leq 0$.



- .1. Exprimer le temps $T_1(x)$ mis par la particule pour aller du point A au point M .

La distance entre $A(0, a)$ et $M(x, 0)$ est $d_1(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$. A vitesse v_1 , cela donne le temps

$$T_1(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1}$$

- .2. Exprimer le temps $T_2(x)$ mis par la particule pour aller du point M au point B .

La distance entre $B(h, b)$ et $M(x, 0)$ est $d_2(x) = \sqrt{(x - h)^2 + b^2}$. A vitesse v_2 , cela donne le temps

$$T_2(x) = \frac{\sqrt{(x - h)^2 + b^2}}{v_2}$$

- .3. On note x_0 , la valeur de x pour obtenir le temps T minimal mis par la particule pour aller de A à B . Exprimer x_0 comme solution d'une équation quadratique (avec des carrés et des racines carrées).

La fonction de temps à optimiser est donc $T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x - h)^2 + b^2}}{v_2}$.

Elle est dérivable sur $[0, h]$, de dérivée :

$$T'(x) = \frac{2x}{2v_1\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{2(x - h)}{2v_2\sqrt{(x - h)^2 + b^2}} = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - h}{v_2\sqrt{(x - h)^2 + b^2}}$$

La dérivée s'annule en x_0 pour lequel :

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{x_0^2 + a^2}} + \frac{x_0 - h}{v_2\sqrt{(x_0 - h)^2 + b^2}} = 0$$

4. On note α_0 l'angle entre O , $M(x_0)$ et A et β_0 l'angle entre O , $M(x_0)$ et B (cf. figure).

Montrer que la trajectoire effectivement suivie par les particules lumineuses vérifie : $\frac{1}{v_1} \cos \alpha_0 + \frac{1}{v_2} \cos \beta_0 = 0$.

Dans le triangle OAM rectangle en O , l'angle α_0 vérifie $\cos \alpha_0 = \frac{OM}{AM} = \frac{x_0}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

On note O' , le point de coordonnées $(h, 0)$, l'angle $O'MB$ est exactement égal à $\pi - \beta_0$.

Dans le triangle $O'BM$ rectangle en O' , l'angle $\pi - \beta_0$ vérifie $\cos(\pi - \beta_0) = \frac{O'M}{BM} = \frac{h - x_0}{\sqrt{(x - h)^2 + a^2}}$.

Ainsi $\frac{x_0 - h}{\sqrt{(x - h)^2 + a^2}} = -\frac{h - x_0}{\sqrt{(x - h)^2 + a^2}} = -\cos(\pi - \beta_0) = \cos \beta_0$.

Par conséquent, avec la question précédente, on retrouve la condition :

$$\boxed{\frac{\cos \alpha_0}{v_1} + \frac{\cos \beta_0}{v_2} = 0}$$

5. Sous quelle forme plus connue est écrite la loi de Descartes

L'indice du milieu noté n_i est inversement proportionnel à la vitesse de déplacement de la lumière dans ce milieu :

Ainsi, il existe K , tel que $n_1 = \frac{K}{v_1}$ et $n_2 = \frac{K}{v_2}$.

Puis, on note $i_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, l'angle réalisé en M avec la normale au plan côté milieu 1

et $i_2 = \beta - \frac{\pi}{2}$, l'angle réalisé en M avec la normale au plan côté milieu 2.

On a donc

$$n_1 \sin i_1 = \frac{K}{v_1} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{K}{v_1} \cos \alpha = -\frac{K}{v_2} \cos \beta = -\frac{K}{v_2} \cos \left(i_2 + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{K}{v_2} \times (-\sin i_2) = n_2 \sin i_2$$

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

Le principe de FERMAT conduira au principe de moindre action, énoncé par MAUPERTUIS et s'enrichira en science physique dans un champ de plus en plus large : optique, mécanique, thermodynamique et quantique...

PROBLÈME - EXCURSION EN TRIGONOMÉTRIE

I Irrationalité de $\sqrt{17}$

I.1. Démontrer que $\sqrt{17}$ est un nombre irrationnel.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{17}$ est un nombre rationnel.

Alors, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{17} = \frac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$.

Alors, $17q^2 = p^2$ donc 17 divise p^2 , or 17 est un nombre premier, donc $17|p$.

Donc, il existe $\tilde{p} \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 17\tilde{p}$.

En injectant dans l'égalité $17q^2 = p^2$, on obtient $17q^2 = (17\tilde{p})^2$, donc $q^2 = 17\tilde{p}^2$.

Donc, 17 divise q^2 , or 17 est premier, donc 17 divise q .

Ainsi, 17 divise p et q , donc 17 divise $p \wedge q$, or $p \wedge q = 1$ donc 17 divise 1 ce qui est faux (les diviseurs de 1 sont 1 et -1).

Ainsi, $\sqrt{17}$ est un nombre irrationnel.

On admet qu'on peut démontrer de manière analogue que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

II Somme(s) de cosinus

Dans cette partie, on veut établir quelques résultats qui seront utiles par la suite. Soit m un entier naturel non nul ($m \in \mathbb{N}^*$).

II.1. (a) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer le produit $\cos(\alpha)\sin(\beta)$ en fonction d'une somme de cosinus et de sinus exploitant uniquement les formules d'addition.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. D'après les formules d'addition,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta),$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta).$$

En soustrayant les égalités précédentes, on obtient

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2}.$$

(b) Soient a et b deux réels avec $b \neq 0[2\pi]$. Dédurre de la question précédente, pour $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ une expression de $\cos(a + kb)\sin\left(\frac{b}{2}\right)$ comme somme de sinus et de cosinus.

En utilisant la question précédente pour $\alpha \leftarrow a + kb$ et $\beta \leftarrow \frac{b}{2}$,

$$\begin{aligned}\cos(a + kb)\sin\left(\frac{b}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(a + kb + \frac{b}{2}\right) - \sin\left(a + kb - \frac{b}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)b\right) - \sin\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)b\right) \right].\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \cos(a + kb)\sin\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)b\right) - \sin\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)b\right) \right].$$

(c) En déduire, en multipliant par $\sin\left(\frac{b}{2}\right)$ puis en simplifiant, une expression de $\sum_{k=0}^{m-1} \cos(a + kb)$ sous la forme $\frac{\sin\left(\frac{mb}{2}\right)\cos(\dots? \dots)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$ où le « ? » sera remplacé par une expression explicite dépendant de m, a et b .

En utilisant la question précédente, puis une somme télescopique,

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{b}{2}\right) \sum_{k=0}^{m-1} \cos(a+kb) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \left[\sin\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)b\right) - \sin\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)b\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \left[\sin\left(a + \frac{1}{2}b + kb\right) - \sin\left(a + \frac{1}{2}b + (k-1)b\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \sin\left(a + \frac{1}{2}b + kb\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=-1}^{m-2} \sin\left(a + \frac{1}{2}b + jb\right) \quad \text{en posant } j = k-1 \\
&= \frac{1}{2} \left[\sin\left(a + \frac{1}{2}b + (m-1)b\right) - \sin\left(a + \frac{1}{2}b + (-1)b\right) \right] \quad \text{après télescopage} \\
&= \frac{1}{2} \left[\sin\left(a + \left(m - \frac{1}{2}\right)b\right) - \sin\left(a - \frac{1}{2}b\right) \right].
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$,

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{b}{2}\right) \sum_{k=0}^{m-1} \cos(a+kb) &= \sin\left(\frac{a + \left(m - \frac{1}{2}\right)b - \left(a - \frac{1}{2}b\right)}{2}\right) \cos\left(\frac{a + \left(m - \frac{1}{2}\right)b + a - \frac{1}{2}b}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{mb}{2}\right) \cos\left(a + \frac{m-1}{2}b\right).
\end{aligned}$$

Finalement, l'hypothèse $b \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ garantit $\sin \frac{b}{2} \neq 0$ (car $\sin \frac{b}{2} \neq 0 \iff \frac{b}{2} \not\equiv 0 \pmod{\pi} \iff b \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$) donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{m-1} \cos(a+kb) = \frac{\sin\left(\frac{mb}{2}\right) \cos\left(a + \frac{m-1}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}}.$$

Dans le reste de cette partie, n désigne un entier naturel non nul fixé. Pour tout entier relatif k , on pose

$$a_k = (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

II.2. Comparer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, a_k , a_{k+2n+1} et a_{2n+1-k} .

D'après la définition,

$$\begin{aligned}
a_{k+2n+1} &= (-1)^{k+2n+1} \cos\left(\frac{(k+2n+1)\pi}{2n+1}\right) \\
&= -(-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1} + \pi\right) \quad \text{or, pour tout } t \in \mathbb{R}, \cos(t+\pi) = -\cos(t) \\
&= (-1)^2 (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \\
&= a_k, \\
a_{2n+1-k} &= (-1)^{2n+1-k} \cos\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right) \quad \text{observons que } k \text{ et } -k \text{ ont même parité donc } (-1)^{-k} = (-1)^k \\
&= -(-1)^k \cos\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right) \quad \text{or, pour tout } t \in \mathbb{R}, \cos(\pi - t) = -\cos(t) \\
&= (-1)^2 (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \\
&= a_k.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } a_{k+2n+1} = a_{2n+1-k} = a_k.}$$

II.3. Montrer que $\forall (s, k) \in \mathbb{Z}^2$, $2a_s a_k = a_{s+k} + a_{s-k}$. Que devient cette relation lorsque $k = s$?

Soit $s, k \in \mathbb{Z}^2$. En utilisant les formules de linéarisation,

$$\begin{aligned}
2a_s a_k &= 2(-1)^{k+s} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \cos\left(\frac{s\pi}{2n+1}\right) \\
&= 2(-1)^{k+s} \times \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1} + \frac{s\pi}{2n+1}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1} - \frac{s\pi}{2n+1}\right) \right] \\
&= (-1)^{k+s} \cos\left(\frac{(k+s)\pi}{2n+1}\right) + (-1)^{k+s} \cos\left(\frac{(k-s)\pi}{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Or, $(-1)^{-s} = \left(\frac{1}{-1}\right)^s = (-1)^{-s}$ et la fonction cosinus est paire, donc

$$2a_s a_k = a_{k+s} + a_{s-k}.$$

$$\text{Ainsi, } 2a_s a_k = a_{k+s} + a_{s-k}.$$

Lorsque $k = s$, la relation s'écrit

$$2a_k^2 = a_{2k} + a_0 = (-1)^{2k} \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1 = \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + 1.$$

$$\text{Ainsi, lorsque } k = s, \text{ on retrouve la formule de duplication : } a_{2k} = 2a_k^2 - 1.$$

II.4. Établir la relation qui suit : $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n a_{2n+1-k} \quad \text{d'après la question II.2} \\ &= \sum_{j=n+1}^{2n} a_j \quad \text{en posant le changement d'indice } j = 2n+1-k \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$

II.5. Calculer $\sum_{k=0}^{2n} a_k$ et en déduire : $\sum_{k=1}^n a_k = -\frac{1}{2}$.

Observons que

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos\left(k \frac{\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{2n} \cos\left(k \frac{\pi}{2n+1} + k\pi\right) = \sum_{k=0}^{2n} \cos\left[0 + k\left(\frac{\pi}{2n+1} + \pi\right)\right]$$

Appliquons la formule établie dans la question II.1(c) pour $m \leftarrow 2n+1$, $a \leftarrow 0$, $b \leftarrow \frac{\pi}{2n+1} + \pi$ ce qui est autorisé car $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\frac{\pi}{2n+1} + \pi \in \left]\pi, \pi + \frac{\pi}{3}\right]$ donc $\frac{\pi}{2n+1} + \pi \notin 0[2\pi]$,

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{k=0}^{2n} \cos\left[0 + k\left(\frac{\pi}{2n+1} + \pi\right)\right] = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\left(\frac{\pi}{2n+1} + \pi\right)}{2}\right) \cos\left(0 + \frac{2n+1-1}{2}\left(\frac{\pi}{2n+1} + \pi\right)\right)}{\sin\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2n+1} + \pi\right)}{2}\right)}$$

$$\text{or } \sin\left(\frac{(2n+1)\left(\frac{\pi}{2n+1} + \pi\right)}{2}\right) = \sin\left(\frac{(2n+2)\pi}{2}\right) = \sin((n+1)\pi) = 0,$$

$$\text{donc, } \sum_{k=0}^{2n} a_k = 0.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} a_k &= a_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k}_{\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \text{ d'après la question II.4}} = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \\ \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^n a_k = -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

II.6. Dédurre des relations précédentes une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ à l'aide de radicaux.

En choisissant $n = 2$ dans la relation de la question II.5, on obtient $\sum_{k=1}^2 a_k = -\frac{1}{2}$ ce qui donne

$$-\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} = -\frac{1}{2}$$

or la formule de duplication donne $\cos \frac{2\pi}{5} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1$ si bien que

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5} - \frac{1}{2} = 0$$

Ainsi, $\cos \frac{\pi}{5}$ est une racine du trinôme $2X^2 - X - \frac{1}{2}$. Le discriminant de ce trinôme vaut $1^2 + 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 5$ donc il admet deux racines réelles distinctes qui sont

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Or d'une part $\frac{\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos \frac{\pi}{5} > 0$ et d'autre part $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$,

$$\text{donc } \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

II.7. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est irrationnel.

Raisonnons par l'absurde. Si $\cos \frac{\pi}{5}$ est rationnel, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{p}{q}$.

Alors, $\sqrt{5} = 4\frac{p}{q} - 1 \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit l'irrationalité de $\sqrt{5}$ admise dans la partie ??.

$$\text{Ainsi, } \cos \frac{\pi}{5} \text{ est irrationnel.}$$

III Applications

On exploite les résultats et les notations des parties précédentes. On s'intéresse successivement aux cas $n = 3$ et $n = 8$.

III.1. Dans cette première application, $n = 3$.

(a) Calculer s_1 , s_2 et s_3 , où

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3 \qquad s_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 \qquad s_3 = a_1a_2a_3$$

On applique directement la formule trouvée en II.5. : $s_1 = \sum_{k=1}^3 a_k = -\frac{1}{2}$.

Puis, en exploitant les relations obtenues en II.3. et en II.2. :

$$s_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = \frac{1}{2} \left((a_3 + a_1) + \underbrace{(a_4)}_{=a_7-a_4=a_3} + a_2 \right) + \underbrace{(a_5)}_{a_7-a_5=a_2} + a_1 = \frac{1}{2} (2a_1 + 2a_2 + 2a_3) = -\frac{1}{2}$$

$$s_3 = (a_1a_2)a_3 = \frac{1}{2}(a_3 + a_1)a_3 = \frac{1}{4}(\underbrace{a_6 + 1}_{\text{cas } k=s} + a_4 + a_2) = \frac{1}{4}(a_1 + a_3 + a_2 + 1) = \frac{1}{8}$$

$$(\text{Autre option : } a_2 = a_5 \text{ et donc } s_3 = \frac{1}{4}(1 + a_4 + a_5 + a_6) = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{8})$$

$$\text{Bilan : } s_1 = s_2 = -\frac{1}{2}, s_3 = \frac{1}{8}$$

(b) Développer, pour tout réel x , l'expression $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)$ sous la forme $x^3 + Ax^2 + Bx + C$, où l'on exprimera A , B et C en fonction des nombres s_1 , s_2 et s_3 .

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = (x^3 - (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x - a_1a_2a_3)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3$$

L'objectif de cette question est de montrer que l'équation $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$ (*) n'admet pas de solution rationnelle.

On suppose que $\frac{p}{q}$ (fraction irréductible, donc $p, q \in \mathbb{Z}$ avec p et q premiers entre eux) est un rationnel solution de (*).

- (c) Montrer que $8p^3 = -4p^2q + 4pq^2 + q^3$.
En déduire que q divise 8 ; puis p divise 1

Supposons que $\frac{p}{q}$ soit une racine de $(\star)$, donc $\frac{p^3}{q^3} + \frac{1}{2}\frac{p^2}{q^2} - \frac{1}{2}\frac{p}{q} - \frac{1}{8} = 0$.

On multiplie cette relation par $8q^3 \neq 0$:

$$8p^3 + 4p^2q - 4pq^2 - q^3 = 0 \text{ ainsi } 8p^3 = -4p^2q + 4pq^2 + q^3$$

Ainsi $q(-4p^2 + 4pq + q^2) = 8p^3$. Donc q divise $8p^3$. Or $q \wedge p = 1$, donc $q \wedge p^3 = 1$ et donc d'après le lemme de Gauss : $q|8$.
De même : $q^3 = 8p^3 + 4p^2q - 4pq^2 = p(8p^2 + 4pq - 4q^2)$. Donc p divise q^3 . Mais $p \wedge q^3 = 1$, donc p divise 1.

$$q \text{ divise } 8 \text{ et } p \text{ divise } 1.$$

- (d) En déduire que $\frac{p}{q}$ appartient à un ensemble de 8 éléments que l'on précisera.

L'ensemble des diviseurs de 1 est $\{1, -1\}$, l'ensemble des diviseurs de 8 est $\{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$.

$$\text{Ainsi } \frac{p}{q} \in \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \right\}.$$

- (e) Conclure et montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ n'est pas rationnel.

On fait les 8 calculs possibles pour savoir si effectivement $\frac{p}{q}$ est bien solution de $(\star)$: $A\left(\frac{p}{q}\right) := \left(\frac{p}{q}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{p}{q} - \frac{1}{8}$

$$\begin{aligned} - A(-1) &= -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \neq 0. \\ - A\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \neq 0. \\ - A\left(-\frac{1}{4}\right) &= -\frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{64} \neq 0. \\ - A\left(-\frac{1}{8}\right) &= -\frac{1}{512} + \frac{1}{128} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{-1+4+16-32}{512} = -\frac{13}{512} \neq 0. \\ - A\left(\frac{1}{8}\right) &= \frac{1}{512} + \frac{1}{128} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{+1+4-16-32}{512} = -\frac{43}{512} \neq 0. \\ - A\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{64} + \frac{1}{32} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{-13}{64} \neq 0. \\ - A\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \neq 0. \\ - A(1) &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi l'équation $(\star)$ n'admet aucune solution rationnelle. Par ailleurs, on a vu (III.1.(b)) que les solutions de cette équations sont $a_1 = \cos\frac{\pi}{7}$, a_2 et a_3 .

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \text{ n'est pas rationnel.}$$

III.2. On va montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ peut s'écrire à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.

Dans cette seconde application, $n = 8$ et l'on conserve les notations $(a_k \dots \text{avec } n = 8)$ de la partie I.

- (a) On pose $x_1 = a_1 + a_2 + a_4 + a_8$ et $x_2 = a_5 + a_6 + a_7 + a_3$.

Calculer $x_1 + x_2$ et établir que $x_1 \times x_2 = 2(x_1 + x_2)$.

En réorganisant les calculs (addition commutative) et en exploitant la partie II (avec $n = 8$) :

$$x_1 + x_2 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \sum_{k=1}^8 a_k = -\frac{1}{2}$$

Alors que en développant

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= (a_1 + a_2 + a_4 + a_8)(a_5 + a_6 + a_7 + a_3) \\ &= a_1 a_5 + a_1 a_6 + a_1 a_7 + a_1 a_3 + a_2 a_5 + a_2 a_6 + a_2 a_7 + a_2 a_3 \\ &\quad + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_4 a_7 + a_4 a_3 + a_8 a_5 + a_8 a_6 + a_8 a_7 + a_8 a_3 \\ &= \frac{1}{2}(a_6 + a_4 + a_7 + a_5 + a_8 + a_6 + a_4 + a_2 + a_7 + a_3 + a_8 + a_4 + a_9 + a_5 + a_5 + a_1 \\ &\quad + a_9 + a_1 + a_{10} + a_2 + a_{11} + a_3 + a_7 + a_1 + a_{13} + a_3 + a_{14} + a_2 + a_{15} + a_1 + a_{11} + a_5) \\ &= \frac{1}{2}(4a_1 + (3a_2 + a_{15}) + (3a_3 + a_{14}) + (3a_4 + a_{13}) + 4a_5 + (2a_6 + 2a_{11}) + (3a_7 + a_{10}) + (2a_8 + 2a_9)) \\ &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

où l'on rappelle qu'ici : $a_k = a_{17-k}$, puisque $n = 8$.

$$x_1 \times x_2 = 2(x_1 + x_2)$$

- (b) Montrer que $x_1 > 0$ et en déduire une expression de x_1 et de x_2 à l'aide de radicaux carrés.

On pourra montrer que x_1 et x_2 sont les racines d'une équation polynomiale de degré 2, dont on cherchera dans un second temps une expression des racines.

$\frac{4\pi}{17} < \frac{4\pi}{17} < \frac{\pi}{4}$, puisque $16 < 17$ et par décroissance de $\cos$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi $\cos \frac{2\pi}{17} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$ et $\cos \frac{4\pi}{17} > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Donc $x_1 > -\cos \frac{\pi}{17} + \sqrt{2} + \cos \frac{8\pi}{17} > 0$, car $\cos \frac{\pi}{17} \leq 1 < \sqrt{2}$.

$$\text{Donc } x_1 > 0.$$

x_1 et x_2 sont les racines de

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + \frac{1}{2}x - 1$$

d'après les résultats numériques de $x_1 + x_2$ et $x_1 \times x_2$ obtenues à la partie précédente. Le discriminant de cette équation est $\Delta = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$. Les racines sont

$$\underbrace{x_1}_{>0} = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{17} - 1}{4}$$

- (c) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ n'est pas rationnel.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ est un nombre rationnel.

Il existe donc $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \wedge q = 1$ et $q > 0$ tel que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{p}{q}$.

On a alors

$$\cos \frac{2\pi}{17} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{17} - 1 = \frac{2p^2 - q^2}{q} \in \mathbb{Q}$$

Et de même $\cos \frac{4\pi}{17} = 2 \frac{(2p^2 - q^2)^2}{q^2} - 1 \in \mathbb{Q}$ et $\cos \frac{8\pi}{17} \in \mathbb{Q}$.

Ainsi

$$x_1 = -\cos \frac{\pi}{17} + \cos \frac{2\pi}{17} + \cos \frac{4\pi}{17} + \cos \frac{8\pi}{17} \in \mathbb{Q}$$

On peut donc supposer que $x_1 = \frac{P}{Q}$ avec $P \in \mathbb{Z}$, $Q \in \mathbb{N}^*$ et $P \wedge Q = 1$.

On a alors, avec la question précédente :

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4} \iff \sqrt{17} = \frac{4P}{Q} + 1 = \frac{4P + Q}{Q} \in \mathbb{Q}$$

Or on a vu en début de devoir que $\sqrt{17}$ n'est pas un nombre rationnel. Nous avons donc une contradiction.

$$\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) \text{ n'est pas rationnel.}$$

- (d) On pose

$$y_1 = a_3 + a_5 \quad y_2 = a_6 + a_7 \quad y_3 = a_1 + a_4 \quad y_4 = a_2 + a_8$$

Calculer y_1y_2 et y_3y_4 . En déduire une expression de y_1, y_2, y_3 et y_4 à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.

Toujours avec la même formule :

$$\begin{aligned} y_1y_2 &= (a_3 + a_5)(a_6 + a_7) = a_3a_6 + a_3a_7 + a_5a_6 + a_5a_7 = \frac{1}{2}(a_9 + a_3 + a_{10} + a_4 + a_{11} + a_1 + a_{12} + a_2) \\ &= \frac{1}{2}(a_8 + a_3 + a_7 + a_4 + a_6 + a_1 + a_5 + a_2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Et de même :

$$\begin{aligned} y_3y_4 &= (a_1 + a_4)(a_2 + a_8) = a_1a_2 + a_1a_8 + a_4a_2 + a_4a_8 = \frac{1}{2}(a_3 + a_1 + a_9 + a_7 + a_6 + a_2 + a_{12} + a_4) \\ &= \frac{1}{2}(a_3 + a_1 + a_8 + a_7 + a_6 + a_2 + a_5 + a_4) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$y_1 y_2 = y_3 y_4 = -\frac{1}{4}$$

$y_1 + y_2 = a_3 + a_5 + a_6 + a_7 = x_2$ et $y_3 + y_4 = a_1 + a_2 + a_4 + a_8$.

Ainsi, y_1 et y_2 sont les racines des $x^2 - (x_2)x - \frac{1}{4} = x^2 + \frac{\sqrt{17}+1}{4}x - \frac{1}{4}$ avec $\Delta_1 = \frac{17+1+2\sqrt{17}}{16} + 1 = \frac{34+2\sqrt{17}}{16}$.

Et, y_3 et y_4 sont les racines des $x^2 - (x_1)x - \frac{1}{4} = x^2 + \frac{-\sqrt{17}+1}{4}x - \frac{1}{4}$ avec $\Delta_2 = \frac{17+1-2\sqrt{17}}{16} + 1 = \frac{34-2\sqrt{17}}{16}$.

En terme de signes :

$$y_1 = a_3 + a_5 = -\cos \frac{3\pi}{17} - \cos \frac{5\pi}{17} < 0, \quad y_2 = a_6 + a_7 = \cos \frac{6\pi}{17} - \cos \frac{7\pi}{17} > 0 \quad (\text{décroissance de } \cos \text{ sur } [0, \pi]).$$

$$y_3 = a_1 + a_4 = -\cos \frac{\pi}{17} + \cos \frac{4\pi}{17} < 0 \quad (\text{décroissance de } \cos \text{ sur } [0, \pi]), \quad y_4 = a_2 + a_8 = \cos \frac{2\pi}{17} + \cos \frac{8\pi}{17} > 0.$$

On a toutes les informations, on peut identifier les calculs :

$$y_1 = \frac{-\frac{\sqrt{17}+1}{4} - \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{17} - \sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$$

Avec des calculs comparables :

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8} \quad y_3 = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} \quad y_4 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17} - \sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8} \quad y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8} \quad y_3 = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8} \quad y_4 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$

(e) Montrer que

$$\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{1 - \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16} + \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \frac{1 - \sqrt{17}}{\sqrt{2}} \sqrt{17 - \sqrt{17}} + 4\sqrt{2} \sqrt{17 + \sqrt{17}}}$$

On commencera par montrer que $y_1 = 2a_1 a_4 \dots$

$2a_4 a_1 = a_5 + a_3 = y_1$. Donc a_1 et a_4 sont les racines du polynôme $x^2 - y_3 x + \frac{y_1}{2}$, de discriminant $\Delta_3 = y_3^2 - 2y_1$.

$a_1 = -\cos \frac{\pi}{17}$ est la racine négative de ce polynôme, donc

$$\cos \frac{\pi}{17} = -\frac{y_3 - \sqrt{\Delta_3}}{2} = \frac{\sqrt{\Delta_3} - y_3}{2}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{1}{8^2} \left[(-1 + \sqrt{17})^2 + 34 - 2\sqrt{17} - 2\sqrt{34-2\sqrt{17}}(-1 + \sqrt{17}) \right] - 2\frac{1}{8} \left[-1 - \sqrt{17} - \sqrt{34+2\sqrt{17}} \right] \\ &= \frac{1}{8^2} \left[68 + 12\sqrt{17} + \sqrt{34-2\sqrt{17}}(2 - 2\sqrt{17}) + 16\sqrt{34+2\sqrt{17}} \right] \\ &= \frac{1}{4^2} \left[17 + 3\sqrt{17} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{17 - \sqrt{17}}(1 - \sqrt{17}) + 4\sqrt{34+2\sqrt{17}} \right] \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = -\frac{y_3}{2} + \frac{\sqrt{\Delta_3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16} + \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{17 - \sqrt{17}}(1 - \sqrt{17}) + 4\sqrt{2} \sqrt{17 + \sqrt{17}}}$$

Il est possible de construire sur le cercle unité à la règle et au compas le point d'angle polaire $\frac{\pi}{17}$. On ne demande pas une telle construction.

IV Polynômes de Tchebychev

On définit par récurrence, la suite (T_n) des fonctions suivantes :

$$T_0 : x \mapsto 1 \quad , \quad T_1 : x \mapsto x \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1} : x \mapsto 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

IV.1. Donner l'expression de T_2 et de T_3 . Puis montrer que $T_4 : x \mapsto 8x^4 - 8x^2 + 1$.

On applique la formule (pour $n = 1$ et $n = 2$), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \quad , \quad T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = (4x^3 - 2x) - (x) = 4x^3 - 3x$$

Puis à nouveau pour T_4 :

$$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est une fonction polynomiale de degré n et de terme dominant $2^{n-1}x^n$.

IV.2. Montrer, par récurrence bien soignée, que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$

On peut fixer θ avant la récurrence (comme dans la correction ici), ou bien définir la famille de propositions avec un pour tout θ dans l'énoncé.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n : \ll T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \gg$.

— $T_0(\cos \theta) = 1 = \cos(0 \times \theta)$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— $T_1(\cos \theta) = \cos \theta = \cos(1 \times \theta)$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.

$$T_{n+2}(\cos \theta) = 2(\cos \theta)T_{n+1}(\cos \theta) - T_n(\cos \theta) = 2 \cos \theta \underbrace{\cos((n+1)\theta)}_{\mathcal{P}_{n+1}} - \underbrace{\cos(n\theta)}_{\mathcal{P}_n}$$

Or

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta + \theta) + \cos((n+1)\theta - \theta) = 2 \cos((n+1)\theta) \cos \theta$$

On a donc bien, par soustraction :

$$T_{n+2}(\cos \theta) = \cos((n+2)\theta)$$

Donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vraie

Avec une récurrence à double hérédité (ou deux termes), on a démontré :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$$

IV.3. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \neq 0[\pi]$,

$$T'_n(\cos \theta) = \frac{n \sin(n\theta)}{\sin \theta}$$

Soit $g : \theta \mapsto T_n(\cos \theta)$. f est dérivable par composition de deux fonctions dérivables : une fonction polynomiale et l'application $\cos$.

On trouve alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $g'(\theta) = \sin(\theta) \times T'_n(\cos \theta)$.

Mais aussi, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $g(\theta) = \cos(n\theta)$, qui se dérive en $g' : \theta \mapsto -n \sin(n\theta)$.

On peut donc identifier et diviser par $\sin \theta$ car $\theta \neq 0[\pi]$ donc $\sin \theta \neq 0$:

$$\boxed{\forall \theta \neq 0[\pi], \quad T'_n(\cos \theta) = \frac{n \sin(n\theta)}{\sin \theta}}$$

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ avec $k \neq 0[n]$, $x_k := \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ est une racine de T'_n .

Soit $k \in \mathbb{Z}$, avec $k \neq 0[n]$, donc $\frac{k}{n}\pi \neq 0 \times \frac{\pi}{n} \quad \left[\frac{n\pi}{n}\right]$ i.e. $\frac{k\pi}{n} \neq 0[\pi]$.

Ainsi,

$$T'_n(x_k) = T'_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \frac{n \sin\left(n \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{n \sin(k\pi)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = 0$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}, \quad x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ est une racine de } T'_n}$$

(c) Montrer que $x_1 > x_2 > \dots x_{n-2} > x_{n-1}$.

T_n est une fonction polynomiale de degré n , donc T'_n est de degré $n-1$. Elle admet donc au plus $n-1$ racines distinctes. Nécessairement, les (x_k) ne sont pas tous différents...

Or la fonction $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ (à valeurs dans $[-1, 1]$),

ainsi si $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ et $\alpha \neq \beta$, alors nécessairement $\cos \alpha \neq \cos \beta$.

Ici, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $0 = \frac{0\pi}{n} < \frac{k\pi}{n} < \frac{n\pi}{n} = \pi$.

Par décroissance de $\cos$ sur $[0, \pi]$, on a ainsi :

$$\boxed{(1 >) x_1 > x_2 > \dots x_{n-2} > x_{n-1} (> -1)}$$

(d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T'_n(x) = n2^n \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - \cos \frac{k\pi}{n}\right)$$

On a trouvé $n - 1$ racines distinctes de T'_n , de degré $n - 1$, on donc factoriser totalement T'_n :

$$\exists Q \text{ polynomiale de degré } 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, T_n(x) = Q(x) \times \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k)$$

Comme $\deg Q = 0$, Q est constant, on le note λ . Le développement de T'_n a pour coefficient dominant λx^{n-1} . Or T_n a pour coefficient dominant $2^{n-1} x^n$, donc le coefficient de sa dérivée est $n 2^{n-1} x^{n-1}$.

Finalement, on identifie et on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T'_n(x) = n 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k) = n 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right)$$

IV.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $H : x \mapsto T_{2n} - 2(T_n)^2 + 1$ admet une infinité de racines (dans $[-1, 1]$).
Que peut-on en déduire concernant T_{2n} ?

Pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $\theta = \arccos x \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos \theta$.

Ainsi

$$H(x) = T_{2n}(x) - 2[T_n(x)]^2 - 1 = T_{2n}(\cos \theta) - 2[T_n(\cos \theta)]^2 - 1 = \cos(2n\theta) - 2\cos^2(n\theta) + 1 = 0$$

Puisque $\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$.

Donc H est une fonction polynomiale qui admet une infinité de racines. C'est donc la fonction polynomiale identiquement nul.

On en conclue :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{2n} = 2[T_n]^2 - 1$$

IV.5. En exploitant la même stratégie, montrer que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,

$$T_m \circ T_n = T_{m \times n}$$

puis que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$

$$T'_n \times T'_m \circ T_n = T'_{m \times n}$$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Soit $K : x \mapsto T_m \circ T_n(x) - T_{m \times n}(x)$, une fonction polynomiale.

Soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta = \arccos x$ i.e. $x = \cos \theta$.

$$K(x) = T_m(T_n(\cos \theta) - T_{m \times n}(\cos \theta) = T_m(\cos n\theta) - \cos((m \times n)\theta) = \cos(m(n\theta)) - \cos(m \times n\theta) = 0$$

La fonction polynomiale K admet une infinité de racines, elle est donc identiquement nulle.

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad T_m \circ T_n = T_{m \times n}$$

IV.6. Dédurre de ces questions que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ est racine de la fonction polynomiale :

$$16T_4^4 + 64XT_4'T_4^3 - 16T_4^2 - 32XT_4'T_4 + 2 - 2T_3T_4 - 2XT_3'T_4 - 2XT_3T_4' + 3T_3'T_3^2$$

où X est la fonction polynomiale identité : $X : x \mapsto x$

D'après la question 3.(b), $\cos\frac{\pi}{17}$ est racine de T'_{17} .

Or d'après l'énoncé et les formules précédentes :

$$\begin{aligned} T_{17} &= 2XT_{16} - T_{15} = 2X(2[T_8]^2 - 1) - T_3 \times T_5 = 2X(2(2T_4^2 - 1)^2 - 1) - T_3(2XT_4 - T_3) \\ &= 2X(2(4T_4^4 - 4T_4^2 + 1) - 1) - 2XT_3T_4 + T_3^2 = 16XT_4^4 - 16XT_4^2 + 2X - 2XT_3T_4 + T_3^2 \end{aligned}$$

On dérive (la dérivée de X est l'application $x \mapsto 1$) :

$$T'_{17} = 16T_4^4 + 64XT_4'T_4^3 - 16T_4^2 - 32XT_4'T_4 + 2 - 2T_3T_4 - 2XT_3'T_4 - 2XT_3T_4' + 3T_3'T_3^2$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) \text{ est racine de } 16T_4^4 + 64XT_4'T_4^3 - 16T_4^2 - 32XT_4'T_4 + 2 - 2T_3T_4 - 2XT_3'T_4 - 2XT_3T_4' + 3T_3'T_3^2$$

où X est la fonction polynomiale identité : $X : x \mapsto x$