

DEVOIR SURVEILLÉ N°1

Sujet donné le samedi 27 septembre 2025, 3h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision** des raisonnements et l'énoncé des **formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

EXERCICE - PRINCIPE DE FERMAT

Dans le but de conforter ou réfuter les lois énoncées par DESCARTES, FERMAT énonce la règle suivante :

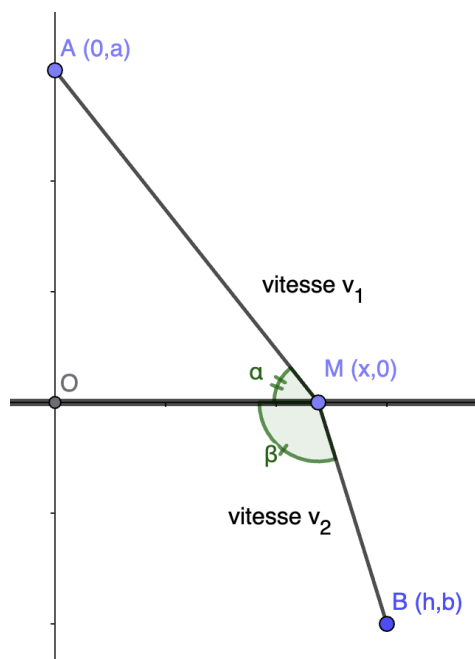
« La nature agit toujours par les moyens les plus aisés, c'est-à-dire ou par les lignes les plus courtes, lorsqu'elles n'emportent pas plus de temps, ou en tout cas par le temps le plus court, afin d'acourcir son travail et de venir plus tôt à bout de son opération. »

Dans le cadre de cet exercice, ce principe de FERMAT se comprend ainsi :

La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit localement extrémale.

On cherche donc le trajet de la lumière (modélisé ici par des particules de photon) pour aller d'un point A à un point B à travers deux milieux. Nous considérerons (en exploitant le principe de FERMAT) que le trajet suit une ligne droite dans un milieu homogène lorsque la vitesse de déplacement est constante.

On considère un repère cartésien délimitant le milieu. Le point A a pour coordonnée $(0, a)$, le point M a pour coordonnée $(x, 0)$ et le point B a pour coordonnée (h, b) . La particule se déplace avec une vitesse v_1 dans le milieu $y > 0$, et v_2 dans le milieu $y \leq 0$.



- .1. Exprimer le temps $T_1(x)$ mis par la particule pour aller du point A au point M .
- .2. Exprimer le temps $T_2(x)$ mis par la particule pour aller du point M au point B .
- .3. On note x_0 , la valeur de x pour obtenir le temps T minimal mis par la particule pour aller de A à B .
Exprimer x_0 comme solution d'une équation quadratique (avec des carrés et des racines carrées).
- .4. On note α_0 l'angle entre O , $M(x_0)$ et A et β_0 l'angle entre O , $M(x_0)$ et B (cf. figure).

Montrer que la trajectoire effectivement suivie par les particules lumineuses vérifie : $\frac{1}{v_1} \cos \alpha_0 + \frac{1}{v_2} \cos \beta_0 = 0$.

- .5. Sous quelle forme plus connue est écrite la loi de Descartes

Le principe de FERMAT conduira au principe de moindre action, énoncé par MAUPERTUIS et s'enrichit en science physique dans un champ de plus en plus large : optique, mécanique, thermodynamique et quantique...

PROBLÈME - EXCURSION EN TRIGONOMÉTRIE

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des nombres réels $\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)$ avec m et n des entiers naturels non nuls. Rappelons qu'un réel r est un rationnel lorsqu'il existe deux entiers relatifs p et q ($q \neq 0$) avec p et q premiers entre eux tels que $r = \frac{p}{q}$. On pourra utiliser sans les démontrer les résultats suivants d'arithmétique :

- Soient a, b et c trois entiers relatifs, si a et b sont premiers entre eux et si a divise bc alors a divise c (lemme de GAUSS).
- Soit p un nombre premier, si p divise a^2 , alors p divise a .

I . Irrationalité de $\sqrt{17}$

I.1. Démontrer que $\sqrt{17}$ est un nombre irrationnel.

On admet qu'on peut démontrer de manière analogue que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

II Somme(s) de cosinus

Dans cette partie, on veut établir quelques résultats qui seront utiles par la suite. Soit m un entier naturel non nul ($m \in \mathbb{N}^*$).

II.1. (a) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer le produit $\cos(\alpha)\sin(\beta)$ en fonction d'une somme de cosinus et de sinus exploitant uniquement les formules d'addition.

(b) Soient a et b deux réels avec $b \neq 0[2\pi]$. Dédurre de la question précédente, pour $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ une expression de $\cos(a+kb)\sin\left(\frac{b}{2}\right)$ comme somme de sinus et de cosinus.

(c) En déduire, en multipliant par $\sin\left(\frac{b}{2}\right)$ puis en simplifiant, une expression de $\sum_{k=0}^{m-1} \cos(a+kb)$ sous la forme $\frac{\sin\left(\frac{mb}{2}\right)\cos(\dots)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$ où le « ? » sera remplacé par une expression explicite dépendant de m, a et b .

Dans le reste de cette partie, n désigne un entier naturel non nul fixé. Pour tout entier relatif k , on pose

$$a_k = (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

II.2. Comparer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, a_k , a_{k+2n+1} et a_{2n+1-k} .

II.3. Montrer que $\forall (s, k) \in \mathbb{Z}^2$, $2a_s a_k = a_{s+k} + a_{s-k}$. Que devient cette relation lorsque $k = s$?

II.4. Établir la relation qui suit : $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$.

II.5. Calculer $\sum_{k=0}^{2n} a_k$ et en déduire : $\sum_{k=1}^n a_k = -\frac{1}{2}$.

II.6. Dédurre des relations précédentes une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ à l'aide de radicaux.

II.7. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est irrationnel.

III Applications

On exploite les résultats et les notations des parties précédentes. On s'intéresse successivement aux cas $n = 3$ et $n = 8$.

III.1. Dans cette première application, $n = 3$.

(a) Calculer s_1 , s_2 et s_3 , où

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3 \quad s_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 \quad s_3 = a_1 a_2 a_3$$

(b) Développer, pour tout réel x , l'expression $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ sous la forme $x^3 + Ax^2 + Bx + C$, où l'on exprimera A , B et C en fonction des nombres s_1 , s_2 et s_3 .

L'objectif de cette question est de montrer que l'équation $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$ (*) n'admet pas de solution rationnelle.

On suppose que $\frac{p}{q}$ (fraction irréductible, donc $p, q \in \mathbb{Z}$ avec p et q premiers entre eux) est un rationnel solution de (*).

(c) Montrer que $8p^3 = -4p^2q + 4pq^2 + q^3$.

En déduire que q divise 8 ; puis p divise 1

(d) En déduire que $\frac{p}{q}$ appartient à un ensemble de 8 éléments que l'on précisera.

(e) Conclure et montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ n'est pas rationnel.

III.2. On va montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ peut s'écrire à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.

Dans cette seconde application, $n = 8$ et l'on conserve les notations $(a_k \dots$ avec $n = 8$) de la partie I.

- (a) On pose $x_1 = a_1 + a_2 + a_4 + a_8$ et $x_2 = a_5 + a_6 + a_7 + a_3$.
Calculer $x_1 + x_2$ et établir que $x_1 \times x_2 = 2(x_1 + x_2)$.
- (b) Montrer que $x_1 > 0$ et en déduire une expression de x_1 et de x_2 à l'aide de radicaux carrés.
On pourra montrer que x_1 et x_2 sont les racines d'une équation polynomiale de degré 2, dont on cherchera dans un second temps une expression des racines.
- (c) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ n'est pas rationnel.
- (d) On pose

$$y_1 = a_3 + a_5 \quad y_2 = a_6 + a_7 \quad y_3 = a_1 + a_4 \quad y_4 = a_2 + a_8$$

Calculer $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$. En déduire une expression de y_1, y_2, y_3 et y_4 à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.

- (e) Montrer que

$$\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{1 - \sqrt{17}}{16} + \frac{\sqrt{17 - \sqrt{17}}}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} + \frac{1 - \sqrt{17}}{\sqrt{2}} \sqrt{17 - \sqrt{17}} + 4\sqrt{2} \sqrt{17 + \sqrt{17}}}$$

On commencera par montrer que $y_1 = 2a_1 a_4 \dots$

Il est possible de construire sur le cercle unité à la règle et au compas le point d'angle polaire $\frac{\pi}{17}$. On ne demande pas une telle construction.

IV Polynômes de Tchebychev

On définit par récurrence, la suite (T_n) des fonctions suivantes :

$$T_0 : x \mapsto 1 \quad , \quad T_1 : x \mapsto x \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1} : x \mapsto 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

IV.1. Donner l'expression de T_2 et de T_3 . Puis montrer que $T_4 : x \mapsto 8x^4 - 8x^2 + 1$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est une fonction polynomiale de degré n et de terme dominant $2^{n-1}x^n$.

IV.2. Montrer, par récurrence bien soignée, que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$

IV.3. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \neq 0[\pi]$,

$$T'_n(\cos \theta) = \frac{n \sin(n\theta)}{\sin \theta}$$

- (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ avec $k \neq 0[n]$, $x_k := \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ est une racine de T'_n .

- (c) Montrer que $x_1 > x_2 > \dots > x_{n-2} > x_{n-1}$.

- (d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T'_n(x) = n2^n \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - \cos \frac{k\pi}{n}\right)$$

IV.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $H : x \mapsto T_{2n} - 2(T_n)^2 + 1$ admet une infinité de racines (dans $[-1, 1]$).

Que peut-on en déduire concernant T_{2n} ?

IV.5. En exploitant la même stratégie, montrer que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,

$$T_m \circ T_n = T_{m \times n}$$

IV.6. Déduire de ces questions que $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ est racine de la fonction polynomiale :

$$16T_4^4 + 64XT_4'T_4^3 - 16T_4^2 - 32XT_4'T_4 + 2 - 2T_3T_4 - 2XT_3'T_4 - 2XT_3T_4' + 3T_3'T_3^2$$

où X est la fonction polynôme identité : $X : x \mapsto x$